193

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

26. BAND

QA1
M88
v.26

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1927

5856-42

MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG

VON

K. KNOPP
TÜBINGEN

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN

VON

L. LICHTENSTEIN
LEIPZIG

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

26. BAND

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1927

66 F3132

QA1
M88
v.24

Inhaltsverzeichnis

Seite

Baldus, R., Über das Archimedische Axiom 757

Berwald, L., Berichtigung zu der Abhandlung: „Untersuchung der Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grund des in ihnen herrschenden Parallelismus“ 176

Bernstein, F., und G. Doetsch, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. IV. Mitteilung. Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs. (Bolometerproblem) 89

Bernstein, S., Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus 551

Birkeland, R., Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen 566

Burstin, C., und W. Mayer, Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4 373

Doetsch, G., und F. Bernstein, Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung. IV. Mitteilung. Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs. (Bolometerproblem) 89

Fekete, M., Über den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmäßig beschränkt sind 324

Ferrar, W. L., Note on Monotonic Sequences 365

Fischer, E., Über die Cayleysche Eliminationsmethode 497

Grandjot, K., Untersuchungen über Dirichletsche Reihen 593

Grawe, D., Flächentreue Abbildungen der Flächen auf die Ebene 691

Hamel, G., Bemerkung zu einer Note der Herren Berwald und Frank über die Differentialgleichungen der Bahnkurven 775

Hausdorff, F., Beweis eines Satzes von Arzelà 135

Hopf, H., Über Mindestzahlen von Fixpunkten 762

Jacob, M., Über die Äquivalenz der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$ 672

Jarník, V., Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven 445

Jolles, St., Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung 177

Kaczmarz, St., Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen 99

Kaluza, Th., Struktur und Eigenschaften mehrfach monotoner Folgen 345

Kline, J. R., Concerning the Sum of a Countable Infinity of Mutually Exclusive Continua 687

Seite

Kloosterman, H. D., Über die Pole auf dem Rande des Konvergenzgebiets gewisser Potenzreihen 733
Kolmogoroff, A., et D. Menchoff, Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales 432
Kubota, T., Einige Sätze über Raumkurven dritter Ordnung 460
Landau, E., Über die Zetafunktion und die Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen 170
Lichtenstein, L., Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten 196
Mader, Ph., Über die Darstellung von Punktfunktionen im n-dimensionalen euklidischen Raum durch Ebenenintegrale 646
Mayer, W., und C. Burstin, Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4 373
Mayrhofer, K., Singuläre Erscheinungen bei Strahlenkongruenzen und Strahlenkomplexen 128
Mayrhofer, K., Rotationsflächen zweiter Ordnung als Träger kubischer Parabeln eines Strahlengewindes 683
Menchoff, D., et A. Kolmogoroff, Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales 432
Meyer, W. Fr., Über allgemeine Berührungseigenschaften elliptischer Normalkurven und elliptisch-lineare Konstruktionen von Restpunkten 744
Müller, M., Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen 619
Muschelišvili (Mouskhelichvili), N., Sur la solution du problème biharmonique pour l'aire extérieure à une ellipse 700
v. Sz. Nagy, J., Über ein topologisches Problem von Gauß 579
v. Neumann, J., Zur Hilbertschen Beweistheorie 1
Radó, T., Bemerkung über das Doppelintegral $\iint (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy$ 408
Radó, T., Zu einem Satze von S. Bernstein über Minimalflächen im Großen . . 559
Rajchman, A., Über eine paradoxe Eigenschaft gewisser bedingt konvergenter unendlicher Reihen 777
Remak, R., Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus der Geometrie der Zahlen 694
Schauder, J., Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen 47
Schauder, J., Bemerkungen zu meiner Arbeit „Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen" 417
Schouten, J. A., Über n-fache Orthogonalsysteme in V_n 706
Szilárd, K., Untersuchungen über die Grundlagen der Funktionentheorie . . . 653
Sengenhorst, P., Bemerkungen zu meiner Arbeit „Über Körper der Charakteristik p" in Band 24 (1925) dieser Zeitschrift, S. 1—39 495
Sidon, S., Über einen Satz von Herrn Bohr 731
Späth, H., Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung 442
Szegö, G., und A. Walfisz, Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. (Erste Abhandlung) 138

Seite

Szegö, G., und A. Walfisz, Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. (Zweite Abhandlung) 467

Takasu, T., Über konforme Verallgemeinerungen der Bertrandschen Kurven . . 157

Titchmarsh, E. C., Correction 496

Walfisz, A., Teilerprobleme 66

Walfisz, A., Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite Abhandlung 106

Walfisz, A., Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern II. . 487

Walfisz, A., und G. Szegö, Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. (Erste Abhandlung) 138

Walfisz, A., und G. Szegö, Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern. (Zweite Abhandlung) 467

Winternitz, A., Beweis für die Invarianz des ebenen Gebiets 165

Wolff, J., Über die Iteration derjenigen in einem Gebiete regulären Funktionen, deren Werte dem Gebiete angehören 125

van der Woude, W., Ein Problem der Affingeometrie 186

Zur Hilbertschen Beweistheorie.

Von

J. v. Neumann in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

I. Ein Ansatz zur Beweistheorie.

A. Der Formalismus.

1. Einleitendes zum Formalismus.
2. Die einfachen Zeichen.
3. Die Formeln.
4. Die Abänderungen.
5. Grundeigenschaften der Formeln.

B. Die Axiomatisierung der Mathematik.

1. Das Beweisen und die Widerspruchsfreiheit.
2. Die Form der Axiomenregel.
3. Die finiten Gruppen.
4. Die τ-Gruppe.
5. Die Funktionengruppe.
6. Die Definitionengruppe.

C. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit.

1. Wertung und Teilwertung.
2. Die Wertung von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III).
3. Die Reduktionen.
4. Vorbereitungen zur Behandlung der τ-Gruppe.
5. Durchführung der Reduktion.
6. Bemerkungen zur Definitionsgruppe.

II. Zusammenfassende und vergleichende Bemerkungen.

A. Die Herleitung der Mathematik.

B. Bemerkungen zur Arbeit von W. Ackermann.

1. Formalismus und Axiome.
2. Beweis der Widerspruchsfreiheit.

Einleitung.

Die vorliegende Arbeit enthält Untersuchungen über das Problem der Widerspruchsfreiheit der Mathematik. Über diesen Fragenkomplex, der von D. Hilbert angeregt und weitgehend ausgebildet wurde, sind bereits mehrere Publikationen erschienen, insbesondere die Arbeiten von D. Hilbert selbst, sowie die von P. Bernays und W. Ackermann[1]). Es soll in dieser Arbeit auch versucht werden, insbesondere gegenüber der letzteren Stellung zu nehmen.

Ohne auf die prinzipielle Begründung der Hilbertschen Theorie der Mathematik, der „Beweistheorie" einzugehen (dieselbe ist in den zitierten Arbeiten D. Hilberts eingehend geschildert), wollen wir einige wesentliche Leitgedanken der Beweistheorie kurz anführen.

I. In erster Linie wird der Nachweis der Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik angestrebt. Unter „klassischer Mathematik" wird dabei die Mathematik in demjenigen Sinne verstanden, wie sie bis zum Auftreten der Kritiker der Mengenlehre allgemein anerkannt war. Alle mengentheoretischen Methoden gehören im wesentlichen zu ihr, nicht aber die eigentliche abstrakte Mengenlehre. Sie kennt zunächst keine höheren Mächtigkeiten, als das Kontinuum. Ob das Auswahlprinzip (insbesondere die Wohlordenbarkeit des Kontinuums und die übrigen von ihm abhängenden mathematischen Sätze) zu ihr zu zählen ist oder nicht, bleibe einstweilen dahingestellt.

II. Zu diesem Zwecke muß der ganze Aussagen- und Beweisapparat der klassischen Mathematik absolut streng formalisiert werden. Der Formalismus darf keinesfalls zu eng sein.

III. Sodann muß die Widerspruchsfreiheit dieses Systems nachgewiesen werden, d. h. es muß gezeigt werden, daß gewisse Aussagen „Formeln" innerhalb des beschriebenen Formalismus niemals „bewiesen" werden können.

IV. Hierbei muß stets scharf zwischen zwei verschiedenen Arten des „Beweisens" unterschieden werden: Dem formalistischen („mathematischen") Beweisen innerhalb des formalen Systems, und dem inhaltlichen („metamathematischen") Beweisen über das System. Während das erstere ein willkürlich definiertes logisches Spiel ist (das freilich mit der klassischen Mathematik weitgehend analog sein muß), ist das letztere eine Verkettung

---

[1]) D. Hilbert, Neubegründung der Mathematik. I. [Abhandlungen des Math. Sem. der Hamb. Univ. 1 (1923), S. 157–175]. Die logischen Grundlagen der Mathematik [Math. Annalen 88 (1923), S. 151–165]. P. Bernays, Erwiderung auf die Note von Herrn Aloys Müller „Über Zahlen als Zeichen" [Math. Annalen 90 (1923), S. 159–163]. W. Ackermann, Begründung des Tertium non datur mittels der Hilbertschen Theorie der Widerspruchfreiheit [Math. Annalen 92 (1924), S. 1–35].

unmittelbar evidenter inhaltlicher Einsichten. Dieses „inhaltliche Beweisen" muß also ganz im Sinne der Brouwer-Weylschen intuitionistischen Logik verlaufen: Die Beweistheorie soll sozusagen auf intuitionistischer Basis die klassische Mathematik aufbauen und den strikten Intuitionismus so ad absurdum führen.

Im ersten Teile sollen unsere eigenen Ansätze und Ergebnisse in der Beweistheorie mitgeteilt werden, während im zweiten eine Skizze der Anwendung auf die Mathematik, sowie Vergleiche mit den Ergebnissen von W. Ackermann enthalten sind.

I. Ein Ansatz zur Beweistheorie.

A. Der Formalismus.

1. Einleitendes zum Formalismus.

Die in der Mathematik üblichen Begriffsbildungen können wir in die folgenden drei Klassen einteilen:

I. Positive ganze Zahlen.

II. Funktionen verschiedener Stufe. Die ersten Stufen sind die der Funktionen von 1, 2, 3, ... Argumenten, die positive ganze Zahlen durchlaufen. Sodann sind Funktionen denkbar, die 1, 2, 3, ... Argumente haben, deren jedes die positiven ganzen Zahlen durchläuft, oder die Funktionen einer anderen, niedrigeren, Stufe. (Die Werte der Funktionen sind dabei durchweg als positive ganze Zahlen gedacht.)

III. Aussagen.

Die reellen Zahlen müßten z. B. als zur Klasse II gehörend betrachtet werden: Es sind Funktionen eines Arguments, welches die positiven ganzen Zahlen durchläuft. (Wir müßten die reelle Zahl zu diesem Zwecke statt durch ihren Dedekindschen Schnitt etwa durch die folgende Funktion f darstellen: $f(n) = 1$, wenn ϱ_n zur unteren, $f(n) = 0$, wenn ϱ_n zur oberen Schnitthälfte gehört. Dabei ist $\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3, \ldots$ irgendeine Abzählung aller rationalen Zahlen.)

Dieser Einteilung entsprechend klassifiziert auch Hilbert (und in Anschluß an ihn W. Ackermann) die Zeichenkombinationen, welche in seinem Formalismus eine Rolle spielen, in die drei Klassen der Funktionale, Funktionen (nach Stufen unterschieden) und Formeln.

Wir werden im folgenden diese Distinktion nicht machen, sondern alle Zeichenkombinationen, die in Betracht kommen, einheitlich betrachten. Wir nennen sie sämtlich Formeln. Dies verursacht zwar scheinbar eine gewisse Konfusion (logische Operationen dürfen auch auf Zahlen angewandt

werden, und ähnliches), die indessen unbedenklich ist; denn diese formale Vereinfachung hat zwar die Folge, daß eine Reihe von offenbar „sinnlosen" Formeln gebildet werden kann, aber diese „sinnlosen" Formeln stören weder den formalen Ausbau des Systems, noch die Untersuchung der Widerspruchfreiheit. Wenn man will, so ist hier ein gewisser Ballast mitgeschleppt, aber jedenfalls, wie sich im Laufe der Entwicklungen klar zeigen wird, ein völlig unbedenklicher Ballast.

Auf diesem Gegensatz unseres Formalismus zum Hilbertschen gehen wir noch im II. Teile ein.

Noch eine einleitende Bemerkung, ehe wir auf die Beschreibung des Formalismus übergehen. Es ist nicht vermeidbar, den Begriff der positiven ganzen Zahl auch inhaltlich einzuführen. Es ist nicht möglich, die Beweistheorie aufzubauen, ohne daß die positive ganze Zahl und alle ihre intuitionistisch, d. h. inhaltlich, ableitbaren Eigenschaften schon a priori zur Verfügung stehen. Wenn also im folgenden in inhaltlichen Ausführungen von „Zahlen" schlechthin die Rede sein wird, so hat man darunter stets den intuitiv-anschaulichen Begriff der positiven ganzen Zahl (repräsentiert etwa durch ihre dekadische Entwicklung) zu verstehen.

Es hat wohl etwas Verwirrendes an sich, daß dieselben Begriffe in zwei verschiedenen Erscheinungsformen auftreten: einmal inhaltlich und einmal formalistisch. Indessen ist dies bei allen Begriffen, die auch für den Intuitionisten sinnvoll sind, die also der formalistischen Begründung gar nicht bedürfen, eine Selbstverständlichkeit. Dementsprechend treten außer dem Begriffe der positiven ganzen Zahl, z. B. auch alle logischen Relationen mehrfach auf, und man muß ihre verschiedenen Erscheinungsformen überall streng auseinanderhalten.

2. Die einfachen Zeichen.

Die einfachen Zeichen gehören zu den fünf folgenden Klassen:

1. Die Variablen x_m, wobei an der Stelle von m irgendeine Zahl steht.
2. Die Konstanten C_m, wobei an der Stelle von m irgendeine Zahl steht.
3. Die Operationen $O_m^{(n)}$, wobei an der Stelle von m, n irgendwelche Zahlen stehen.
4. Die Abstraktionen A_m, wobei an der Stelle von m irgendeine Zahl steht.
5. Die Klammern (und), sowie das Komma , .

Allen diesen Zeichen ist, da sie zum Formalismus gehören, prinzipiell überhaupt kein Sinn zuzuschreiben. Sie bedeuten nichts, sie vertreten nichts, sie haben nicht mehr Sinn, wie etwa die Figuren auf einem Schachbrett. Aber sie stehen dennoch in einer weitgehenden Analogie zu den

Begriffsbildungen der klassischen Logik und Mathematik: denn diese sollen ja durch den auf unsere Zeichen aufgebauten Formalismus ersetzt werden. Wir wollen in den nun folgenden Zeilen bei jeder der Klassen 1 bis 5 diese Analogien entwickeln, und dabei kurz von der „Bedeutung" der Zeichen sprechen. Man muß sich aber dabei stets vor Augen halten: Mit dieser „Bedeutung" der Zeichen sind immer bloß diejenigen Begriffe der klassischen Logik und Mathematik gemeint, die die Zeichen auf anderer Basis zu ersetzen berufen sind; im Prinzip sind und bleiben alle unsere Zeichen sinnlos.

Die Klasse 1 bedarf keiner Erklärung: Der (schwer erschöpfend zu beschreibende) Begriff der Variable ist jedermann aus der klassischen Mathematik geläufig.

Die Klasse 2 umfaßt die Zeichen für fest gegebene Begriffe, die auch allein, ohne Verknüpfung mit anderen, benützt werden können, wie z. B. das Zeichen 0.

Die Klasse 3 umfaßt die Zeichen für solche (ebenfalls fest gegebene) Begriffe, die nur in Verknüpfung mit anderen benützt werden dürfen Hierher gehören die logischen Relationen, wie die „Folge" $\rightarrow$, die „Negation" $\sim$, das „oder" $\vee$, das „und" $\&$; ferner die mathematischen Operationen der „Addition" $+$, der „Multiplikation" $\cdot$; dann auch Relationen gemischten Charakters, wie die „Gleichheit" $=$; usw. Der obere Index (die an Stelle von n stehende Zahl in $O_m^{(n)}$) gibt die Anzahl der Begriffe an, auf die die gegebene Operation anzuwenden ist. (Sie ist z. B. für $\sim$ gleich 1, und für $\rightarrow$, $\vee$, $\&$, $+$, $\cdot$, $=$ gleich 2.)

Die Klasse 4 umfaßt Zeichen, deren Bedeutung mit dem Wesen de „Variablen" aufs engste verknüpft ist. Die Bedeutung dieser Zeichen können wir uns am besten durch Analogien aus der klassischen Logik und Mathematik klarmachen. Nehmen wir eine Aussage, in der die Variable x vorkommt, etwa $\mathfrak{A}(x)$: „x ist rot". Auf diese Aussage wollen wir nun die logische Operation $\Sigma^{(x)}$ „es gibt ein x mit der Eigenschaft: ..." anwenden. Es resultiert die Aussage $\Sigma^{(x)}\mathfrak{A}(x)$: „Es gibt ein x mit der Eigenschaft: x ist rot." Man beachte: in $\mathfrak{A}(x)$ kam die Variable x offenbar derart vor, daß man sie substituieren konnte, es hatte einen Sinn aus $\mathfrak{A}(x)$ Aussagen, wie $\mathfrak{A}$ (Tisch), $\mathfrak{A}$ (Stuhl), usw. zu bilden. Bei $\Sigma^{(x)}\mathfrak{A}(x)$ ist dies nicht mehr der Fall: Es ist vollkommen unsinnig, hier für x konkrete Dinge substituieren zu wollen. Es kommt wesentlich auf den Charakter von x als *Variable* an.

Ebenso können wir die Zahl $\mathfrak{A}(x)$: $2x^2+1$ bilden, und hierauf die Operation $\Sigma^{(x)}$: $\int_0^1 \ldots dx$ anwenden. Es entsteht die Zahl $\Sigma^{(x)}\mathfrak{A}(x)$:

$\int_0^1 (2x^2+1)\,dx$. Man sieht wieder: Während man gewiß berechtigt ist, aus $2x^2+1$ Zahlen, wie $2\cdot 0^2+1$, $2\cdot 5^2+1$, $2\cdot\pi^2+1$ zu bilden, ist es unsinnig und unzulässig in $\int_0^1 (2x^2+1)\,dx$ als Variable x durch feste Zahlen, wie 0, 5, π substituieren zu wollen.

Wir sehen also: es gibt sowohl in der Logik, als auch in der Mathematik gewisse fundamentale Prozesse, die von dem gewöhnlichen Typus der Relationen und Operationen (wie etwa $\rightarrow$, $=$, $+$) ganz wesentlich abweichen, weil sie Variablen gegenüber ein ganz spezielles Verhalten zeigen. Zu dieser Gruppe gehören Begriffe wie: „gültig für alle x“, „gültig für irgendein x“, „integriert zwischen den Grenzen 0 und 1 in bezug auf x“, d. h. $\int_0^1 \ldots dx$, usw. Sie haben die gemeinsame und charakteristische Eigenschaft, eine gewisse Variable (in unseren Beispielen x) unsubstituierbar zu machen; die Variable, die vorher noch da war, wird sozusagen wegabstrahiert. (Man hüte sich davor, abstrahierende Ausdrücke, wie etwa $\int_0^1 \ldots dx$ mit gewöhnlichen Operationen, aus denen x identisch herausfällt, wie $\frac{x}{x}$, zu verwechseln. In $\frac{x}{x}$ ist x substituierbar, wenn auch der Wert stets derselbe ist: wir können sehr wohl $\frac{1}{1}$, $\frac{\pi}{\pi}$ usw. bilden. In $\int_0^1 (2x^2+1)\,dx$ dagegen ist es unsubstituierbar). Diese Eigenschaft soll durch den Namen „Abstraktion“, dem wir den Zeichen der Klasse 4 geben, angedeutet werden.

Die Klasse 5 bedarf keiner Erklärung: Ihre Zeichen sind (ebenso wie in der klassischen Mathematik) nur dazu da, um den Bau der auftretenden komplizierten Kombinationen der übrigen Zeichen eindeutig und durchsichtig zu machen.

Zum Schluß sei noch eines bemerkt. Da wir inhaltlich-logische Überlegungen anstellen werden, müssen wir bei denselben auch Zeichen benützen. Diese Zeichen (so z. B. die Zeichen m, n für Zahlen in 1, 2, 3, 4) dürfen keinesfalls mit den soeben beschriebenen „einfachen Zeichen“ verwechselt werden. Denn diese inhaltlichen Zeichen sind nichts anderes, als die gewöhnlichen abkürzenden Symbole, die „Sinn“ haben, wirklich etwas „bedeuten“, und die in jeder Beschreibung eines einigermaßen komplizierten Tatbestandes unvermeidbar sind.

3. Die Formeln.

Den Gegenstand unserer formalistischen Mathematik werden gewisse Kombinationen der einfachen Zeichen bilden, die wir Formeln nennen und im folgenden definieren werden.

Wir definieren die Formeln induktiv, demgemäß besteht die Definition aus zwei Teilen:

I. a) Jede Variable x_m (an Stelle von m steht eine Zahl) ist eine Formel.

I. b) Jede Konstante C_m (an Stelle von m steht eine Zahl) ist eine Formel.

II. a) $O_m^{(n)}$ (an Stelle von m, n stehen Zahlen) sei eine Operation. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien irgendwelche Kombinationen der einfachen Zeichen (in der Anzahl n), die bereits als Formeln erkannt sind.

Dann ist auch $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ eine Formel.

II. b) A_m (an Stelle von m steht eine Zahl) sei eine Abstraktion, x_n (an Stelle von n steht eine Zahl) eine Variable. a sei eine Kombination der einfachen Zeichen, die bereits als Formel erkannt ist.

Dann ist auch $A_m^{(x_n)}(a)$ eine Formel.

Diese Definition ist ihrer Natur nach unmittelbar bloß dazu geeignet, die Formeln sukzessiv herzustellen; aber keineswegs dazu, von irgendeiner angegebenen Kombination a der einfachen Zeichen sofort zu entscheiden, ob sie Formel ist oder nicht. Wir müssen dies letztere vielmehr streng beweisen, das bringt der intuitionistisch-finite Charakter unserer „inhaltlichen" Überlegungen mit sich. Der genannte Beweis gelingt aber infolge der speziellen Struktur der Definition I, II (bei der ebenfalls induktiven Definition der „Beweisbarkeit" in § I B 1 ist dies nicht der Fall!). Wir können sogar den folgenden Satz beweisen:

Es liege irgendeine Kombination a der einfachen Zeichen vor. Wir können stets entscheiden, ob a Formel ist, oder nicht. Im ersteren Falle konnten wir auch angeben, durch welche Reihe von sukzessiven Anwendungen der Definitionsprinzipien I und II a hergestellt werden kann. Es gibt übrigens (bis auf unwesentliche Reihenfolgenänderungen) nur einen einzigen Weg, um a auf Grund von I, II herzustellen.

Dieser Satz ist von ganz fundamentaler Bedeutung; einen Formalismus, in dem er nicht erfüllt wäre, würde jedermann als unverständlich und unbrauchbar verwerfen. Wir gehen auf seinen ganz trivialen Beweis hier nicht ein; die Eigenschaft von I, II, auf die es dabei ankommt, ist offenbar die folgende: Wenn auf Grund von II aus alten Formeln und einfachen Zeichen eine neue Formel gebildet wird, so kommen die alten in der neuen noch vor, man kann also stets die (endlich vielen) Arten, auf die eine Formel überhaupt entstehen konnte, vollständig übersehen.

4. Die Abänderungen.

Der in den §§ 2, 3 beschriebene Formalismus könnte ohne weiteres für alle unsere Zwecke benützt werden. Indessen hat er den Fehler, daß seine „einfachen Zeichen" zu sehr von den üblichen Symbolen der Mathematik abweichen. Es wäre sehr unangenehm, wenn man für 0 das Zeichen C_1, für $=$ das Zeichen $O_1^{(2)}$, für „und" das Zeichen $O_2^{(2)}$ benützen müßte, so daß z. B. die Aussage $0 = 0$ die Form $O_1^{(2)}(C_1, C_1)$ annehmen würde. Aus diesem Gesichtspunkte soll noch eine Korrektur an unserer Symbolik vorgenommen werden. Dies erfolgt in drei Schritten, und zwar folgendermaßen:

I. Wir behalten uns das Recht vor, im folgenden, sobald es uns gefällt, Erklärungen von folgendem Inhalt zu machen: „Die Konstante C_m (an Stelle von m steht eine Zahl) wird abgeändert in Γ." Dabei kann für Γ ein beliebiges Symbol gesetzt werden. Es muß dann in allen Formeln die Konstante C_m stets durch Γ ersetzt werden.

Dasselbe können wir anstatt mit einer Konstante C_m auch mit mehreren zugleich durchführen (eventuell auch mit einer ganzen unendlichen Folge), mit entsprechend mehr Symbolen Γ. Ferner dürfen wir an Stelle von Konstanten C_m auch Abstraktionen A_m auf dieselbe Art abändern.

Die folgenden Bedingungen müssen aber stets eingehalten werden: Dieselbe Konstante, bzw. Abstraktion, darf nur einmal abgeändert werden. (Natürlich darf aber ihre Abänderung wieder abgeändert werden, usw.) Zwei verschiedene Konstanten bzw. Abstraktionen dürfen niemals in dasselbe Zeichen Γ abgeändert werden. Die Zeichen Γ, in die abgeändert wird, dürfen auch nicht ursprüngliche einfache Zeichen des § 2 sein.

II. Wir behalten uns das Recht vor, im folgenden, sobald es uns gefällt, Erklärungen von folgendem Inhalt zu machen: „Die Operation $O_m^{(n)}$ (an Stelle von m, n stehen Zahlen) wird derart abgeändert, daß $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ übergeht in $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, oder $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Gamma$ oder $(a_1 \Gamma_1 a_2 \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1} a_n)$. Dabei können für Γ bzw. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ beliebige Symbole gesetzt werden. Es muß in allen Formeln, bei deren Bildung IIa mit Verwendung von $O_m^{(n)}$ benützt wurde, bei jedem solchen Schritte an Stelle von $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ stets $\Gamma(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ bzw. $(a_1, a_2, \ldots, a_n)\Gamma$, bzw. $(a_1 \Gamma_1 a_2 \Gamma_2 \ldots \Gamma_{n-1} a_n)$ geschrieben werden.

Dasselbe können wir statt mit einer Operation $O_m^{(n)}$ auch mit mehreren zugleich (eventuell einer Folge) durchführen.

Die folgenden Bedingungen müssen aber auch hier stets eingehalten werden: Dieselbe Operation darf nur einmal abgeändert werden (das Abändern der Abänderung ist natürlich auch hier zulässig). Zwei ver-

schiedene Operationen dürfen niemals auf die gleiche Art abgeändert werden. Die Zeichen Γ bsw. $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{n-1}$ dürfen nicht ursprüngliche einfache Zeichen des § 3 sein.

III. Der Gebrauch der Klammern ist noch etwas zu modifizieren:

a) Eine für sich alleinstehende Formel (a) wird kürzer a (ohne Klammern) geschrieben. Natürlich müssen die Klammern wieder angesetzt werden, wenn a auf Grund von II in § 4 zum Aufbau neuer Formeln benützt wird.

b) Von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Klammerpaaren kann eines stets fortgelassen werden: statt $((a))$ schreiben wir (a). Ein Klammerpaar, in dem bloß eine Konstante oder Variable steht, wird ebenfalls fortgelassen, z. B. statt (0) kommt 0. (Diese Klammern brauchen aber auch dann nicht wieder angeschrieben zu werden, wenn die Formel zur Bildung von neuen benützt wird.)

c) Bei Operationen $O_m^{(1)}(a_1)$ lassen wir die Klammern fort: statt $O_m^{(1)}(a_1)$ schreiben wir $O_m^{(1)}a_1$. Ebenso verfahren wir, wenn $O_m^{(1)}(a_1)$ in $\Gamma(a_1)$ abgeändert wurde: statt $\Gamma(a_1)$ also Γa_1; nicht aber wenn es in $(a_1)\Gamma$ abgeändert wurde. (Auch diese Klammern fallen definitiv fort.)

Wir müssen nun einsehen, daß der Satz in § 3 auch nach solchen Abänderungen (die Abänderungen in III a), b), c) sind obligatorisch, die die in I, II fakultativ) richtig bleibt. Das ist in der Tat der Fall, die hierzu erforderlichen leichten Überlegungen können wir übergehen.

5. Grundeigenschaften der Formeln.

Wir stellen nun diejenigen Begriffe und Definitionen zusammen, mit denen wir bei der Untersuchung der Formeln stets zu tun haben werden.

a sei eine Formel. Wir können dann die (einzig mögliche) Herstellung des a auf Grund von I, II in § 3 angeben, und alle intermediären Formeln, über die diese Herstellung führt. Dies sind sämtliche Teile der Zeichenkombination a, welche auch den Formelcharakter besitzen. Wir nennen sie, inklusive a, die *Teilformeln* von a; und exklusive a die *echten Teilformeln* von a.

Wenn eine Stelle von a im Inneren einer Teilformel von a liegt, welche die Form $A^{(x_p)}(b)$ hat, so sagen wir: Die Variable x_p ist an dieser Stelle gebunden. Eine Variable ist an jeder Stelle frei, an der sie nicht gebunden ist. Die Variable x_p kommt in a frei vor, wenn es Stellen von a gibt, an denen x_p steht und x_p frei ist. Wenn b eine Teilformel von a ist, und jede Variable, die in b frei vorkommt, an denjenigen Stellen, wo sie in b frei ist, auch in a frei ist, so sagen wir: b ist eine freie Teilformel von a.

Eine Formel a, in der überhaupt keine Variable x_p frei vorkommt, ist eine Normalformel. Die freien Teilformeln einer Normalformel sind mit ihren normalen Teilformeln identisch.

In der Beweistheorie wird es sich stets nur um Normalformeln handeln. Die Herstellung derselben kann zwar über nicht normale Formeln verlaufen, aber nur sie können Gegenstand des „Beweisens" sein. Dies hat seinen Grund darin, daß eine Aussage der klassischen Logik und Mathematik auch nur dann einen Sinn haben kann, wenn alle ihre Variablen substituiert oder „abstrahiert" (vgl. § 2) sind. Wenn z. B. in einem mathematischen Satze noch freie Variablen $x, y, \ldots$ usw. vorkommen, so ist das ja immer so zu verstehen: „Gültig für alle $x, y, \ldots$", wodurch die $x, y, \ldots$ „abstrahiert" werden.

Schließlich definieren wir noch das Substituieren. a, b seien Formeln, x_p eine Variable. Wenn wir an allen Stellen von a, an denen x_p steht und x_p frei ist, x_p durch die Formel b ersetzen, so entsteht eine Kombination der einfachen Zeichen, die offenbar auch eine Formel ist. Diese Formel nennen wir $\mathrm{Subst}\binom{x_p}{b} a$. Diese Prozedur, das Substituieren, darf unter keinen Umständen mit den formalistischen Operationen (Klasse 3 in § 2) verwechselt werden, denn sie ist ein inhaltlicher Vorgang! (Das Zeichen für das Substituieren „bedeutet" etwas). Übrigens werden wir auch die mehrfache Substitution $\mathrm{Subst}\binom{x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}}{b_1, b_2, \ldots, b_n} a$ benützen: Sie vertritt

$$\mathrm{Subst}\binom{x_{p_1}}{b_1}\left(\mathrm{Subst}\binom{x_{p_2}}{b_2}\left(\ldots\left(\mathrm{Subst}\binom{x_{p_n}}{b_n} a\right)\ldots\right)\right),$$

wobei die $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}$ als voneinander verschieden vorausgesetzt werden.

B. Die Axiomatisierung der Mathematik.

1. Das Beweisen und die Widerspruchsfreiheit.

Nachdem in den Paragraphen des Teiles A der Formalismus entwickelt wurde, können wir den nächsten Schritt vollziehen und den eigentlichen Kern der Mathematik, das Beweisverfahren, beschreiben.

Wir nehmen erstens gewisse Abänderungen vor: Wir ändern die Operationen $O_1^{(1)}(a_1)$ und $O_1^{(2)}(a_1, a_2)$ in $\sim a_1$ bzw. $a_1 \to a_2$ ab. (Diese Operationen entsprechen den logischen Operationen der „Negation" und der „Folge").

Nun sind wir in der Lage, zu definieren, was wir unter Beweisen und unter Widerspruchfreiheit verstehen.

Es sei ein bestimmtes Verfahren $\mathfrak{R}$ gegeben, auf Grund dessen gewisse Normalformeln gebildet werden können. Dieses Verfahren $\mathfrak{R}$ nennen

wir die Axiomenregel, und die auf Grund von $\mathfrak{R}$ gebildeten Formeln die Axiome.

Die Axiomenregel, die wir tatsächlich anwenden werden (d. h. die Axiomenregel unserer formalistischen Mathematik), wird so beschaffen sein, daß sie von jeder gegebenen Normalformel zu entscheiden erlaubt, ob sie Axiom ist oder nicht, d. h. ob es möglich ist, sie mit Hilfe von $\mathfrak{R}$ zu bilden. Indessen ist dieser Umstand hier belanglos.

Wenn nun eine Axiomenregel $\mathfrak{R}$ gegeben ist, so definieren wir die Beweisbarkeit von Normalformeln folgendermaßen (induktiv):

I. Wenn die Normalformel a Axiom ist, so ist sie beweisbar.

II. Wenn die zwei Normalformeln a und $a \rightarrow b$ bereits als beweisbar erkannt sind, so ist auch die Normalformel b beweisbar.

Man beachte: Wie bei der Definition der Formel in § I A 3, so haben wir auch hier eine induktive Definition vor uns. Dieselbe ermöglicht nur das Aufstellen der beweisbaren Normalformeln, nicht aber unbedingt die Entscheidung, ob irgendeine gegebene Normalformel beweisbar ist. Möglicherweise mag es gelingen, auf Grund der Definition ein Verfahren ausfindig zu machen, welches dies leistet; aber das hängt von den speziellen Eigenschaften der Definition ab. Wir sahen z. B., daß es bei der Definition der Formel möglich war. Bei der vorliegenden Definition ist es zunächst unbestimmt, da die Axiomenregel noch nicht angegeben ist. Es könnte ja sein, daß bereits für die Axiomenregel diese Entscheidbarkeit nicht besteht. Aber auch, wenn sie besteht (wie es bei der im folgenden zu benützenden Axiomenregel der Fall sein wird), so ist damit noch gar nichts ausgemacht. Denn der Teil II der Definition ist hier von wesentlich anderem Charakter, als er es bei der Definition der Formel war. Dort entstand aus $O_m^{(n)}, a_1, a_2, \ldots, a_n$ die Formel $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, oder aus A_m, x_p, a die Formel $A_m^{(x_p)}(a)$; hier entsteht aus $a, a \rightarrow b$ die beweisbare Normalformel b. Während dort im Neuen alles Alte mitenthalten war, ist es hier durchaus nicht der Fall: b selbst steht mit a, das bei seiner Herstellung (seinem „Beweise") benützt wurde, in gar keiner Beziehung, und mit $a \rightarrow b$ auch nur in einer teilweisen. Man kann dem b gar nicht ansehen, aus welchen $a, a \rightarrow b$ es gebildet („bewiesen") wurde.

Es scheint also, daß es keinen Weg gibt, um das allgemeine Entscheidungskriterium dafür, ob eine gegebene Normalformel a beweisbar ist, aufzufinden. (Nachweisen können wir freilich gegenwärtig nichts. Es ist auch gar kein Anhaltspunkt dafür vorhanden, wie ein solcher Unentscheidbarkeitsbeweis zu führen wäre.) Diese Ungewißheit hindert uns aber nicht daran, festzustellen: Heute ist es nicht allgemein zu entscheiden, ob irgendeine gegebene Normalformel a (bei der im folgenden zu beschreibenden

Axiomenregel) beweisbar ist oder nicht. Und die Unentscheidbarkeit ist sogar die Conditio sine qua non dafür, daß es überhaupt einen Sinn habe mit den heutigen heuristischen Methoden Mathematik zu treiben. An dem Tage, an dem die Unentscheidbarkeit aufhörte, würde auch die Mathematik im heutigen Sinne aufhören zu existieren; an ihre Stelle würde eine absolut mechanische Vorschrift treten, mit deren Hilfe jedermann von jeder gegebenen Aussage entscheiden könnte, ob diese bewiesen werden kann oder nicht. —

Wir müssen uns also auf den Standpunkt stellen: Es ist allgemein unentscheidbar, ob eine gegebene Normalformel beweisbar ist oder nicht. Das einzige, was wir tun können, ist, mit Hilfe der Definition I, II beliebig viele beweisbare Normalformeln aufzustellen. (So verfährt, allerdings von gewissen heuristischen Gesichtspunkten geleitet, die Mathematik.) Auf diese Art können wir von vielen Normalformeln feststellen, daß sie beweisbar sind. Aber auf diesem Wege kann uns niemals die Feststellung gelingen, daß eine Normalformel nicht beweisbar ist[2]). Und trotzdem wäre auch dieses sehr erwünscht. Denn dann hätten wir wenigstens einen Weg, die „Menge" der beweisbaren Normalformeln etwas genauer zu umgrenzen. Die ganz präzise Begrenzung fällt ja mit der allgemeinen Entscheidbarkeit zusammen fort und die Definition liefert unmittelbar bloß untere Schranken für den Umfang dieser Menge. Wie kann das Auffinden oberer Schranken gelingen?

An diesem Punkte können wir uns dem Problem der Widerspruchfreiheit zuwenden. Wir nennen eine Axiomenregel $\mathfrak{R}$ widerspruchfrei, wenn wir von ihr gezeigt haben, daß niemals zwei Formeln a und $\sim a$ gleichzeitig für dieselbe beweisbar sein können. (Diese Definition ist zwar dem Wortlaut nach von der, die Hilbert und auch W. Ackermann benützt, verschieden; man sieht indessen leicht, daß beide gleichbedeutend sind[3]).) Wenn eine Axiomenregel $\mathfrak{R}$ als widerspruchsfrei erkannt ist, so ist es auf demselben Wege, auf dem Normalformeln als beweisbar erkannt werden können, auch möglich, die Unbeweisbarkeit einzusehen. Um zu zeigen, daß a unbeweisbar ist, genügt es ja dann, die Beweisbarkeit von $\sim a$ einzusehen. (Freilich braucht beides gar nicht gleichbedeutend zu sein.) Damit ist ein Weg zur Bildung sowohl oberer, als unterer Grenzen des Umfanges der „Menge" der beweisbaren Normalformeln gegeben.

---

[2]) In der intuitionistischen Terminologie werden Mengen, deren Umfang durch induktive Konstruktionen beschrieben ist, während man nicht stets entscheiden kann, ob ein gegebenes Ding ihnen angehört, als *unabtrennbar* (von ihrer Komplementären) bezeichnet.

[3]) Vgl. die in Fußnote [1]) zitierten Arbeiten von Hilbert und Ackermann, sowie die Kommentare zur Gruppe I in § B. 3.

Natürlich ist damit gar nicht gesagt, daß stets eine der beiden Normalformeln a oder $\sim a$ beweisbar ist. Die Widerspruchsfreiheit bedeutet bloß folgendes: Von den vier Fällen:

I. die Beweisbarkeit von a ist noch nicht erwiesen und die von $\sim a$ auch nicht;

II. die Beweisbarkeit von a ist bereits erwiesen, die von $\sim a$ noch nicht;

III. die Beweisbarkeit von $\sim a$ ist bereits erwiesen, die von a noch nicht;

IV. sowohl die Beweisbarkeit von a, als auch die von $\sim a$ ist bereits erwiesen

kann IV. niemals eintreten, wohl aber I., II. und III. Die Einteilung ist gleitend: Zunächst gehört jedes a zu I. Es kann näher untersucht, als zu II. oder III. gehörend erkannt werden, ja solange die Widerspruchfreiheit nicht feststeht, könnte es schließlich auch nach IV. kommen. Etwas anfangen kann man nur mit solchen a, die im Falle II. oder III. sind: solche „Probleme" sind eben bejahend oder verneinend gelöst. Die Widerspruchfreiheit garantiert nun, daß eine in II. oder III. angelangte Normalformel endgültig zur Ruhe gekommen ist und niemals nach IV. weitergeschoben werden kann. Sie sagt aber nichts darüber aus, ob ein a aus I. jemals nach II. oder III. geraten wird: dies wäre allgemein nur auf Grund der „allgemeinen Entscheidbarkeit" zu machen. (Es würde sogar noch wesentlich über die allgemeine Entscheidbarkeit hinausgehen.) Die Mathematik versucht diesen Übergang I. → II. oder I. → III. von Fall zu Fall für gewisse Normalformeln durchzuführen. — Nach diesen allgemeinen Bemerkungen gehen wir auf die Beschreibung der Axiomenregel über.

2. Die Form der Axiomenregel.

In den folgenden Paragraphen soll die spezielle Axiomenregel, die uns beschäftigen wird, beschrieben und erläutert werden. Wir nennen sie die mathematische Axiomenregel und bezeichnen sie mit $\mathfrak{MR}$. $\mathfrak{MR}$ hat die folgende Form:

Es werden gewisse Schemata angegeben, d. h. gewisse Kombinationen von einfachen Zeichen, mit den Zeichen $a, b, c, \ldots$ und $x_p, x_q, \ldots$, sowie Subst derart, daß wenn wir für $a, b, c, \ldots$ Formeln einsetzen und für $x_p, x_q, \ldots$ Variable (unter Einhaltung der für $a, b, c, \ldots; x_p, x_q, \ldots$ jeweils zu formulierenden Bedingungen) und dann die Subst ausführen, eine Normalformel entsteht.

Diese im folgenden anzugebenden Schemata sind die Axiomenschemata. Die Normalformeln, die so entstehen, daß in einem Axiomenschema

$a, b, c, \ldots; x_p, x_q, \ldots$ auf die oben beschriebene Art ersetzt und die Subst ausgeführt werden, sind die Axiome.

Es gilt nun, diese Axiomenschemata anzugeben. Das soll in den §§ I. B. 3. bis 6. geschehen. Dabei werden wir, wie bei den einfachen Zeichen in § I A 2, die „Bedeutung" der Axiomenschemata auseinandersetzen. Doch gelten dieselben prinzipiellen Vorbehalte wie dort: Im Prinzip sind die Axiomenschemata, ebenso wie die einfachen Zeichen willkürlich, rein formal, sinn- und bedeutungslos; von einer „Bedeutung" kann nur in dem Sinne die Rede sein, daß diejenigen Begriffe der klassischen Logik und Mathematik, die sie ersetzen sollen, hervorgehoben werden.

3. Die finiten Gruppen.

Wir teilen die Axiomenschemata in Gruppen ein, und zwar sind es deren sechs. In diesem Paragraphen sollen die ersten drei Gruppen behandelt werden, die wir zusammen als finite Gruppen bezeichnen.

I. Gruppe (Logik).

Für a, b, c sind in den Schemen Normalformeln einzusetzen

1. $a \to (b \to a)$,
2. $(a \to (a \to b)) \to (a \to b)$,
3. $(a \to (b \to c)) \to (b \to (a \to c))$,
4. $(a \to b) \to ((b \to c) \to (a \to c))$,
5. $a \to (\sim a \to b)$,
6. $(a \to b) \to ((\sim a \to b) \to b)$.

Diese Axiomenschemata ermöglichen den Aufbau der reinen formalen Logik, sie sind wenig tiefgehend und darum ziemlich willkürlich. Es sind allgemein einleuchtende logische Sätze, in hinreichender Anzahl angeführt, damit aus ihnen mit Hilfe des zur Definition der Beweisbarkeit gehörigen Schlußprinzips II (§ I B 1) jeder rein logische Satz, in dem keine Kollektivbegriffe vorkommen, herleitbar sei. Die Zusammenstellung dieser Axiomenschemata ist dieselbe wie bei Hilbert oder W. Ackermann. Ihre Bedeutung ist so klar, daß sich eine nähere Diskussion wohl erübrigt[4]).

Es sei nur eine Eigenschaft des Axiomenschemas

$$5. \quad a \to (\sim a \to b)$$

hervorgehoben. Wenn wir zwei Formeln a, $\sim a$ bewiesen haben, so ermöglicht 5. den Beweis einer jeden Fermel b. Also kann die Widerspruchsfreiheit auch so definiert werden: Es gibt mindestens eine unbeweisbare Formel, d. h. es muß eine Formel bekannt sein, deren Unbeweisbarkeit

---

[4]) Vgl. Fußnote [9]).

nachgewiesen ist. Oder auch so: $\sim a$ ist unbeweisbar, wobei a eine festgewählte beweisbare Formel ist. Dies letztere ist das Verfahren Hilberts, wobei für a das Axiom $0 = 0$ gewählt wird. (Vgl. Gruppe II, Schema 1.)

II. Gruppe (Gleichheit).

Abänderung: $O_2^{(2)}(a_1, a_2)$ wird in $a_1 = a_2$ abgeändert.

Für a, b sind in den Schemen Normalformeln einzusetzen, für x_p irgendeine Variable, für c eine Formel, in der höchstens x_p frei vorkommt.

1. $a = a$,
2. $(a = b) \rightarrow (a \rightarrow b)$,
3. $(a = b) \rightarrow \left(\text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ a \end{smallmatrix}\right) c = \text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ b \end{smallmatrix}\right) c\right)$.

Auch diese Axiomenschemata bedürfen keiner weiteren Erläuterung. Die beiden Schemata 2., 3. können übrigens durch eines ersetzt werden:

$2'$. $(a = b) \rightarrow \left(\text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ a \end{smallmatrix}\right) c \rightarrow \text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ b \end{smallmatrix}\right) c\right)$.

(Hilbert und W. Ackermann benützen $2'$.)

III. Gruppe (Nicht-negative ganze Zahlen).

Abänderungen: C_1 wird in 0 abgeändert. $O_2^{(1)}(a_1)$ und $O_3^{(1)}(a_1)$ werden in Za_1 bzw. $(a_1) + 1$ abgeändert.

Für a, b sind in den Schemen beliebige Normalformeln einzusetzen.

1. $Z0$,
2. $Za \rightarrow Za + 1$,
3. $\sim((a) + 1 = 0)$,
4. $((a) + 1 = (b) + 1) \rightarrow (a = b)$.

Diese Gruppe weicht etwas von der Darstellung von Hilbert und W. Ackermann ab. Sie umfaßt im wesentlichen die vier ersten der fünf bekannten Peanoschen Axiomen über die positiven ganzen Zahlen[5]), wobei 0 an die Stelle von 1 tritt. Das fünfte Axiom Peanos, das von der vollständigen Induktion, fehlt hier, weil es ohne Kollektivbegriffe („alle") nicht formuliert werden kann: es hat wesentlich nicht-finiten Charakter.

---

[5]) Peano, Arithmetices principia nova methodo exposita. (Torino 1889.) Die fünf Axiome lauten folgendermaßen:

1. 1 ist eine Zahl.
2. Wenn x eine Zahl ist, so ist auch $x + 1$ eine.
3. Für jede Zahl x ist $x + 1 \neq 1$.
4. Für jedes Zahlenpaar x, y folgt aus $x \neq y$ auch $x + 1 \neq y + 1$.
5. Die einzige Zahlenmenge M, welche 1 enthält und welche mit x auch $x + 1$ stets enthält, ist die Menge aller Zahlen.

1. bis 4. entsprechen unseren Axiomen-Schemata 1. bis 4., 5. ist das Prinzip der vollständigen Induktion.

Wir sehen überhaupt davon ab, dies als Axiomenschema einzuführen, sondern sobald der Kollektivbegriff (Gruppen IV und V) und das Definitionsverfahren (Gruppe VI) uns zur Verfügung stehen, ist es leicht, uns definitorisch eine Operation $\mathfrak{Z}$ zu verschaffen, die außer diesen vier Eigenschaften die weitere besitzt, das fünfte Axiom Peanos zu erfüllen.

Damit sind die finiten Gruppen erschöpft.

4. Die τ-Gruppe.

In diesem Paragraph wird die Gruppe IV entwickelt werden, auf der in der formalistischen Mathematik die Kollektivbegriffe „alle" und „es gibt" beruhen.

IV. Gruppe („Alle" und „es gibt").

Abänderungen: A_1, A_2 und A_3 werden bzw. in τ, Π, Σ abgeändert.

Für b ist in den Schemen eine Normalformel zu setzen, für x_p irgendeine Variable, für a eine Formel, in der höchstens x_p frei vorkommt.

1. $\Pi^{(x_p)}(a) \rightarrow \text{Subst}\binom{x_p}{b} a$,
2. $\text{Subst}\binom{x_p}{b} a \rightarrow \Sigma^{(x_p)}(a)$,
3. $\text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ \tau^{(x_p)}(a) \end{smallmatrix}\right) \rightarrow \Pi^{(x_p)}(a)$,
4. $\Sigma^{(x_p)}(a) \rightarrow \text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ \tau^{(x_p)}(\sim a) \end{smallmatrix}\right) a$.

Die Zeichen Π und Σ für Abstraktionen bedürfen keiner eingehenden Erklärung: Es sind die bekannten Begriffe „alle", bzw. „es gibt". Aus dieser Bedeutung folgen sofort die Schemata 1. und 2.: Es sind das „Aristotelische Prinzip" und das „Existentialprinzip".

Während es aber leicht ist, Schemata von den Typen „aus Π folgt etwas", und „aus etwas folgt Σ" aufzustellen, ist es wesentlich schwerer, solche von den entgegengesetzten Typen „aus etwas folgt Π" und „aus Σ folgt etwas" aufzustellen. Trotzdem sind auch derartige Schemata unbedingt notwendig: sonst hat man beim Operieren mit Π, Σ nicht die erwünschte Freiheit.

Hilbert hat gezeigt, wie sich diese Schemata formulieren lassen: Mit Hilfe des von ihm eingeführten τ, welches den folgenden Sinn hat. Wenn es überhaupt Dinge b gibt, die die Eigenschaft a nicht besitzen (da in a die eine Variable x_p frei vorkommen kann, so können wir a als „Eigenschaft von x_p" ansehen, im Gegensatze zu den konkrete Dinge darstellenden Normalformeln, wie b und $\tau^{(x_p)}(a)$), so sei $\tau^{(x_p)}(a)$ ein derartiges Ding; wenn es keine solchen Dinge b gibt, so sei $\tau^{(x_p)}(a)$ beliebig. $\tau^{(x_p)}(a)$

entspricht in gewisser Beziehung dem „ausgezeichneten Elemente“ Zermelos. Die Schemata 3, 4 enthalten die vorhin als erwünscht erkannten Prinzipien und gleichzeitig die Beschreibung des τ.

Die Gruppe IV hat die Wirkung, daß dem System der beweisbaren Formeln eine sehr wesentliche Eigenschaft zukommt, welche direkt, definitorisch, nur schwer hätte erreicht werden können; zu der vielmehr der Umweg über zweckmäßige Axiome erforderlich war. Wir können nämlich den folgenden Satz leicht beweisen:

x_p sei eine Variable, a eine Formel, in der höchstens x_p frei vorkommt. Wenn wir eine Regel kennen, die zu jeder Normalformel b einen Weg angibt, auf dem die Beweisbarkeit von Subst $\binom{x_p}{b} a$ eingesehen werden kann, so können wir auch zeigen, daß $\Pi^{(x_p)}(a)$ beweisbar ist, und umgekehrt. Wenn wir eine Normalformel b kennen, für die wir zeigen können, daß Subst $\binom{x_p}{b} a$ beweisbar ist, so können wir auch zeigen, daß $\Sigma^{(x_p)}(a)$ beweisbar ist, und umgekehrt.

Dieser Satz folgt aus dem „Schlußprinzip“ II in § I B 1 (Definition der Beweisbarkeit) und den Axiomenschemata der Gruppe IV. (Man beachte, daß hier keine bloßen Existentialbehauptungen aufgestellt werden, die für den Intuitionisten sinnlos sind. Wenn z. B. $\Sigma^{(x_p)}(a)$ als beweisbar erkannt ist, so kann man das b, für welches auch Subst $\binom{x_p}{b} a$ beweisbar ist, sofort angeben: es ist $\tau^{(x_p)}(\sim a)$.

5. Die Funktionengruppe.

Die Axiomenschemata der Gruppe IV enthalten zwar die typisch „transfiniten“ oder „inprädikativen“ Schlußweisen der klassischen Mathematik, trotzdem ist es nicht möglich, allein mit ihrer Hilfe dieselbe aufzubauen. Denn die klassische Mathematik umfaßt noch ein weitergehendes nicht-intuitionistisches Element; einen gewissen Teil der Mengenlehre. Es ist notwendig, dies ausdrücklich hervorzuheben: Das Gebäude der klassischen Mathematik ist an zwei Stellen unsicher und den Angriffen der Skeptiker ausgesetzt, nämlich beim Begriffe „alle“ und beim Begriffe der „Menge“. Man darf weder diese zwei grundverschiedenen Dinge identifizieren (was indessen vielfach geschieht), noch über das eine das andere vergessen. Die Kritik der Mathematik hat bei der „Menge“ angesetzt und ist erst langsam bis zum „alle“ vorgedrungen, welches aber heute der Hauptangriffspunkt der Intuitionisten ist. Man darf aber nicht vergessen, daß auch dann, wenn ihre Einwände gegen das „alle“ in einem gewissen Sinne widerlegt sind, für den Mengenbegriff damit noch nichts getan ist. (Es sprechen einige Analogien dafür, daß das transfinite Prinzip

„alle“ mit dem Übergange endlich-abzählbar und das transfinite Prinzip der „Menge“ mit dem Übergange abzählbar-Kontinuum zu identifizieren.

Im folgenden soll nun das Axiomenschema formuliert werden, das den Mengenbegriff, insoweit er für die klassische Mathematik unentbehrlich ist, ersetzen soll. An Stelle der „Menge“ werden wir dabei die „Funktion“ benützen; beide Begriffe sind ja vollkommen gleichwertig, und der Funktionsbegriff ist für die Zwecke der Mathematik etwas geeigneter.

V. Gruppe (Funktionen).

Abänderung: $O_3^{(2)}(a_1, a_2)$ wird in $\Phi(a_1, a_2)$ abgeändert.

Für x_p, x_q sind in den Schemen zwei verschiedene Variable einzusetzen, für a eine Formel, in der höchstens x_q frei vorkommt.

$$1. \quad \Sigma^{(x_p)}(\Pi^{(x_q)}(Z x_q \rightarrow (\Phi(x_p, x_q) = a)))$$

Der Sinn dieses etwas kompliziert anmutenden Axiomenschemas ist der folgende:

$\Phi(x_p, x_q)$ ist diejenige Operation, die aus der „Funktion“ x_p und dem „Argument“ x_q den „Funktionswert“ $\Phi(x_p, x_q)$ bildet. Anstatt wie in der klassischen Mathematik $f(x)$ zu schreiben, schreiben wir aus lediglich formalen Gründen $\Phi(f, x)$. Dadurch deuten wir an, daß der „Funktionswert“ in einer universellen Abhängigkeit von den zwei Variablen „Funktion“ und „Argument“ steht.

$\Pi^{(x_q)}(Z x_q \rightarrow (\Phi(b, x_q) = a))$ hat die Konsequenz, daß für alle c gilt $Z c \rightarrow \left(\Phi(b, c) = \text{Subst}\binom{x_q}{b} a\right)$, d. h. daß die „Funktion“ b den Ausdruck $\text{Subst}\binom{x_q}{b} a$ repräsentiert im Bereiche der „Zahlen“. Und unser Axiomenschema besagt, daß zu jedem Ausdruck a eine solche Funktion existiert, d. h. daß jeder Ausdruck (im Bereiche der „Zahlen“) durch eine Funktion dargestellt werden kann [6] [7]. („Zahlen“ bedeutet hier natürlich immer nicht-negative ganze Zahlen.)

---

[6]) Man beachte, daß das Funktionenaxiom nur für den Definitionsbereich der Funktionen Einschränkungen enthält, nicht aber für den Wertevorrat. In der Terminologie der Mengenlehre können wir dies so motivieren: Die Mächtigkeiten-Gleichung $\mathfrak{a}^{\aleph_0} = \mathfrak{a}$ ist lösbar, $\mathfrak{a}^{\mathfrak{a}} = \mathfrak{a}$ aber nicht.

Wenn man durch weitere Funktionenaxiome auch höhere Mächtigkeiten als das Kontinuum erreichen will, so muß freilich auch der Wertevorrat eingeschränkt werden. Vgl. Fußnote [7]).

[7]) Das hier eingeführte Funktionenaxiom reicht, wie erwähnt, bloß bis zum Kontinuum. Formal bereitet es keine Schwierigkeit, durch weitere Axiome auch die Mächtigkeiten

$$2^{\aleph}, \; 2^{(2^{\aleph})}, \; 2^{\left(2^{(2^{\aleph})}\right)}, \; \ldots$$

(Fortsetzung der Fußnote 7 auf nächster Seite.)

Und gerade das ist die Prätension der Mengenlehre: Alle Aussagen über x, mögen sie noch so kompliziert gebaut sein und x auf beliebig verwickelte Art und Weise enthalten, können auf die Normalform „x Element von M“ gebracht werden, wobei M von x unabhängig ist! Da wir statt Mengen Funktionen betrachten, treten natürlich an Stelle der Aussagen Ausdrücke, an Stelle der logischen Äquivalenz die identische Gleichheit, und an Stelle der Normalform „x Element von M“ die Normalform „Wert der Funktion F für das Argument x“.

6. Die Definitionsgruppe.

Die Schemata der Gruppen I—V würden eigentlich zur vollständigen Begründung der Mathematik hinreichen. Es fehlt aber ihnen noch ein zwar nicht unbedingt erforderliches, aber sehr bequemes und gewohntes Hilfsmittel der Mathematik: die Möglichkeit der Aufstellung von Definitionen. (Die in § I A 4 gegebene Möglichkeit der Abänderungen gibt keinen vollständigen Ersatz für das Definieren. Wir können zwar für C_1 das Zeichen 0 benützen, aber wir sind z. B. nicht in die Lage gesetzt, für $(0+1)+1$ das Zeichen 2 zu schreiben.) Um uns auch diese zu verschaffen, benötigen wir noch eine sechste und letzte Gruppe von Axiomenschemen.

Hierzu sind jedoch noch einige Vorbereitungen erforderlich. Wir betrachten die bisher unbenützten Konstanten, Operationen und Abstraktionen:

C_m, für $m \geqq 2$.
$O_m^{(n)}$, für $n = 1$, $m \geqq 4$; oder $n = 2$, $m \geqq 4$; oder $n \geqq 3$, $m \geqq 1$.
A_m, für $m \geqq 4$.

Unter den hier angeführten bilden sowohl die C_m, als die $O_m^{(n)}$ (für jedes feste n), und auch die A_m endlose Folgen. Wir können sie also leicht auch in der Form von Folgen mit zwei Indizes darstellen:

$$\Gamma_{u,v},\ \Omega_{u,v}^{(n)},\ \mathsf{A}_{u,v},$$

wobei dann sowohl u als v alle positiven ganzen Zahlen durchlaufen werden. Wir nennen u den Index und v die Stufe des Γ bzw. $\Omega^{(n)}$ bzw. A.

Es ist ferner offenbar leicht möglich, eine Regel anzugeben, die für jedes v eine Folge von Formeln $a_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$, angibt, mit der folgenden Eigenschaft: Zu einer jeden Normalformel a, in welcher außer der

---

erreichen. Indessen erscheint es als fraglich, ob dann der Widerspruchfreiheitsbeweis mit den vorhandenen Mitteln noch geführt werden kann.

Übrigens ist die *ganze* abstrakte Mengenlehre auf diesem Wege nicht erreichbar, wäre dazu vielmehr eine wesentliche Vertiefung und Verfeinerung der Axiome der des Formalismus erforderlich.

Konstanten 0, den Operationen $\sim, \rightarrow, =, Z, +1$, und den Abstraktionen τ, II, Σ nur noch solche von Stufen $< v$ vorkommen, gibt die Regel ein a an, so daß a mit $a_{u,v}$ identisch ist. Kurz: Die Folge $a_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$ ist eine Abzählung aller dieser Normelformeln a.

Ferner kann ebenso leicht eine Regel angegeben werden, die für jedes v und jedes n eine Folge von Formeln $b^{(n)}_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$ angibt, mit der folgenden Eigenschaft: Zu einer jeden Formel b, in der genau n verschiedene Variable frei vorkommen und in der bezüglich der Konstanten, Operationen und Abstraktionen die obigen Bedingungen erfüllt sind, gibt die Regel ein u an, so daß sie mit $b^{(n)}_{u,v}$ identisch ist. Kurz: Die Folge $b^{(n)}_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$ ist eine Abzählung aller dieser Formeln.

Und schließlich kann, wieder ganz analog, auch eine dritte Regel angegeben werden, die zu jedem v eine Folge von Formeln $c_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$ angibt mit der folgenden Eigenschaft: Zu einer Formel c, in der genau eine Variable x_p frei steht, und in der an allen Stellen, wo x steht und x_p frei ist, eine zweite Variable x_q gebunden ist (x_q fest), und die bezüglich der Konstanten, Operationen und Abstraktionen die obigen Bedingungen erfüllt, gibt die Regel ein u an, so daß sie mit $c_{u,v}$ identisch ist. Kurz: die Folge $c_{u,v}$, $u = 1, 2, \ldots$, ist eine Abzählung aller dieser c.

Es ist klar, daß alle diese Regeln fast triviale Abzählungen der betreffenden Formeln sind, so daß sich ein näheres Eingehen auf dieselben erübrigt. Und jetzt kann die sechste Gruppe so formuliert werden:

VI. Gruppe (Definitionen).

Abänderungen: Die soeben mit bzw. $\Gamma_{u,v}$, $\Omega^{(n)}_{u,v}$, $\mathsf{A}_{u,v}$ bezeichneten Konstanten, Operationen und Abstraktionen werden wirklich in bzw. $\Gamma_{u,v}$, $\Omega^{(n)}_{u,v}$ (d. h. genauer: $\Omega^{(n)}_{u,v}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$), $\mathsf{A}_{u,v}$ abgeändert.

Für $a_1, a_2, \ldots$ sind in den Schemen Normalformeln einzusetzen, für x_r irgendeine Variable, für a eine Formel, in der höchstens x_r frei vorkommt. Unter $\begin{bmatrix} x_p \\ x_q \end{bmatrix} c$ verstehen wir diejenige Formel, die aus c entsteht, wenn alle x_p in c (selbst in den Symbolen $A^{(x_p)}_m$) durch x_q ersetzt werden.

1. $\Gamma_{u,v} = a_{u,v}$,

2. $\Omega^{(n)}_{u,v}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \mathrm{Subst} \begin{pmatrix} x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n} \\ a_1, a_2, \ldots, a_n \end{pmatrix} b^{(n)}_{u,v}$

(wobei $x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}$ die in $b^{(n)}_{u,v}$ frei vorkommenden Variablen sind),

3. $\mathsf{A}^{(x_r)}_{u,v}(a) = \mathrm{Subst} \begin{pmatrix} x_p \\ a \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_q \\ x_r \end{bmatrix} c_{u,r}$,

(wobei x_p die in c frei vorkommende Variable ist, und x_q diejenig

Variable, für die alle Stellen, wo x_p frei steht, gebunden sind; es muß übrigens $r \neq q$ sein).

Diese scheinbar komplizierte Gruppe umschreibt nichtsdestominder einen ziemlich einfachen Prozeß der klassischen Mathematik: Es ist das allgemein geläufige Verfahren der Definition durch identische Gleichheit. Es ist leider wohl kaum möglich, dies einfach zu formalisieren; die mögliche Übereinanderschachtelung mehrerer Definitionen erfordert einen ziemlich komplizierten Beschreibungsapparat, so wie er hier angelegt wurde.

Auf Grund dieser Definitionsaxiome kann nun eine Definition, wie z. B. $3 = ((0+1)+1)+1$ folgendermaßen erfolgen: Die Formel $(0+1)+1)+1$ ist offenbar irgendeinem $a_{1,v}$ gleich, wir ändern das betreffende $\Gamma_{1,v}$ in 3 ab. Oder die Definition des „und" und der „logischen Äquivalenz": Die Formel $\sim(x_1 \rightarrow \sim x_2)$ ist offenbar irgendeinem $b^{(2)}_{1,v}$ gleich, wir ändern $\Omega^{(2)}_{1,v}(a_1, a_2)$ in $(a_1 \,\&\, a_2)$ ab. Die Formel $(x_1 \rightarrow x_2)\,\&\,(x_2 \rightarrow x_1)$ ist offenbar irgendeinem $b^{(2)}_{2,v}$ gleich, wir ändern $\Omega^{(2)}_{2,v}(a_1, a_2)$ in $(a_1 \rightleftarrows a_2)$ ab.

Damit haben wir die mathematische Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ vollständig angegeben. Aus ihr können noch engere Axiomenregeln gewonnen werden, wenn nicht alle Gruppen I—VI benützt werden, sondern nur ein Teil von ihnen. Insbesondere werden wir mit denjenigen Axiomenregeln zu tun haben, bei denen nur die Gruppen I—III; I—IV; I—V; und I—IV, VI benützt werden. Wir nennen sie bzw. $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—III); $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—IV); $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—V); $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—IV, VI). $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—VI) ist $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ selbst.

C. Der Beweis der Widerspruchsfreiheit.

I. Wertung und Teilwertung.

Unser Ziel ist es, die Widerspruchsfreiheit der mathematischen Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ zu beweisen. Dies ist jedoch bis jetzt nicht gelungen, es liegt nur ein Beweis für die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$(I—IV, VI) vor. Es ist aber wohl anzunehmen, daß der Widerspruchsfreiheitsbeweis für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ selbst durch eine Fortsetzung und Verschärfung der Gedankengänge dieses Beweises zu erreichen sein wird.

Wir wiederholen die Definition der Widerspruchsfreiheit: Eine Axiomenregel ist als widerspruchsfrei zu bezeichnen, wenn ein Beweis dafür vorliegt, daß niemals zwei Normalformeln a und $\sim a$ beide als beweisbar erkannt werden können.

Da wir bei allen Schlüssen intuitionistisch (d. h. finit) vorgehen müssen, so ist beim Beweise einer derartigen allgemeinen Aussage die größte Vorsicht geboten.

Eine Axiomenregel $\mathfrak{R}$ ist jedenfalls widerspruchfrei, wenn wir eine Einteilung aller Normalformeln in zwei Klassen R und F („richtig“ und „falsch“) kennen, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

Es liegt eine Regel vor, die von jeder gegebenen Normalformel zu entscheiden erlaubt, ob sie zu R oder zu F gehört. Ferner sind die folgenden Eigenschaften der Einteilung allgemein bewiesen:

I. $\sim a$ gehört dann und nur dann zu R, wenn a zu F gehört.

II. $a \rightarrow b$ gehört dann und nur dann zu R, wenn a zu F, oder wenn b zu R gehört.

III. Wenn a ein Axiom ist, so gehört es zu R.

Eine solche Einteilung nennen wir eine *Wertung*. Daß hieraus die Widerspruchfreiheit folgt, ist klar: Wegen III. gehört jedes Axiom zu R, wegen II. also jede beweisbare Formel: denn wenn a und $a \rightarrow b$ zu R gehören, so muß nach II. auch b zu R gehören. a und $\sim a$ gehören aber wegen I. niemals beide zu R, also sind sie auch niemals beide beweisbar[8]).

Für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III) werden wir eine solche Wertung angeben. Aber für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ ist etwas Derartiges völlig undenkbar, ja selbst bereits bei $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV). Denn die Einteilung R, F bedeutet ja im Grunde genommen, daß man von einer jeden Normalformel sofort entscheiden kann, ob sie unbeweisbar oder unwiderlegbar ist. (Denn wenn a zu R gehört, so gehört $\sim a$ zu F, ist also keinesfalls beweisbar. D. h. a ist unwiderlegbar. In F liegende a verhalten sich umgekehrt, sie sind unbeweisbar.) Dies ist zwar wesentlich weniger als die in § I B 1 besprochene allgemeine Entscheidbarkeit; aber selbst die Existenz einer derartigen allgemeinen Regel, die sich auf alle möglichen mathematischen Probleme bezieht, ist höchst unwahrscheinlich, jedenfalls ist mit den vorliegenden Mitteln nicht an ihre Auffindung zu denken.

Für die über die ganz elementare Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III) hinausgehenden Axiomenregeln soll vielmehr an Stelle der Wertung eine andere Art von Einteilungen aufgesucht werden, welche die Widerspruchfreiheit ebenfalls garantiert. Diese Einteilungen (genauer: Regeln zur Herstellung unendlich vieler Einteilungen) nennen wir Teilwertungen und definieren sie folgendermaßen:

Es sei irgendein System $\mathfrak{S}$ von endlich vielen Axiomen angegeben. Die Regel erlaubt, zu jedem solchen $\mathfrak{S}$ eine Einteilung aller Normal-

[8]) Die Idee, die Widerspruchsfreiheit der Mathematik durch eine „Wertung“ zu beweisen, stammt von J. König (Neue Begründung der Logik, Arithmetik und Mengenlehre, Leipzig 1914). Die im folgenden zu benützende (an Hilbert anlehnende) Form weicht aber von seinem „Wertungs“-Begriffe in einigen Punkten ab. Der Begriff der „Teilwertung“ beruht auf Ideen von Hilbert.

formeln in zwei Klassen $R_{\mathfrak{S}}$ und $F_{\mathfrak{S}}$ herzustellen. Des weiteren erlaubt sie für jede gegebene Normalformel zu entscheiden, ob diese zu $R_{\mathfrak{S}}$ oder zu $F_{\mathfrak{S}}$ gehört. Und schließlich sind die folgenden Eigenschaften dieser Einteilungen allgemein bewiesen:

I′. $\sim a$ gehört dann und nur dann zu $R_{\mathfrak{S}}$, wenn a zu $F_{\mathfrak{S}}$ gehört.

II′. $a \rightarrow b$ gehört dann und nur dann zu $R_{\mathfrak{S}}$, wenn a zu $F_{\mathfrak{S}}$ oder wenn b zu $R_{\mathfrak{S}}$ gehört.

III′. Wenn a ein Axiom des Systems $\mathfrak{S}$ ist, so gehört es zu $R_{\mathfrak{S}}$.

Man sieht: I′, II′ sind mit I, II gleichlautend, aber III′ ist gegenüber III wesentlich eingeschränkt. Es wird nur für ein endliches System von Axiomen, und nicht für alle, verlangt; dieses System kann zwar beliebig viele und beliebige Axiome enthalten, aber $R_{\mathfrak{S}}$, $F_{\mathfrak{S}}$ hängen von ihm ab. Wenn bei einer Teilwertung nachgewiesen ist, daß $R_{\mathfrak{S}}$, $F_{\mathfrak{S}}$ von $\mathfrak{S}$ unabhängig sind, so ist diese offenbar eine Wertung. Umgekehrt ist jede Wertung natürlich auch eine Teilwertung.

Wir behaupten nun: Wenn eine Teilwertung bekannt ist, so ist die Axiomenregel widerspruchfrei. (Diese Prämisse ist wesentlich schwächer, als die frühere: Kenntnis einer Wertung.)

Nehmen wir an, zwei Formeln a und $\sim a$ wären als beweisbar erkannt. Bei diesem Prozesse wurden gewisse, endlich viele, Axiome benützt, die wir alle angeben können. Sie bilden ein System $\mathfrak{S}$. Wir betrachten die Einteilung $R_{\mathfrak{S}}$, $F_{\mathfrak{S}}$. Durch dieselben Überlegungen, wie bei der Wertung, schließen wir, daß wegen II′, III′ a und $\sim a$ beide zu $R_{\mathfrak{S}}$ gehören müssen, was mit I′ unvereinbar ist. Damit ist die Widerspruchfreiheit erwiesen.

Wir sehen also: Es genügt, eine Teilwertung anzugeben. Für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) werden wir das auch tun, für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—V) ist es, wie bereits erwähnt, noch nicht gelungen. Der Übergang von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) auf $\mathfrak{R}\mathfrak{R}$ (I—IV, VI) bzw. von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—V) auf $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—VI) gleich $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ ist kann mit einer anderen Methode unschwer zu vollziehen, wovon später noch die Rede sein wird.

2. Die Wertung von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III).

In diesem Paragraph soll eine Einteilung der Normalformeln angegeben werden, die eine Wertung für die Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III) ist. Das wird so erfolgen, daß zunächst eine Einteilung aller Formeln überhaupt in zwei Klassen R, F vorgenommen wird, und hieraus ergibt sich dann zpeziell auch eine Einteilung aller Normalformeln. Aus Gründen, die erst im § 4 hervortreten werden, ändern wir irgend zwei Konstanten, etwa C_2, C_3 in bzw. W_R, W_F ab. Diese Abänderung kollidiert zwar mit

den Abänderungen der Definitionsaxiome. Dies ist aber zulässig: Sie sol die Abänderungen der Gruppe VI abändern, d. h. aufheben, um nach Voll endung unserer Überlegungen wieder durch dieselben aufgehoben zu werde (etwa von § I C 6 an).

Wir wissen aus § I A 3, daß jede Formel auf eine und im wesentl lichen nur eine Art mit Hilfe der dort angegebenen Prozesse I., II. her gestellt werden kann, und daß man zu jeder angegebenen Formel sofor ihre Herstellung auf Grund dieser Prozesse angeben kann. Bei der Defini tion der gewünschten Einteilung können wir also induktiv vorgehen und zwar parallel mit den Erzeugungsprozessen I., II. aus § I A 3. Dies ge schieht so:

I. a) Jede Variable x_m gehört zu R.

I. b) Jede Konstante C_m gehört zu R, W_F ausgenommen, welche zu F gehört.

II. a) $O_m^{(n)}$ sei irgendeine Operation, und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ beliebige For meln, von denen es bereits feststeht, ob sie zu R oder zu F gehören.

1. Wenn $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $(a_1 \to a_2)$ identisch ist, so gehör es dann und nur dann zu R, wenn a_1 zu F oder wenn a_2 zu R gehört

2. Wenn $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $\sim a_1$ identisch ist, so gehört e dann und nur dann zu R, wenn a_1 zu F gehört.

3. Wenn $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit $(a_1 = a_2)$ identisch ist, so gehör es dann und nur dann zu R, wenn die beiden Formeln a_1, a_2 miteinande identisch sind.

4. Wenn $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit Za_1 identisch ist, so gehört es dan und nur dann zu R, wenn die Formel a_1 die Form $\big((\ldots(0+1)\ldots)+1\big)+$ hat (mit beliebig vielen, oder auch gar keinen, Operationen $+1$).

5. Wenn $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ mit keiner der unter 1. bis 4. erwähnte Operationen identisch ist, so gehört es immer zu R.

II. b) A_m sei irgendeine Abstraktion, x_n irgendeine Variable un a eine beliebige Formel, von der es bereits feststeht, ob sie zu R ode zu F gehört. Dann gehört $A_m^{(x_n)}(a)$ immer zu R.

Ehe wir diese Einteilung aller Formeln näher untersuchen, insbeson dere auf ihren Wertungscharakter hin, wollen wir einige kritische Be merkungen zu ihr machen.

Der „Sinn" der Einteilung ist offenbar bei jeder Wertung der, z entscheiden, ob irgendeine Normalformel „richtig" oder „falsch" ist. Vo dieser Auffassung aus sind bei der vorliegenden Einteilung der Punkt II. a) 1. bis 4. der Definition klar. Unklar können aber einem die Punkt I. a), b), II. a) 5., II. b) erscheinen, wo lauter „sinnlose" Dinge in R ge

vorfen, d. h. als „richtig" gewertet werden. Die Erklärung davon ist ber einfach: Wir sagten bereits in § I A 1, daß wir im Interesse der ormalen Einfachheit es zulassen, daß „sinnlose" Formeln (wie etwa $\sim 0, 0 \rightarrow (0 + 1)$ usw.) gebildet werden. Da die Einteilung R, F einer Wertung sämtliche Normalformeln umfassen muß, so müssen auch diese n den beiden Klassen R, F irgendwie untergebracht werden. Dabei sieht nan, daß es im wesentlichen einerlei ist, wie diese Zuweisung in die beiden Klassen durchgeführt wird. Die Punkte I. a), b), II. a) 5., II. b) bewirken, ganz willkürlich, eine einfache Einteilung dieser „sinnlosen" Formeln. Nur W_R und W_F bilden Ausnahmen, diese haben einen wesentlichen Sinn", wie sich in § I C 4 zeigen wird.)

Wir wollen nun zeigen, daß die Einteilung der Normalformeln wirklich eine Wertung für die Axiomenregel ist. Von den Bedingungen in I C 1 ist zunächst die Entscheidbarkeit offenbar erfüllt. Daß I., II. erfüllt sind, folgt aus den Punkten II. a) 1., 2. der Definition leicht. Es bleibt also nur noch III. übrig: Daß alle Axiome von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III), d. h. die auf Grund von Schemata der Gruppen I—III entstanden sind, in R gehören.

Nun folgt dies für die Gruppe II direkt aus den Punkten II. a) 1. und 3. und für die Gruppe III aus II. a) 3. und 4. Bei der Gruppe I schließlich verfahre man so: Man setze für a, b, c der Reihe nach alle Kombinationen der Zugehörigkeit zu R oder zu F ein (es sind ihrer höchstens acht), mit Hilfe von II. a) 1., 2. sieht man in allen Fällen, daß die entstehenden Axiome zu R gehören. Damit ist die Behauptung bewiesen.

3. Die Reduktionen.

Im vorigen Paragraph haben wir eine Wertung für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—III) angegeben und damit ihre Widerspruchsfreiheit bewiesen. Wie bereits in I C 1 gesagt wurde, soll die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) nicht durch eine Wertung (dies ist wohl überhaupt unmöglich), sondern durch eine Teilwertung erwiesen werden. Wir gehen nun daran, diese Teilwertung für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) mit Hilfe der Wertung R, F des vorigen Paragraphen herzustellen. Um sie zu gewinnen, führen wir den Hilfsbegriff der Reduktion ein. Unter Reduktion verstehen wir eine Regel P, die jeder Normalformel eine bestimmte Normalformel, ihre Reduzierte, zuordnet. Wir werden nun bei der herzustellenden Teilwertung zu jedem System $\mathfrak{S}$ von Axiomen von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) nicht die beiden Klassen $R_{\mathfrak{S}}$, $F_{\mathfrak{S}}$ angeben, sondern eine Reduktion $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$ mit der folgenden Bestimmung: Eine Normalformel a gehört zu $R_{\mathfrak{S}}$ oder $F_{\mathfrak{S}}$, je nachdem ihre Reduzierte nach $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$ zu R oder zu F gehört. Freilich müssen die $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$, damit dies auch wirk-

lich eine Teilwertung für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) sei, gewissen Bedingungen genüge
Wir wollen solche hinreichende Bedingungen jetzt angegeben.

Von den Bedingungen für Teilwertungen in § I C 1 ist zunächst di
Entscheidbarkeit automatisch erfüllt. Es genügt also I′, II′ und III′ z
untersuchen. Wir zerlegen dabei III′ noch in zwei Teile:

III′. a) Alle auf Grund der Axiomenschemata der Gruppen I—III en
standenen Axiome von $\mathfrak{S}$ gehören zu $R_{\mathfrak{S}}$

III′. b) Alle auf Grund der Axiomenschemata der Gruppe IV en
standenen Axiome von $\mathfrak{S}$ gehören zu $R_{\mathfrak{S}}$.

Betrachten wir zunächst I′, II′ und III′a. Es sind I′ und II′ siche
erfüllt, wenn wir die folgenden Sätze (für alle $P_{\mathfrak{S}}$) bewiesen haben
Wenn a die Reduzierte $\bar{a}$ hat, so hat $\sim a$ die Reduzierte $\sim \bar{a}$. Wenn a,
bzw. die Reduzierten $\bar{a}$, $\bar{b}$ haben, so hat $a \to b$ die Reduzierte $\bar{a} \to \bar{b}$
Ferner wird auch III′a erfüllt sein, mit Ausnahme der aus dem Schema
der Gruppe II sich ergebenden Axiome, wenn diese Sätze gelten und noc
die folgenden: Wenn a, b bzw. die Reduzierten $\bar{a}$, $\bar{b}$ haben, so habe
$a = b$, Za, $a + 1$ bzw. die Reduzierten $\bar{a} = \bar{b}$, $Z\bar{a}$, $\bar{a} + 1$; 0 hat die Redu
zierte 0. Und das allein übrigbleibende Schema 3 der Gruppe II kann
durch den folgenden Satz erledigt werden: Wenn a und b dieselben Redu
zierten haben (a, b sind Normalformeln!), so haben auch Subst $\binom{x_n}{a} c$ un
Subst $\binom{x_n}{b} a$ dieselben Reduzierten. Man beachte, daß alle diese Bedingunge
noch von $\mathfrak{S}$ unabhängig sind, d. h. ebensogut eine Wertung als eine Teil
wertung ergeben könnten!

Wir erklären: eine Normalformel heißt *reduziert*, wenn keine ihre
normalen Teilformeln, inkl. sie selbst, mit τ, Π, Σ beginnt. (Der Begri
der reduzierten Formel hängt offenbar nicht von der Reduktionsregel P
ab.) Die eben aufgezählten Bedingungen zur Gültigkeit von I′, II′, III′
sind nun sicher erfüllt, wenn die beiden folgenden Sätze zu Recht bestehen

Jede reduzierte Formel a ist ihre eigene Reduzierte. Jede Reduziert
(einer Normalformel) ist reduziert.

Wenn $\bar{a}$ die Reduzierte von a ist, so haben Subst $\binom{x_n}{a} b$ und Subst $\binom{x_n}{\bar{a}}$
(b irgendeine Formel, in der höchstens die Variable x_n frei vorkommt
dieselbe Reduzierte.

Damit aber diese Sätze erfüllt seien, werden wir die in Betrach
kommenden Reduktionsregeln weiter spezialisieren. Zu diesem Zweck
führen wir den Hilfsbegriff der *direkt reduziblen* Normalformel ein. Ein
Normalformel a heißt direkt reduzibel, wenn sie selbst zwar mit τ, I
oder Σ beginnt, aber keine einzige unter ihren echten normalen Tei
formeln. (Man beachte, daß auch die direkte Reduziblität von Norma

rmeln, ebenso wie vorhin ihre Reduziertheit von jeder Reduktionsregel $P_{\mathfrak{S}}$, abhängig definiert ist.) Wir fordern:

Unsere Reduktionsregel P soll nicht allen Normalformeln, sondern oß den direkt reduziblen eine Normalformel als ihre Reduzierte zuordnen. ese ist stets eine reduzierte Formel.

Wir wollen zeigen, daß sich jede solche Reduktionsregel auf eine nz bestimmte Weise zu einer Reduktionsregel im früheren Sinne, die en Normalformeln Reduzierte zuordnet, erweitern läßt. Und diese Erterung wird die beiden obigen Sätze immer erfüllen.

Es liege eine beliebige Normalformel a vor. Wenn a reduziert ist, sei a selbst die Reduzierte von a. Wenn nicht, so hat a mindestens e direkt reduzible normale Teilformel, die wir durch ihre Reduzierte ach der gegebenen Regel P) ersetzen, und verwandeln dadurch a in a_1. enn a_1 reduziert ist, so sei a_1 die Reduzierte von a. Wenn nicht, so t a_1 mindestens eine direkt reduzible normale Teilformel, die wir durch e Reduzierte ersetzen; wir verwandeln dadurch a_1 in a_2. Wenn a_2 duziert ist, so sei a_2 die Reduzierte von a. Wenn nicht, so verfahren r analog weiter.

Nach höchstens soviel Schritten, als es in a mit τ, Π oder Σ benende normale Teilformeln gibt, müssen wir zu einem reduzierten a_m angen, welches dann die Reduzierte von a sein wird. Denn die Anl der mit τ, Π oder Σ beginnenden normalen Teilformeln ist ja in a ößer als in a_1, in a_1 größer als in a_2, usw.

Diese Definition der Reduzierten ist aber noch nicht eindeutig: enn a oder irgendein a_n mehrere direkt reduzible normale Teilformeln sitzt, so ist die Wahl derjenigen, durch deren Reduktion a_1 bzw. a_{n+1} vonnen wird, willkürlich. Indessen sieht man leicht ein, daß dies wesentlich ist: Wie immer auch diese Wahlen erfolgen, stets gelangt n zu derselben reduzierten Normalformel.

Damit ist die gewünschte Erweiterung so durchgeführt, daß I′, II′ d III′a automatisch erfüllt sind, da den beiden hinreichenden Bedingen offenbar genügt wurde. In den zwei folgenden Paragraphen soll jenige Reduktionsregel $P_{\mathfrak{S}}$ aufgesucht werden, die auch III′b befriedigt. erbei tritt dann die Abhängigkeit von $\mathfrak{S}$ wesentlich in den Vordergrund.

4. Vorbereitungen zur Behandlung der τ-Gruppe.

Die Bedingung III′b verlangt: Für jede zum System $\mathfrak{S}$ gehörende mbination a, b, x_p (a eine Formel, in der höchstens x_p frei vorkommt, eine Variable, b eine Normalformel) gehören die nach $P_{\mathfrak{S}}$ gebildeten duzierten von

1. $\Pi^{(x_p)}(a) \rightarrow \text{Subst}\binom{x_p}{b} a$,

2. $\text{Subst}\binom{x_p}{b} a \rightarrow \Sigma^{(x_p)}(a)$,

3. $\text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ \tau^{(x_p)}(a) \end{smallmatrix}\right) a \rightarrow \Pi^{(x_p)}(a)$,

4. $\Sigma^{(x_p)}(a) \rightarrow \text{Subst}\left(\begin{smallmatrix} x_p \\ \tau^{(x_p)}(\sim a) \end{smallmatrix}\right) a$

zu R. (Da in $\mathfrak{S}$ nicht unbedingt jedes a, b, x_p Komplex in alle vier Schi mata der Gruppe IV eingesetzt wird, so ist dies im allgemeinen sogar meh als III′b.) Die Erfüllung dieser Bedingung soll uns nun beschäftigen.

Wenn wir aus irgendeiner mit τ, Π oder Σ beginnenden Formel alle ihre größten, echten, freien Teilformeln entfernen, und jede durc das Zeichen · ersetzen, so entsteht ihr *Typus*. Die herausgenommene Normalformeln aber, in ihrer richtigen Reihenfolge und Vielfachheit, sin die *Substituenten* in a. Typus und Substituenten bestimmen offenbar di Formel eindeutig. (So hat z. B. die Normalformel $\tau^{(x_1)}(x_1 = \tau^{(x_2)}(Z x_2))$ de Typus $\tau^{(x_1)}(x_1 = \cdot)$ und den einzigen Substituenten $\tau^{(x_2)}(Z x_2)$. Diese aber ist sein eigener Typus und hat gar keinen Substituenten.) Wen a irgendeine Formel ist und b eine echte nicht freie Teilformel von so nennen wir den Typus von b einen echten Teiltypus des Typus von Dieser Begriff ist, wie man leicht einsieht, eine Relation zwischen de beiden Typen selbst, und von den Formeln a, b unabhängig. Wir könne zu einem Typus t offenbar alle seine, endlich vielen, echten Teiltype angeben. Alle diese Begriffe sind noch von $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$ und $\mathfrak{S}$ unabhängig. Fi die jetzt Folgenden ist es nicht mehr der Fall; wir setzen also von nu an stets voraus, daß $\mathfrak{S}$ gegeben sei. ($\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$ dagegen braucht nicht gegeb zu sein.)

Wir nehmen alle in $\mathfrak{S}$ vorkommenden Kombinationen a, b, x_p u bilden die Typen der entsprechenden $\tau^{(x_p)}(a)$, $\Pi^{(x_p)}(a)$, $\tau^{(x_p)}(\sim a$ $\Sigma^{(x_p)}(a)$. Zu diesen nehmen wir alle ihre echten Teiltypen hinzu, insowe sie nicht sowieso darunter waren. Zu jedem der so gewonnenen Type nehmen wir außerdem noch die folgenden Typen hinzu: Wenn t die For $\tau^{(x_p)}(a)$ oder $\Pi^{(x_p)}(a)$ hat, so nehmen wir $\Pi^{(x_p)}(a)$ bzw. $\tau^{(x_p)}(a)$ hinz wenn a obendrein die Form $\sim a'$ hat, auch $\Sigma^{(x_p)}(a')$; und wenn t d Form $\Sigma^{(x_p)}(a)$ hat, so nehmen wir $\tau^{(x_p)}(\sim a)$ und $\Pi^{(x_p)}(\sim a)$ hinz (Natürlich können auch diese schon teilweise dagewesen sein.) Alle die Typen sind die *Grundtypen*. Jeder echte Teiltypus eines Grundtypus i offenbar wieder einer. Die Grundtypen verteilen sich ohne weiteres a Gruppen von den folgenden Formen: $\tau^{(x_p)}(a)$, $\Pi^{(x_p)}(a)$, wobei a nicht d Form $\sim a'$ hat; und $\tau^{(x_p)}(a)$, $\Pi^{(x_p)}(a)$, $\Sigma^{(x_p)}(a')$, a ist mit $\sim a'$ ide

sch. Jede Gruppe gehört zu einem bestimmten typisierten a, und wir umerieren sie: $g_1, g_2, \ldots, g_{\bar{s}}$. Dabei verlangen wir aber, daß immer, enn ein Typus der Gruppe $g_{s'}$ echter Teiltypus eines aus der Gruppe $g_{s''}$ t, $g_{s'}$ vor $g_{s''}$ stehe, d. h. $s' < s''$ sei. Dies ist offenbar leicht erreichbar.

Ferner nehmen wir aus den Kombinationen a, b, x_p von $\mathfrak{S}$ alle Subituenten der $\tau^{(x_p)}(a)$, $\Pi^{(x_p)}(a)$, $\tau^{(x_p)}(\sim a)$, $\Sigma^{(x_p)}(a)$ und alle b, und ennen sie die *Grundformeln*. Die Operationen und Konstanten, die in en Grundformeln vorkommen, sind die *Grundoperationen* und *Grundonstanten*. Ferner sind auch noch W_R und W_F Grundkonstanten. Ihre nzahlen seien bzw. $\bar{o}$ und $\bar{c}$, und die größte unter den Stellenzahlen der rundoperationen und der Anzahlen von Zeichen · in Grundtypen sei $\bar{n}$.

Wir definieren ferner den *Grad* einer reduzierten Normalformel in ezug auf eine Reduktionsregel P folgendermaßen:

I. Jede Grundkonstante hat den Grad 0.

II a. Wenn $O_m^{(n)}$ eine Grundoperation ist und $a_1, a_2, \ldots, a_n$ reduerte Normalformeln sind mit Graden $\leqq p$, die nicht alle $< p$ sind, so at $O_m^{(n)}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ den Grad $p+1$.

II b. Wenn t ein Grundtypus ist, der n Zeichen enthält, und $, a_2, \ldots, a_n$ reduzierte Normalformeln mit der höchsten Gradzahl p, so at die dem Typus t und den Substituenten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ durch P zugednete Reduzierte den Grad $p+1$. („Dem Typus t und den Substituenten $, a_2, \ldots, a_n$ zugeordnete Reduzierte" bedeutet: Die Reduzierte von dernigen direkt reduziblen Normalformel, deren Typus t ist und deren Subituenten $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind.)

(Infolge der Bedingung II b kann es vorkommen, daß für eine reduzierte ormalformel zwei oder noch mehr verschiedene Grade gefunden werden. es stört uns aber nicht, denn wir verlangen weder, daß jede reduzierte ormalformel einen Grad besitze, noch daß sie nur einen einzigen besitze.)

Auf Grund dieser Definition können wir für jedes $p = 0, 1, 2, \ldots$ alle duzierten Normalformeln vom Grade p angeben. Und die Anzahl der ormalformeln mit Graden $\leqq p$ können wir, unabhängig von P, aber abngig von $\mathfrak{S}$, abschätzen. In der Tat, wenn wir sie mit $A_P(p)$ bechnen, so gilt offenbar:

$$A_P(0) = \bar{c},$$
$$A_P(p+1) \leqq \bar{c} + (\bar{o} + 3\bar{s}) \cdot (A_P(p))^{\bar{n}}.$$

enn wir also eine Funktion $\varphi(p)$ durch

$$\varphi(0) = \bar{c},$$
$$\varphi(p+1) = \bar{c} + (\bar{o} + 3\bar{s}) \cdot (\varphi(p))^{\bar{n}}$$

finieren, so ist allgemein $A_P(p) \leqq \varphi(p)$.

Ferner ist es leicht, ein (ebenfalls von P unabhängiges, aber von abhängiges) $\bar{p}$ anzugeben, so daß die Reduzierten der Grundformeln Grad $< \bar{p}$ haben, für jedes P. Es genügt z. B. $\bar{p}$ um eins größer, als di größte Anzahl von Operationen und Abstraktionen zu wählen, die in ein Grundformel überhaupt vorkommen.

Mit diesen Hilfsbegriffen können wir nun die eingangs dieses Par graphen gegebene, hinreichende, Form von III′b auf eine neue, endgültig (und wiederum etwas weitere) Form bringen. Diese lautet so:

T. g_s sei irgendeine der Gruppen $g_1, g_2, \ldots, g_{\bar{s}}$; sie besteht aus d Grundtypen $\tau^{(x_q)}(a)$, $\Pi^{(x_q)}(a)$ und für a gleich $\sim a'$ noch $\Sigma^{(x_q)}(a'$ welche je n Zeichen · enthalten mögen. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ seien irgendwelch reduzierten Normalformeln von Graden $< \bar{p}$ (für P). Durch Einsetzung d $a_1, a_2, \ldots, a_n$ in die Typen g_s entstehen die Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r)$, $\Pi^{(x_q)}($ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r')$, wenn r gleich $\sim r'$ ist.

Betrachten wir ferner alle reduzierten Normalformeln b mit Grad $\leqq \bar{p}$ (eigentlich würde wieder $< \bar{p}$ genügen, unser Verfahren bietet ab einige formale Vereinfachungen), und bilden wir die Reduzierten all entsprechenden Subst $\binom{x_q}{b} r$ (nach P).

Wenn unter diesen mindestens eine zu F gehört, so ist die Reduzier von $\tau^{(x_q)}(r)$ eines der erwähnten b, für welches die Reduzierte v Subst $\binom{x_q}{b} a$ zu F gehört; die Reduzierte von $\Pi^{(x_q)}(r)$ ist W_F, die v $\Sigma^{(x_q)}(r')$ ist W_R. Wenn nicht, so hat $\tau^{(x_q)}(r)$ die Reduzierte 0, und d Reduzierten von $\Pi^{(x_q)}(r)$, $\Sigma^{(x_q)}(r')$ sind bzw. W_R, W_F.

Daß aus dieser Bedingung T die eingangs formulierte wirklich folg erkennt man sofort, wenn man beachtet, daß in den Gruppen $a, b,$ von $\mathfrak{S}$ jeder Typus ein Grundtypus ist, und die Reduzierten der Subst tuenten und der b als Reduzierte von Grundformeln Grade $< \bar{p}$ habe und sich ferner vergegenwärtigt, daß $a \rightarrow b$ dann und nur dann zu gehört, wenn a zu F oder b zu R gehört.

5. Durchführung der Reduktion.

Wir müssen eine Regel finden, die zu jedem System $\mathfrak{S}$ ein $\mathsf{P}_{\mathfrak{S}}$ ko struiert, welches der entsprechenden Bedingung T genügt. Nun geht ab $\mathfrak{S}$ in T bloß indirekt ein, indem es die Gruppen g_s sowie die Grundko stanten und Grundoperationen und die Zahlen $\bar{s}, \bar{c}, \bar{o}, \bar{n}, \bar{p}$ bestimm Wir können also von $\mathfrak{S}$ ganz absehen und nur diese bestimmenden El mente betrachten. Wir suchen also eine Regel, die das Folgende leiste

T′. Es sei ein System von Typen gegeben, die Grundtypen heiße sollen. Ein echter Teiltypus eines Grundtypus sei wieder ein Grundtypu Das System zerfalle in Gruppen $g_1, g_2, \ldots, g_{\bar{s}}$; jede Gruppe besteht a

en Typen $\tau^{(x_q)}(a)$, $\Pi^{(x_q)}(a)$, wenn a nicht die Form $\sim a'$ hat, oder $^{x_q)}(a)$, $\Pi^{(x_q)}(a')$, $\Sigma^{(x_q)}(a')$, wenn a gleich $\sim a'$ ist. Wenn ein Typus us $g_{s'}$ echter Teiltypus eines Typus aus $g_{s''}$ ist, so ist stets $s' < s''$. erner sei ein System von Konstanten gegeben, welches auch W_R und W_F nthält, und ein System von Operationen. Diese sollen Grundkonstanten zw. Grundoperationen heißen, ihre Anzahlen seien $\bar{c}$ bzw. $\bar{o}$. Die größte nter den Anzahlen von Leerstellen in Grundoperationen und von Zeichen · Grundtypen sei $\bar{n}$. Wenn eine Reduktionsregel P gegeben ist, so de- nieren wir den Grad für reduzierte Normalformeln für P wie im vorigen aragraphen. Die genannte Reduktionsregel soll nun der Bedingung T r dieses System von Grundtypen, -konstanten und -operationen sowie ahlen $\bar{s}$, $\bar{c}$, $\bar{o}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ genügen.

Diese Reduktionsregel werden wir im folgenden konstruieren und war durch Induktion in bezug auf $\bar{s}$, die Anzahl der Gruppen von Grund- rpen. D. h. wir werden das Folgende tun:

I. Wir konstruieren eine Regel, die die gewünschte Reduktionsregel mer herstellt, wenn die Einschränkung $\bar{s} = 0$ besteht.

II. Falls eine Regel bekannt ist, die die gewünschte Reduktionsregel mer herstellt, wenn die Einschränkung $\bar{s} = \sigma$ besteht, so konstruieren ir eine Regel, die dasselbe für $\bar{s} = \sigma + 1$ leistet.

Es ist klar, daß wir unser Ziel erreicht haben, sobald diese Kon- ruktionen durchgeführt sind. Zunächt ist I. leicht zu erfüllen. Wegen $= 0$ gibt es nämlich gar keine g_s, so daß die Bedingung T. gar nichts rlangt. Wir können also P ganz beliebig wählen, etwa indem wir allen rekt reduziblen Normalformeln, je nachdem sie mit τ, Π oder Σ be- nnen, als Reduzierte bzw. 0, W_R, W_F zuordnen. Wenden wir uns daher r Konstruktion II zu.

Es sei also ein System $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma, g_{\sigma+1}$ sowie Systeme von Grund- nstanten und -operationen, und die Zahlen $\bar{c}$, $\bar{o}$, $\bar{n}$, $\bar{p}$ gegeben. Wir llen ein P konstruieren, welches T' für diese erfüllt. Zu diesem Zwecke hmen wir an (was wir ja nach der Prämisse von II. tun dürfen), daß r im Besitze eines P^* sind, welches T' für das System $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$, eselben Grundkonstanten und -operationen und ein anderes $\bar{p}'$ (aber türlich dieselben $\bar{s}$, $\bar{c}$, $\bar{o}$, $\bar{n}$) erfüllt. (Wenn $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma, g_{\sigma+1}$ den am fang des Paragraphen ausgesprochenen Bedingungen genügt, so tut es enbar auch $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$.) Und zwar wählen wir aus Gründen, die h im folgenden erhellen werden, $\bar{p}'$ gleich $\bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}}$; $\varphi(p)$ ist dabei im vorigen Paragraphen definierte Abschätzungsfunktion für die Anzahl er reduzierten Normalformeln mit Graden $\leqq p$ (nach irgendeiner gebenen Reduktionsregel). Für alle direkt reduziblen Normalformeln,

deren Typus nicht zur Gruppe $g_{\sigma+1}$ gehört, soll die Reduzierte nach dieselbe sein, wie nach P^*. Es bleibt übrig, P noch für solche direk reduziblen Normalformeln zu definieren, deren Typus zu $g_{\sigma+1}$ gehört.

Die Typen von $g_{\sigma+1}$ seien $\tau^{(x_q)}(a)$, $\Pi^{(x_q)}(a)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(a$ (wenn a gleich $\sim a'$ ist); sie sollen je n Leerstellen besitzen.

Wir bilden nun alle Kombinationen von je n reduzierten Norma formeln, deren Grad für P kleiner oder gleich 0 ist. (Von nun an trete die Grade für P und die Grade für P^* wiederholt abwechselnd auf. ist wesentlich, diese beiden Begriffe nie zu verwechseln.) Trotzdem wir noch gar nicht vollständig definiert haben, ist dies doch möglich: der Grade $\leqq 0$ für P haben offenbar nur die Grundkonstanten; wir könne also alle ihre Kombinationen zu je n angeben. Sie sollen $C_1, C_2, \ldots, C$ heißen.

Wir führen nun die folgenden Konstruktionen durch:

1. Durch Einsetzen von C_1 in die Typen von $g_{\sigma+1}$ entstehen d direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_1)$, $\Pi^{(x_q)}(r_1)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r$ (r_1 gleich $\sim r_1'$). Wir nehmen alle reduzierten Normalformeln b, der P^*-Grad $\leqq \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}-1}}$ ist, und bilden die Reduzierten der Subst $\binom{x_q}{b}$ nach P^*. Wenn unter ihnen solche vorkommen, die zu F gehören, definieren wir die Reduzierte von $\tau^{(x_q)}(r_1)$ nach P als irgendeines dieser und die Reduzierte von $\Pi^{(x_q)}(r_1)$ und $\Sigma^{(x_q)}(r_1')$ als W_F bzw. W_R. Wen es nicht der Fall ist, so definieren wir dieselben bzw. als 0, W_R, W Der Grad nach P^* der Reduzierten von $\tau^{(x_q)}(r_1)$ nach P sei in jedem d beiden Fälle gleich γ_1.

2. Durch Einsetzen von C_2 in die Typen von $g_{\sigma+1}$ entstehen d direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_2)$, $\Pi^{(x_q)}(r_2)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r$ (r_2 gleich $\sim r_2'$). Wir nehmen alle reduzierten Normalformeln b, der P^*-Grad $\leqq \gamma_1 + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}-2}}$ ist, und bilden die Reduzierten d Subst $\binom{x_q}{b} r_2$ nach P^*. Wenn unter ihnen solche vorkommen, die zu gehören, so definieren wir die Reduzierte von $\tau^{(x_q)}(r_2)$ nach P als irgen eines dieser b, und die Reduzierte von $\Pi^{(x_q)}(r_2)$ und $\Sigma^{(x_q)}(r_2')$ als W bzw. W_R. Wenn es nicht der Fall ist, so definieren wir dieselben a bzw. 0, W_R, W_F. Der Grad nach P^* der Reduzierten von $\tau^{(x_q)}(r_2)$ nach sei in jedem der beiden Fälle gleich γ_2.

. . . . . .

k_0. Durch Einsetzen von C_{k_0} in die Typen von $g_{\sigma+1}$ entstehen d direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_{k_0})$, $\Pi^{(x_q)}(r_{k_0})$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r$ (r_{k_0} gleich $\sim r_{k_0}'$). Wir nehmen alle reduzierten Normalformeln, der P^*-Grad $\leqq \mathrm{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_0-1}) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}-k_0}}$ ist, und bilden die Red

ierten der Subst $\binom{x_q}{b} r_{k_0}$ nach P*. Wenn unter ihnen solche vorkommen, ie zu F gehören, so definieren wir die Reduzierte von $\tau^{(x_q)}(r_{k_0})$ als irgendnes dieser b, und die Reduzierten von $\Pi^{(x_q)}(r_{k_0})$ und $\Sigma^{(x_q)}(r'_{k_0})$ als W_F zw. W_R. Wenn es nicht der Fall ist, so definieren wir dieselben als zw. 0, W_R, W_F. Der Grad nach P* der Reduzierten von $\tau^{(x_q)}(r_{k_0})$ nach P ei in jedem der beiden Fälle γ_{k_0}.

Jetzt bilden wir alle von $C_1, C_2, \ldots, C_{k_0}$ verschiedenen Kombinationen on je n reduzierten Normalformeln, deren Grad für P kleiner oder gleich 1 t. Trotzdem wir noch P gar nicht vollständig definiert haben, ist das tzt möglich: Wir können alle reduzierten Normalformeln, die in P Grade $\leqq 1$ haben, angeben; denn wir kennen alle diejenigen, die in P Grade $\leqq 0$ aben, sowie die zu ihren Einsetzungen in Typen von $g_{\sigma+1}$ nach P geörigen Reduzierten. (Die Reduzierten der Einsetzungen in andere Typen ennen wir auch, denn dort ist ja P bereits als mit P* übereinstimmend efiniert.) Diese Kombinationen sollen $C_{k_0+1}, \ldots, C_{k_1}$ heißen.

Wir können nun $C_{k_0+1}, \ldots, C_{k_1}$ genau so in die Typen von $g_{\sigma+1}$ eintzen, wie vorhin $C_1, C_2, \ldots, C_{k_0}$, so daß die direkt reduziblen Normalrmeln $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ (r_ν gleich $\sim r'_\nu$), ν gleich $+1, \ldots, k_1$, entstehen. Und dann können wir die Reduzierten derselben ach P ganz analog definieren, wie es dort geschah. Hierauf sind wir in r Lage, alle von $C_1, C_2, \ldots, C_{k_1}$ verschiedenen Komplexe von je n reduerten Normalformeln anzugeben, die in P Grade $\leqq 2$ haben; wir nennen e $C_{k_1+1}, \ldots, C_{k_2}$. Wir bilden durch Einsetzung derselben in die Typen n $g_{\sigma+1}$ die direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$ und entuell $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ (r_ν gleich $\sim r'_\nu$), ν gleich $k_1+1, \ldots, k_2$. Für diese rd die Reduktion nach P wieder ganz analog zu den früheren definiert.

So können wir weiter verfahren bis wir zu $C_{k_{\bar{p}-1}}$ gelangt sind, d. h. e Reduktion nach P für alle Komplexe von reduzierten Normalformeln t Graden $< \bar{p}$ in P definiert haben. Um die Konstruktion noch einmal nheitlich vor uns zu haben, geben wir den induktiven Schritt nun allmein an:

K_p. Es sei p gleich $0, 1, 2, \ldots, \bar{p}-1$. Alle Komplexe von je n reduerten Normalformeln mit Graden $< p$ in P seien bereits bekannt, deichen die Reduzierten nach denjenigen direkt reduziblen Normalformeln, durch ihr Einsetzen in die Typen von $g_{\sigma+1}$ entstehen. Die Komplexe en $C_1, C_2, \ldots, C_{k_{p-1}}$, die durch ihre Einsetzung entstehenden direkt luziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ gleich $\sim r'_\nu$), ν gleich $1, 2, \ldots, k_{p-1}$; und der Grad in P* der Reduerten von $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$ nach P sei bekannt und zwar gleich γ_ν.

Dann kennen wir auch die von $C_1, C_2, \ldots, C_{k_{p-1}}$ verschiedenen Kom-

plexe von je n reduzierten Normalformeln mit Graden in P kleiner oder gleich p, d. h. $< p+1$. Wir nennen sie $C_{k_{p-1}+1}, \ldots, C_{k_p}$ und die durch Einsetzen derselben in die Typen von $g_{\sigma+1}$ entstehenden direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$ und eventuell $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ (r_ν gleich $\sim r'_\nu$, ν gleich $k_{p-1}+1, \ldots, k_p$. Die Reduzierten dieser $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ definieren wir nun induktiv wie folgt:

ν. Es sei ν gleich $k_{p-1}+1, \ldots, k_p$ und für alle $\mu < \nu$ sei bereits alles erledigt, und die Grade in P* der Reduzierten der $\tau^{(x_q)}(r_\mu)$ (μ gleich $1, 2, \ldots, \nu-1$) seien γ_μ. Wir nehmen alle reduzierten Normalformeln b, deren Grad $\leqq \mathrm{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu}$ in P* ist, und bilden die Reduzierten der Subst $\binom{x_q}{b} r_\nu$ nach P*. Wenn unter ihnen solche vorkommen, die zu F gehören, so definieren wir die Reduzierten von $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$ und $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ als ein solches b bzw. W_F, W_R. Wenn es nicht der Fall ist, so definieren wir dieselben bzw. als 0, W_R, W_F. Der Grad nach P der Reduzierten von $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$ nach P* sei gleich γ_ν.

Durch sukzessives Anwenden dieser Konstruktionsregel auf ν gleich $k_{p-1}+1, \ldots, k_p$ erhalten wir die Reduzierten aller direkt reduziblen Normalformeln $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ für diese ν.

Man sieht, die Konstruktion K_p liefert allgemein die Prämissen der Konstruktion K_{p+1}. Durch sukzessives Ausführen der Konstruktionen $K_0, K_1, \ldots, K_{\bar{p}-1}$ erhalten wir also nacheinander die Reduzierten nach P aller direkt reduziblen Normalformeln, deren Typus zu $g_{\sigma+1}$ gehört und deren Substituenten Grade $< \bar{p}$ in P haben. Allerdings geht dies nur wenn in allen Ausdrücken $\mathrm{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu}$ der Exponent nicht-negativ ist, d. h. wenn $k_{\bar{p}-1} \leqq (\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}$ ist. Das ist aber sicher der Fall, denn $k_{\bar{p}-1}$ ist die Anzahl aller Kombinationen von je n reduzierten Normalformeln mit Graden $< p$ in P, also die n-te Potenz der Anzahl der genannten reduzierten Normalformeln, folglich $\leqq (\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}$.

Es bleibt noch übrig, die Reduzierten nach P von denjenigen direkt reduziblen Normalformeln zu definieren, deren Typus zu $g_{\sigma+1}$ gehört, bei denen aber nicht alle Substitutionen Grade $< \bar{p}$ in P haben. (Wir wissen ja bereits, trotzdem P noch nicht vollständig definiert ist, für welche reduzierten Normalformeln das der Fall ist.) Hier können wir aber wieder ganz beliebig wählen, etwa indem wir allen diesen direkt reduziblen Normalformeln, je nachdem sie mit τ, Π oder Σ beginnen, als Reduzierte bzw. 0, W_R, W_F zuordnen.

Damit ist P restlos definiert. Es gilt aber zu zeigen, daß es der Bedingung T' am Anfange dieses Paragraphen für $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma, g_{\sigma+1}$ und genügt.

Betrachten wir zunächst die Gruppen $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$. Man beachte: lle hier auftretenden Typen gehören zu den Gruppen $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$, oder ie sind echte Teiltypen von solchen, d. h. sie gehören jedenfalls zu den ruppen $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$. Hier ist aber P mit P^* übereinstimmend, und P^* rfüllt seinerseits unsere Bedingungen für $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$ und $\bar{p}'$.

Es genügt also in diesem Falle zu beweisen, daß jede reduzierte Normalformel, deren Grad $< \bar{p}$ oder $\leqq \bar{p}$ in P ist, in P^* einen Grad hat, er $< \bar{p} \cdot 2^{(\eta\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}}$ bzw. $\leqq \bar{p} \cdot 2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}}$ ist. Die reduzierten Normalfor- neln mit Graden $< \bar{p}$ bzw. $\leqq \bar{p}$ entstehen aus Grundkonstanten durch $< \bar{p}$- bzw. $\leqq \bar{p}$-maliges Anwenden von Grundoperationen oder Typen aus $_1, g_2, \ldots, g_\sigma, g_{\sigma+1}$ und nachfolgendes Reduzieren nach P. War nun der etzte Schritt dieser Herstellung das Anwenden eines Typus aus $g_{\sigma+1}$, so rhalten wir, falls der Typus mit τ beginnt, eine reduzierte Normalformel it einem Grade in P^* gleich einem der $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}$, und wenn er it Π oder Σ beginnt, die Grundkonstante W_R oder W_F. Der Grad in P^* t also jedenfalls $\leqq \mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}})$. Wenn nun der letzte Schritt icht das Anwenden eines Typus von $g_{\sigma+1}$ war, so können wir die redu- erte Normalformel immerhin aus Grundkonstanten und aus solchen, bei enen der letzte Schritt Anwenden eines Typus von $g_{\sigma+1}$ war, durch $< \bar{p}$- bzw. $\leqq \bar{p}$-maliges Anwenden von Grundoperationen oder Typen von $, g_2, \ldots, g_\sigma$ (ohne $g_{\sigma+1}$) und nachfolgendes Reduzieren gewinnen. Da ierbei das Reduzieren nach P dasselbe ist, wie dasjenige nach P^*, so t der Grad nach P^* in diesem Falle $< \mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) + \bar{p}$ bzw. $\leqq \mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) + \bar{p}$.

Wir müssen also beweisen, daß

$$\mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) + \bar{p} \leqq \bar{p} \cdot 2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}}$$

t. Das ist aber der Fall, denn es ist allgemein

$$\gamma_1 \leqq \bar{p} \cdot 2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-1},$$

$$\gamma_{\nu+1} \leqq \mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu-1},$$

so

$$\mathrm{Max}\,(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{p-1}}) \leqq \bar{p}\,(2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-1} + 2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-2} + \ldots)$$
$$\leqq \bar{p}\,(2^{(\varphi\,(\bar{p}-1))^{\bar{n}}} - 1),$$

e behauptet wurde.

Nun können wir auf die Gruppe $g_{\sigma+1}$ übergehen. Die Reduzierten der $^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Pi^{(x_q)}(r_\nu)$, $\Sigma^{(x_q)}(r'_\nu)$ nach P werden hier durch die Definitionen (ν) geben; die Reduzierten der Subst $\binom{x_q}{b} r_\nu$ und Subst $\left(\begin{smallmatrix} x_q \\ \text{Red. von } \tau^{(x_q)}(r_\nu) \end{smallmatrix}\right) r_\nu$ er berechnen sich mit Hilfe von echten Teiltypen der Typen aus $g_{\sigma+1}$, h. mit zu $g_1, g_2, \ldots, g_\sigma$ gehörigen Typen: Hier ist also P mit P^* über- stimmend.

Hieraus folgt aber, wenn wir uns die Definitionen (ν) vergegenwärtigen, daß alles in Ordnung ist, wenn für jedes ν gleich $1, 2, \ldots, k_{\bar{p}-}$ das Folgende gilt: Wenn die Reduzierte von Subst $\left(_{\text{Red. von } \tau^{(x_q)}(r_\nu)}^{x_q}\right)$ (nach P oder P*, beides besagt hier dasselbe) zu R gehört, so gehört auch die Reduzierte eines jeden Subst $\binom{x_q}{b} r_\nu$ zu R, falls b in P einen Grad $\leqq p$ hat. Dies ist aber sicher der Fall, wenn b in P* einen Grad $\leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu}$ hat. Da nun ein b mit einem Grade $\leqq \bar{p}$ in P jedenfalls einen Grad $\leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) + \bar{p}$ in P* hat (die wurde vorhin gezeigt), so genügt es zu zeigen:

$$\text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) + \bar{p} \leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu}.$$

Dabei ist zu beachten, daß nach (ν) die Reduzierte von Subst $\left(_{\tau^{(x_q)}(r_\nu)}^{x_q}\right)$ nach P* nur dann zu R gehören kann, wenn $\tau^{(x_q)}(r_\nu)$ die Reduzierte hat, also γ_ν gleich 0 ist.

Aus

$$\gamma_{\mu+1} \leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_\mu) + \bar{p} \cdot 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\mu-1}$$

folgt aber

$$\begin{aligned}\text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{k_{\bar{p}-1}}) &\leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) + \bar{p} \cdot (2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu-1} + 2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu-2} + \\ &\leqq \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_\nu) + \bar{p} \cdot (2^{(\varphi(\bar{p}-1))^{\bar{n}}-\nu} - 1).\end{aligned}$$

Wir sind also am Ziele, wenn

$$\text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}) = \text{Max}(\gamma_1, \ldots, \gamma_{\nu-1}, \gamma_\nu)$$

ist. Dies trifft natürlich im allgemeinen nicht zu, in dem von uns betrachteten Falle wird es aber wegen $\gamma_\nu = 0$ richtig sein.

Also besitzt P alle gewünschten Eigenschaften. Damit sind wir in der Lage, die Reduktionsregel $\mathsf{P}_\in$ und folglich eine Teilwertung $R_\in$, F für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) herzustellen. Die Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) ist also bewiesen.

6. Bemerkungen zur Funktionengruppe und zur Definitionengruppe.

Der Beweis der Widerspruchsfreiheit der Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—V) d. h. von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV) und Funktionengruppe, ist, wie es schon erwähnt wurde, bisher nicht gelungen. Ich glaube indessen die Vermutung aussprechen zu dürfen, daß der Widerspruchsfreiheitsbeweis auch hier mit denselben Mitteln durchzuführen sein wird, wie bei $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ (I—IV), d. h. durch Angabe einer Teilwertung $R_\in$, $F_\in$, bzw. eines Systems von entsprechenden Reduktionsregeln $\mathsf{P}_\in$.

Es bestehen nämlich gewisse Analogien zwischen den Gruppen IV und V. Ein typisches Axiomenschema der Gruppe IV, das bereits alle Schwierig-

eiten des Widerspruchsfreiheitsbeweises von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{IV})$ in sich enthält, st das Schema 2 (zusammen mit dem „definitorischen" Schema 3):

$$\mathrm{Subst}\binom{x_p}{b} a \rightarrow \Sigma^{(x_p)}(a).$$

Dem gegenüber lautet das einzige Schema der Gruppe V:

$$\Sigma^{(x_p)}(\Pi^{(x_q)}(Z x_q \rightarrow (\Phi(x_p, x_q) = a')))$$

wobei in a' höchstens x_q frei vorkommt). Ein gewisser Parallelismus st unverkennbar: beidemal wird die „Wahrheit" von $\Sigma^{(x_p)}(a)$ verlangt, inmal auf Grund eines Beispiels, nämlich der Prämisse $\mathrm{Subst}\binom{x_p}{b} a$, das as andere Mal auf Grund der Form von a, $\Pi^{(x_q)}(Z x_q \rightarrow (\Phi(x_p, x_q) = a'))$. Man kann das eine als das vom Begriff „alle", das andere als das vom Begriff „Menge" oder „Funktion" herrührende „imprädikative" Element er Mathematik ansehen). Beim Widerspruchsfreiheitsbeweise für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{IV})$ urden alle Reduzierte der $\tau^{(x_q)}(a)$ in der Tat den Beispielen b gemäß ewählt, sofern sich solche bei der Benützung der Schemata 1, 2 der ruppe IV von selbst ergaben. Beim Widerspruchsfreiheitsbeweise für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{V})$ darf man bei Formeln $\Sigma^{(x_p)}(a)$ mit einem a von der oben ngegebenen Form nicht erst auf das zufällige Auftreten von Beispielen ir das „Richtig" werden von $\Sigma^{(x_p)}(a)$ (genauer bei $\Pi^{(x_q)}(a)$ „falsch", und ei $\Sigma^{(x_p)}(a)$ „richtig") warten. Man muß sich vielmehr diese b durch eeignete Kunstgriffe unter allen Umständen herstellen. Dies scheint öglich zu sein, die vorhandenen Ansätze sind aber noch unvollständig.

Im Gegensatze zur Funktionengruppe ist die Definitionengruppe ganz rmlos. Es ist leicht mit Hilfe der Widerspruchsfreiheit von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{IV})$ e von $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{IV}, \mathrm{VI})$ zu beweisen; und ebenso einfach kann auch ezeigt werden, daß wenn $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{V})$ widerspruchsfrei ist, $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{VI})$, h. $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ es auch sein wird. Dies zeigt, daß die gesamte noch vorndene Schwierigkeit beim Widerspruchsfreiheitsbeweise für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{V})$ egt und durch die Funktionengruppe verursacht wird.

Der vorhin erwähnte Widerspruchfreiheitsbeweis für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{IV}, \mathrm{VI})$ er, sobald $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{V})$ erledigt ist, wörtlich auf $\mathfrak{M}\mathfrak{R}(\mathrm{I}-\mathrm{VI})$ übertragen erden kann) beruht auf dem einfachen Prinzip der Ersetzung des Defierten durch das Definierende, d. h. der linken Seite der auf Grund der hemata der Definitionsgruppe gewonnenen Axiome durch die rechte Seite. abei sind allerdings einige Vorsichtsmaßregeln einzuhalten. Immerhin gt die Idee dieses Verfahrens auf der Hand und darum wollen wir hier rauf nicht näher eingehen.

II. Zusammenfassende und vergleichende Bemerkungen

A. Die Herleitung der Mathematik.

Wir wollen im folgenden kurz andeuten, wie die Herleitung der Mathematik mit Hilfe der Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ zu erfolgen hat. Zunächst muß der rein logische Teil ausgenützt werden. Wir haben ja nur eine einzige logische Schlußweise, den Syllogismus:

Wenn $a, a \to b$ beweisbar sind, so ist es auch b. Die Mathematik benützt aber auch andere Schlußweisen, so z. B. die Fallunterscheidung:

Wenn $a \to b$, $\sim a \to b$ beweisbar sind, so ist es auch b; und noch einige andere. Mit Hilfe geeigneter Kombinationen der Axiome der logischen Gruppe und der (syllogistischen) Schlußregel können wir nun aber auch die übrigen Schlußweisen verschaffen, so z. B. bei der Fallunterscheidung:

$a \to b$, $\sim a \to b$ seien beweisbar. Setzen wir in das Schema 6 der Gruppe I die Normalformeln a, b ein, so entsteht das Axiom $(a \to b) \to ((\sim a \to b) \to b)$. Da $(a \to b)$ und $(a \to b) \to ((\sim a \to b) \to b)$ beweisbar sind, so ist es auch $(\sim a \to b) \to b$. Da $(\sim a \to b)$ und $(\sim a \to b) \to b$ beweisbar sind, so ist es auch b. Also: wenn $a \to b$ und $\sim a \to b$ beweisbar sind, so ist es auch b.[9]).

Nachdem wir so die erforderlichen logischen Schlußweisen alle gesichert haben, können wir zu den ganzen positiven Zahlen übergehen. In der Gruppe III fehlt ja noch das Prinzip von der vollständigen Induktion. Wir können dasselbe so formulieren:

$$(\mathrm{J}) \quad H^{(x_1)}\Big((\Phi(x_1, 0) \,\&\, H^{(x_2)}\big((Zx_2 \,\&\, \Phi(x_1, x_2)) \to \Phi(x_1, x_2 + 1)\big)\Big) \to H^{(x_2)}(Zx_2 \to \Phi(x_1, x_2))\Big).$$

(Der „Sinn" dieser Formel ist nämlich der folgende: Es ist für alle Aussagen x_1 wahr, daß, wenn x_1 für 0 zutrifft, und wenn für jede Zahl aus dem Zutreffen von x_1 für x_2 auch sein Zutreffen für $x_2 + 1$ folgt, diese Aussage x_1 für alle Zahlen x_2 zutrifft. Das ist aber das Prinzip von der vollständigen Induktion.)

Nun ist es aber natürlich nicht möglich (J′) zu beweisen. Um diese Lücke auszufüllen, nehmen wir die Definitionsgruppe zu Hilfe. Wir betrachten dasjenige $\Omega^{(1)}_{2,v}$, dessen $b^{(1)}_{2,v}$ die Form

---

[9]) Es ist naheliegend, die logischen Axiome durch die auf ihnen beruhenden logischen Schlußweisen zu ersetzen. Man müßte an Stelle der einzigen, syllogistischen Schlußregel mehrere einführen, dafür würden die (ziemlich willkürlich gebauten) Axiomen-Schemata der Gruppe I wegfallen. Wir haben auf einen derartigen Aufbau verzichtet, weil er sich vom gewohnten zu radikal unterscheidet.

$$\& \Pi^{(x_1)}\Big(\big(\Phi(x_1, 0) \& \Pi^{(x_2)}((Zx_2 \& \Phi(x_1, x_2)) \to \Phi(x_1, x_2+1))\big) \to \Phi(x_1, x_3)\Big)$$

at (x_{p_1} ist hier x_3), und ändern dieses $\Omega^{(1)}_{2,v} a_1$ in $\mathfrak{Z} a_1$ ab. Für diese peration beweist man dann leicht die Normalformeln, die aus den fol-enden Schemen entstehen:

$$\mathfrak{Z} a \to Za,$$

$$\mathfrak{Z} 0,$$

$$\mathfrak{Z} a \to \mathfrak{Z}(a+1),$$

$$(J') \quad \Pi^{(x_1)}\Big(\big(\Phi(x_1, 0) \& \Pi^{(x_2)}\big((\mathfrak{Z} x_2 \& \Phi(x_1, x_2)) \to \Phi(x_1, x_2+1)\big)\big)$$

$$\to \Pi^{(x_2)}(\mathfrak{Z} x_2 \to \Phi(x_1, x_3))\Big).$$

Wenn wir noch

$$(a+1 = b+1) \to (a = b)$$

nzunehmen, so sehen wir, daß wir in $\mathfrak{Z}$ einen vollständigen Zahlbegriff den Händen haben, der nicht nur alle Eigenschaften von Z besitzt, ndern auch die Eigenschaft (J'), die vollständige Induktion, welche dem abging. Und dabei ist, was für die Axiome der Funktionengruppe esentlich ist, der Zahlenbegriff $\mathfrak{Z}$ enger als Z.

Mit dieser Operation $\mathfrak{Z}$, die die Eigenschaft „Nicht negative ganze hl zu sein" vertritt, und dem Schema der Funktionengruppe können r nun die Mathematik ohne weitere Schwierigkeiten aufbauen. Die elle Zahl ist dabei als Funktion von positiven ganzen Zahlen anzusehen, as ihrer Einführung durch Fundamentalfolgen oder Dedekindsche hnitte gut entspricht.

Etwas Vorsicht ist noch bei der „Gleichheit" geboten. Wir müssen zwei Funktionen a, b, für die $\Pi^{(x_1)}(\Phi(a, x_1) = \Phi(b, x_1))$ gilt, als eich, d. h. als dieselbe reelle Zahl repräsentierend, ansehen. Nun wird er

$$\Pi^{(x_1)}(\Phi(a, x_1) = \Phi(b, x_2)) \to (a = b)$$

t der Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ sicher nicht allgemein beweisbar sein.

Aber auch hier kann durch eine Definition Abhilfe geschaffen werden: ir nehmen dasjenige $\Omega^{(2)}_{1,v}$, dessen $b^{(2)}_{1,v}$ die Form

$$\Pi^{(x_1)}(\Phi(x_2, x_1) = \Phi(x_3, x_1))$$

(x_{p_1}, x_{p_2} sind hier x_2, x_3), und ändern dieses $\Omega^{(2)}_{1,v}(a_1, a_3)$ in $a_1 \equiv a_2$. Bei reellen Zahlen verwenden wir dann an Stelle der Gleichheits-eration = stets diese neue Gleichheitsoperation $\equiv$. Natürlich muß dann allen späteren Begriffsbildungen für reelle Zahlen von Fall zu Fall viesen werden, daß sie sich gegenüber dieser Gleichheitsoperation $\equiv$

invariant verhalten, was für die Operation $=$ durch das Schema 3 d
Gruppe II

$$(a = b) \rightarrow \left(\text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ a \end{pmatrix} c = \text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ b \end{pmatrix} c\right)$$

garantiert war.

Für solche Ausdrücke, die das τ enthalten, wird das im allgemeine
gar nicht der Fall sein, d. h.

$$(a \equiv b) \rightarrow \left(\text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ a \end{pmatrix} c \equiv \text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ b \end{pmatrix} c\right)$$

wird im allgemeinen für $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ nicht beweisbar sein, wenn c Symbole
enthält. (Unter „nicht-beweishar" verstehen wir natürlich nur, daß
inplausibel ist, daß ein solcher Beweis gelingt, da der genannte Sa
außerhalb der Tragweite unserer Axiome zu liegen scheint; ein Nachwe
der „Unbeweisbarkeit" wird hier natürlich nicht angestrebt.) Nur in zw
Fällen gelten hier wesentliche Einschränkungen:

I. Die Invarianz ist gesichert, wenn in c nicht τ, sondern nur
und Σ auftreten.

II. Sie ist es auch dann, wenn Symbole τ zwar auftreten, aber h
jedem auftretenden $\tau^{(x_n)}(a)$ (a eine Formel von der Form $\sim a'$ mit d
einzigen freien Variablen x_n)

$$\Sigma^{(x_n)}(a') \;\&\; \Pi^{(x_p)}(\Pi^{(x_q)}\left(\left(\text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ x_q \end{pmatrix} a' \;\&\; \text{Subst}\begin{pmatrix} x_n \\ x_q \end{pmatrix} a'\right) \rightarrow (x_p = x_q)\right))$$

bewiesen ist; d. h. wenn (in der Sprache der klassischen Mathematik) e
und nur ein Ding als τ in Betracht kommt.

Diese Umstände haben die folgende wichtige Konsequenz: Auf Gru
der Axiomenschemata der Gruppe IV (z. B. 2) könnte man glauben, daß
das Zermelosche Auswahlprinzip auch involviert. Dies ist nun für d
reellen Zahlen nicht der Fall, weil für $\equiv$ im allgemeinen kein Analog
des Schemas 3 der Gruppe II existiert. Nur in gewissen speziellen Fäll
ist das τ so verwendbar, daß man dabei die elementaren Eigenschafte
der Gleichheit nicht verletzt, nämlich wenn man es bloß zur Formulieru
von Sätzen mit „alle" und „es gibt" benützt (I) oder wenn man a
Mengen mit einem einzigen Elemente auswählt, d. h. eineindeutige Rel
tionen umkehrt (II). Das sind aber beides Prozesse, die die klassisch
Mathematik auch ohne Auswahlprinzip durchführen kann.

Zu den übrigen wesentlichen Anwendungen des Auswahlprinzipes, w
es mit dem Begriffe der Gleichheit verknüpft ist, ist das τ aber nic
verwendbar. (Das bezieht sich in erster Linie auf die Sätze von d
Wohlordenbarkeit des Kontinuums, der Existenz einer nach Lebesg
unmeßbaren Menge usw.) Diejenigen Schlußweisen, in denen das A

ahlprinzip zwar benützt wird, aber ohne Verknüpfung mit der Gleich-
eit, bleiben erhalten; es sind Sätze, wie die folgenden: Abzählbar viele
bzählbare Mengen haben eine abzählbare Vereinigungsmenge, abzählbar
iele 0 Mengen (nach Lebesgue) haben eine Vereinigungsmenge, die
uch 0 Menge ist, jede unabzählbare Zahlenmenge hat mindestens einen
nabzählbaren Häufungspunkt usw.

(Daß das Auswahlprinzip verloren geht, liegt daran, daß τ zur Aus-
age und nicht zur Menge gehört, und für gleichbedeutende Aussagen,
it denselben „Mengen", verschiedene Werte haben kann. Durch ein
xiomenschema wie

$$\Pi^{(x_n)}(a \rightleftarrows b) \rightarrow (\tau^{(x_n)}(a) = \tau^{(x_n)}(b))$$

önnte dies verhindert und das Auswahlprinzip indirekt gesichert werden.
b aber für dieses Schema der Widerspruchsfreiheitsbeweis mit den heutigen
itteln gelingen kann, ist fraglich.)

Zusammenfassend können wir sagen: Die Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ erlaubt
en Aufbau eines Formalismus, der die ganze klassische Mathematik enthält,
s auf das Auswahlprinzip. Beim Auswahlprinzip, sowie bei allen über
e reellen Zahlen hinausgehenden Mengenbildungen, wird automatisch eine
ewisse Selektion geübt, die alles, was mehr zur abstrakten Mengenlehre
ehört als zur Mathematik, eliminiert. Die Axiomenregel $\mathfrak{M}\mathfrak{R}$ umfaßt
en bloß jenes Minimum an Mengenlehre, welches für die klassische
athematik unbedingt erforderlich ist.

B. Bemerkungen zur Arbeit von W. Ackermann.

1. Formalismus und Axiome.

In diesen letzten zwei Paragraphen möchte ich noch einige Bemer-
ngen über die bereits zitierte Arbeit von W. Ackermann machen, die
eselben Dinge behandelt wie die vorliegende Arbeit. Zunächst sollen
ckermanns Formalismus und Axiomatik mit dem vorliegenden ver-
ichen werden.

Wie bereits in dem § I A 1 erwähnt wurde, operiert Ackermann
n Anschluß an Hilbert mit den drei Klassen der Funktionale, Funk-
nen und Formeln, die alle unseren Formeln entsprechen. Von den
nktionen werden wir zunächst bloß die der ersten und einfachsten Stufe
trachten: Funktionen *eines* Arguments, das Grundvariable ist, d. h. die
chtnegativen ganzen Zahlen durchläuft. Zeichen wie Za erübrigen sich,
es in diesem Formalismus den Zeichenkombinationen unmittelbar an-
sehen ist, ob sie Funktionale (d. h. nichtnegative ganze Zahlen), Funk-
nen oder Formeln sind.

Eine weitere Abweichung unseres Formalismus vom Hilbert-Ackermannschen tritt beim Beweisen auf. Es werden nämlich nicht nur Normalformeln, sondern beliebige Formeln betrachtet, wobei für die freien Variablen nachher noch eingesetzt werden darf. Und demgemäß lautet die Definition der Beweisbarkeit (nur für Formeln, für Funktionale und Funktionen ist es sinnlos vom Beweisen zu sprechen, da sie keine Aussagen sind) folgendermaßen:

I. Alle Axiome sind beweisbar.

II. Wenn eine Formel a bereits als beweisbar erkannt ist, so ist auch jede Formel $a(b)$ beweisbar. $a(b)$ bedeutet dabei dasselbe, was Subst $\binom{x_n}{b} a$ in unserer Terminologie; für b ist je nach dem Charakter der substituierten Variablen ein Funktional, eine Funktion oder eine Formel einzusetzen.

III. Wenn die Formeln a und $a \rightarrow b$ bereits als beweisbar erkannt sind, so ist auch b beweisbar.

Indessen ist diese Abweichung unwesentlich. Man könnte sich nämlich ohne wesentliche Einschränkung darauf beschränken, daß II nicht auf beliebige beweisbare Formeln, sondern bloß auf Axiome angewandt wird. Und dann kommt der ganze Unterschied darauf heraus, daß das, was wir „Axiomenschema" nannten, „Axiom" heißt, und das, was wir Axiom nannten, „durch Einsetzung in ein Axiom entstandene Formel" heißt.

Wesentlich aber ist die Regel, nach der diese Einsetzungen gehandhabt werden sollen. Die Intention ist nämlich bei Ackermann die folgende:

A. Für eine Grundvariable x (d. h. eine positive ganze Zahlen darstellende Variable) sollen nur solche Formeln eingesetzt werden die gar keine freien Variablen haben; oder aber wenigstens keine solche Variable frei enthalten, die an Stellen, wo x frei steht, gebunden sind.

B. Bei einer Funktionsvariablen f, die stets in der Kombination $f(x)$ vorkommt (x eine Grundvariable; für $f(x)$ würden wir $\Phi(f, x)$ schreiben), wird nicht f, sondern das ganze $f(x)$ ersetzt: und zwar durch Formeln, die x auch dann frei enthalten dürfen, wenn es an der Stelle, wo f frei steht, gebunden ist. Auf alle von x verschiedenen Variablen beziehen sich dieselben Einschränkungen, wie in A.

Dies ist nun ganz wesentlich, denn in unserem Formalismus kommt bei den entscheidenden Einsetzungen, nämlich denen von b in den Schemata 1, 2 der Gruppe IV nur das enge Verfahren A in Betracht und nicht das weitere Verfahren B.

Dieser Unterschied wird dann dadurch kompensiert, daß Ackermann keine „Funktionengruppe" braucht: Die Existenz aller notwendigen Funk-

nen folgt bei ihm schon aus den Axiomen derjenigen Gruppe, die serer τ-Gruppe entspricht. Wir werden gleich zeigen, wie dies ge-hehen muß; daß es gelingt, beruht natürlich auf der weiteren Ein-tzungsregel B.

Übrigens werden etwas andere Symbole benützt, statt $\tau^{(x_n)}(a)$, $^{(x_n)}(a)$, $\tau^{(x_n)}(\sim a)$, $\Sigma^{(x_n)}(a)$ wird $\varepsilon_{x_n}(\sim a)$, $(x_n)a$, $\varepsilon_{x_n}(a)$, $(Ex_n)a$ ge-hrieben. Ferner ist noch ein Zeichen $\pi_{x_n}(a)$ da, welches $=1$ für $(Ex_n)a$ und sonst $=0$ ist. Primär sind ε, π (eigentlich nur ε), die Zeichen $_n)$ und (Ex_n) werden mit Hilfe von ε, π definiert[10]).

Die unserem Funktionen-Axiomenschema

$$\Sigma^{(x_p)}\left(\Pi^{(x_q)}\left(Zx_q \rightarrow (\Phi(x_p, x_q) = a)\right)\right)$$

a kommt höchstens x_q frei vor) entsprechende Formel lautet

$$(Ef)(x)(f(x) = a)$$

Grundvariable, f Funktionsvariable, a eine Formel, in der höchstens x i vorkommt). Dies ist, wie gesagt, in diesem Systeme beweisbar. Man ht von dem unserer Gruppe IV entsprechenden ε_f-Axiom

$$A(f) \rightarrow A\left(\varepsilon_f(A(f))\right)$$

s, und setzt für $A(f)$ den Ausdruck $(x)(f(x) = a)$ ein:

$$(x)(f(x) = a) \rightarrow (x)\left(\varepsilon_f((x)(f(x) = a))(x) = a\right)$$

raus man leicht

$$(x)(f(x) = a) \rightarrow (Ef)\left((x)(f(x) = a)\right)$$

hält. Setzt man nun a für $f(x)$ ein, so wird:

$$(x)(a = a) \rightarrow (Ef)\left((x)(f(x) = a)\right).$$

aber $(x)(a = a)$ leicht beweisbar ist, kommt man zur gewünschten rmel

$$(Ef)(x)(f(x) = a).$$

Wenn man nun an Stelle von $\varepsilon_f\left((x)(f(x) = a)\right)$ das Zeichen φ schreibt es kommt auf einen unbedenklichen Definitionsprozeß heraus), so ist:

$$\varphi(x) = a.$$

es kann auch so formuliert werden: Definitionen von der Form $\varphi(x) = a$ nnen auf keine neuen Widersprüche führen.

[10]) Um unsere Bezeichnungen nicht zu sehr modifizieren zu müssen, weichen noch immer etwas von Ackermanns Terminologie ab. So bezeichnet er Grund iable nicht mit $x, y, \ldots$, sondern mit $a, b, \ldots$ usw.

Wenn man aber im Besitze der Definitionen $\varphi(x) = a$ ist, d. h. jed Ausdruck durch eine Funktion darstellen kann, so ist es ein leichtes, au die Definitionen der Funktionen durch vollständige Induktionen zu b gründen. Man kann aus

$$\varphi(x) = a$$

mit den bekannten mengentheoretischen Methoden

$$(Ef)\Big((f(0) = a) \,\&\, (x)\big(f(x+1) = b(x, f(x))\big)\Big)$$

erschließen. (Hier sind a, b Funktionale, in a kommt keine Variable f vor, in b nur die durch x und $f(x)$ ersetzten.) Daraus folgt dann, wenn m

$$\varepsilon_f\Big((f(0) = a) \,\&\, (x)\big(f(x+1) = b(x, f(x))\big)\Big) = \varphi$$

setzt, die Widerspruchfreiheit aller Definitionen

$$(\mathrm{F}_2) \qquad \begin{aligned} \varphi(0) &= a \\ \varphi(x+1) &= b(x, \varphi(x)). \end{aligned}$$

Dieses letztere Definitionsprinzip, welches, wie wir soeben zeigt ohne weiteres aus den früheren Axiomen herleitbar ist, wird in Ackerman Arbeit selbständig eingeführt, und kompliziert die Widerspruchfreihei Untersuchungen ziemlich.

Schließlich ist noch bei den nicht-negativen ganzen Zahlen ein wisser Unterschied da: wir hatten auf eine sofortige Sicherung des Pr zips der vollständigen Induktion verzichtet und dasselbe erst nachträgli mit Hilfe von Axiomen der Definitionsgruppe eingeführt. In Ackermannschen Arbeit wird dieses Prinzip durch geeignete Axiome der Zahlengruppe und der „transfiniten" Gruppe (analog unserer Gruppe I von Anfang an postuliert.

2. Beweis der Widerspruchsfreiheit.

Wir sahen, daß der formalistische Ansatz bei Ackermann, tr einiger mehr oder weniger wesentlicher formaler Unterschiede, zunäch genau den gleichen Umfang hat, als der unsere, d. h. daß sich mit sei Hilfe dieselben Teile der Mathematik begründen lassen, wie mit unsere Aber der in den Teilen II, III seiner Arbeit gelieferte Widerspruchsfreihei beweis ist kein lückenloser Beweis der Widerspruchsfreiheit dieses Syste Es liegt also auch hier kein vollständiger Widerspruchsfreiheitsbeweis v Wir wollen diesen Umstand noch etwas näher beleuchten.

Wir sahen nämlich, daß es für die Herleitung des dem Funktion schema analogen Satzes absolut wesentlich ist, daß im Axiom

$$A(f) \to A\big(\varepsilon_f(A(f))\big)$$

x) durch jeden Ausdruck a, in dem x frei vorkommt, ersetzt werden nn. Im Beweise wird aber so operiert, als ob bloß Einsetzungen von ndividualen Funktionen" φ für f möglich wären, d. h. f wird so ersetzt, ; ob es eine Grundvariable wäre. Und es ist am ganzen Beweisgange ar, daß man die weitere Einsetzung für Funktionsvariable gar nicht an-enden kann, ohne den Beweis zu zerstören.

Wenn man nun immer mit der engen Einsetzungsregel A aus § II B 1 er Einsetzung der Grundvariablen) operiert, so braucht man ein Funk-nsaxiom. Nun sind ja die Definitionsaxiome

$$_2) \qquad \varphi(0) = a, \qquad \varphi(x+1) = b(x, f(x))$$

, die überflüssig waren, solange die Einsetzungsregel B aus § II B. 1 r Verfügung stand, jetzt aber sehr wertvoll sind. Denn ihr Spezialfall

$$_1) \qquad \varphi(x) = a$$

mit dem Funktionsaxiom gleichbedeutend.

Indessen ist auch dies keine Rettung. Denn eben mit Rücksicht auf e weitere Einsetzungsregel B für Funktionsvariable verbot Ackermann f Seite 10, daß b in (F_2), also a in (F_1), Symbole ε und π enthielt. es ist in der Tat unschädlich, solange die Einsetzungen gemäß der gel B erlaubt sind (weil dann sowohl (F_1) als (F_2) vollkommen über-ssig ist), in der vorliegenden Lage ist es aber verhängnisvoll, da das nktionsaxiom dadurch unerreichbar wird.

Und das Verbot der ε, π in (F_1) ist für den Beweis auch wesentlich. nauer: die ε_x, π_x, deren Index x Grundvariable ist, könnten durch eine chte Abänderung des Beweises noch zugelassen werden, die für die ssische Mathematik absolut wesentlichen ε_f, π_f aber niemals. Denn in n Überlegungen des § III 7 bei Ackermann (Seite 21) muß jede re-rsiv definierte Individualfunktion einen niedrigeren Charakter, als jedes oder π_f haben. D. h. in der sogenannten Definitionsreihenfolge (S. 14 en) müssen ε_f, π_f jedenfalls ganz am rechten Ende nach allen Individual-nktionen stehen. In § III, 5 auf Seite 19 wird in der Tat erklärt, daß ε_f, π_f und sogar die ε_x, π_x, nach allen Individualfunktionen, ganz am hten Ende der Definitionsreihenfolge stehen. Wenn aber ein ε oder π denjenigen a, b, welche die Funktionen nach (F_1) oder (F_2) definieren, l auftreten dürfen, so muß es am linken Ende der Definitionsreihen-ge stehen: Sonst wird der Beweis, daß jedes Funktional in eines mit drigerem Index verwandelt werden kann (Seite 16, 17 und 19, 20) fällig. Wir sehen: ε_f, π_f gehören unbedingt ans rechte Ende der De-tionsreihenfolge, während für ε_x, π_x die Festsetzung des § III, 5 wohl geändert werden könnte.

Zusammenfassend können wir sagen: Von

A. Engere Einsetzungsregel; A′. ε_f, π_f in $(F_1), (F_2)$ verboten,

B. Weitere Einsetzungsregel; B′. alle ε, π in $(F_1), (F_2)$ erlaubt,

wäre sowohl B., als auch A. und B.′ zusammen hinreichend, um die klassische Mathematik aufzubauen. Mit dem Beweise bei Ackermann ist jedoch zunächst nur A. bewiesen, und er kann durch einfache Abänderungen keinesfalls über A. und A′. hinaus ausgedehnt werden.

Dieser Einsicht wird wohl der Zusatz bei der Korrektur auf Seite entsprechen, in dem die Benützung wesentlicher ε_f, π_f bei Anwendungen der weiteren Einsetzungsregel B. nachträglich verboten wird. Dies paralysiert natürlich die Einsetzungsregel B., ermöglicht aber die Rettung des Beweises, wenn er etwa im oben angedeuteten Sinne abgeändert wird.

Jedenfalls ist mit dem hier erreichbaren Maximum (A. und A′.) kein Widerspruchfreiheitsbeweis der klassischen Mathematik erreicht. Der dabei als widerspruchfrei erkannte Formalismus ermöglicht nur den Aufbau einer Mathematik, die den halb-intuitionistischen Mathematiken der Kritik der Mengenlehre und Analysis vor Brouwer entspricht, z. B. der Russellschen Mathematik *ohne* „Reduzibilitätsaxiom“ oder der Mathematik von Weyls „Kontinuum“.[11])

[11]) H. Weyl, Das Kontinuum. (Leipzig, 1918.) Russell-Whithehead, Principia Mathematica (Cambridge, 1910—13); Russell, Einführung in die mathematische Philosophie (deutsche Übersetzung, München 1923).

(Eingegangen am 29. Juli 1925.)

Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen.

Von

Julius Schauder in Lwów (Polen).

In seiner Inauguraldissertation betrachtet Herr Banach[1]) abstrakte Mengen E, in denen die Operation der Addition erklärt ist. Sein Axiomsystem ist dem folgenden gleichwertig:

I. E bildet eine kommutative (Abelsche) Gruppe mit der Addition als Verknüpfungsgesetz.

II. Für jedes Element e ist die Gleichung

$$e = 2 \cdot x, \qquad e \varepsilon E,$$

lösbar[2]).

Dabei bezeichnen wir mit $n \cdot x$ das durch n-malige Addition entstandene Element

$$n \cdot x = \overbrace{x + x + \ldots + x}^{n}.$$ [3])

III. E ist ein vollständiger Raum, in dem aber der Distanzbegriff gewisse Bedingungen erfüllt. Bezeichnen wir mit Norm eines Elementes e im Zeichen $\|e\|$ seine Entfernung von Null, so sei die Distanz $\overline{xy}$ zweier beliebiger Elemente x, y gleich:

$$\overline{xy} = \|x - y\|.$$

Weiter soll für jedes natürliche n

$$\|n \cdot e\| = n \cdot \|e\|$$

sein.

Aus diesen Axiomen folgert man leicht die drei ursprünglichen Bedingungen des Herrn Banach:

---

[1]) St. Banach, Operations dans les ensembles abstraits, Fundamenta Math. 3, 135.

[2]) Die Eindeutigkeit der Lösung folgt aus den übrigen Axiomen.

[3]) $+$ ist das Zeichen für die Addition.

1. Für jede reelle Zahl c und beliebiges e aus E ist das Element $c \cdot e$ eindeutig definiert.

2. E ist ein Modul in Bezug auf den Körper der reellen Zahlen.

3. $\|c \cdot e\| = |c| \cdot \|e\|$.

Außerdem bedürfen wir noch folgender Postulate:

IV. Es gibt in E eine feste endliche oder unendliche Folge von normierten „Basiselementen" $\{e_i\}$, $\|e_i\| = 1$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$, so daß jedes e aus E eine eindeutige Darstellung

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i, \tag{1}$$

d. h.

$$\lim_{n \to \infty} \left\| e - \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| = 0$$

zuläßt.

V. Für ein festes n ist der Koeffizient $c_n(e)$ eine „beschränkte Funktionaloperation" in E, d. h. es gibt eine Zahl M_n, so daß

$$\|c_n(e)\| \leqq M_n \cdot \|e\|, \qquad e \varepsilon E.$$

Eine den Axiomen I. bis V. genügende Gesamtheit von Dingen bezeichnen wir als ein lineares Vektorfeld V (mit endlicher oder unendlicher Basis B).

Alle in der Analysis vorkommenden Funktionalräume können bei entsprechender Normierung als Vektorfelder betrachtet werden.

a) Die Gesamtheit der im Intervalle $\langle a\, b \rangle$ stetigen Funktionen.

$$\|f\| = \operatorname{Max} |f|.$$

Um hier eine Basis zu finden, nehmen wir eine abzählbare in $\langle a\, b \rangle$ dichte Punktmenge $\{a_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ und definieren $\{e_i\}$ folgendermaßen:

Wir betrachten einerseits die Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, andererseits die Zahl a_n.

a_n liegt im Innern eines der Teilintervalle, in die die Punkte $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ das Intervall $\langle a\, b \rangle$ zerlegen. Nennen wir dieses Teilintervall ϑ_n, so soll e_n außerhalb ϑ_n gleich Null sein, im Punkte a_n den Wert 1 annehmen und sonst linear verlaufen.

Dann gilt für jede in $\langle a\, b \rangle$ stetige, für a und b verschwindende Funktion f

$$f = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i. \tag{2}$$

Die Reihe (2) konvergiert gleichmäßig. Um dies zu beweisen, fassen

ir die $(n+1)$-seitigen Polygone f_n ins Auge, die in $a, b, a_1, a_2, \ldots, a_n$ it $f(x)$ übereinstimmen. f_n ist eine lineare Kombination der $e_1, e_2, \ldots, e_n$

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i$$

id wir haben nur noch zu zeigen, daß die Differenz $f_{n+1} - f_n$ lediglich on e_{n+1} abhängt. Bezeichnen wir mit α_n resp. β_n das linke resp. rechte nde des Intervalls ϑ_n, so ist für alle x in $\langle a\,b\rangle$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x)$$

$$= \left[\frac{f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1})}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}(a_{n+1} - \alpha_{n+1}) + f(a_{n+1}) - f(\alpha_{n+1})\right] \cdot e_{n+1}(x),$$

h.

$$c_{n+1} = \frac{f(\beta_{n+1}) - f(\alpha_{n+1})}{\beta_{n+1} - \alpha_{n+1}}(a_{n+1} - \alpha_{n+1}) + f(a_{n+1}) - f(\alpha_{n+1}).$$

Die Entwicklung (2) ist eindeutig. Dies bedeutet, daß eine Beziehung n der Gestalt

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i(x)$$

r dann möglich ist, wenn alle c_i verschwinden. Der vorangehenden nstruktion nach ist nämlich

$$e_i(a_n) = 0 \quad \text{für} \quad i = n+1,\ n+2, \ldots,$$

$$e_n(a_n) = 1,$$

$$0 \equiv \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i(a_1) = c_1 e_1(a_1) = c_1 = 0.$$

Nehmen wir nun an als bewiesen, $c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}$ seien gleich Null, n folgt mit Hilfe von (4)

$$0 \equiv \sum_{i=n}^{\infty} c_i e_i(a_n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i(a_n) = c_n e_n(a_n) = c_n = 0.$$

Stetigkeit von $c_n(f)$ als Funktion von f ist eine unmittelbare Folge (3).

Lassen wir jetzt die Randbedingungen $f(a) = f(b) = 0$ fallen; wir alten so die folgende eindeutige Darstellung

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i,$$

. die Funktionen $1, x - a$, bilden mit $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty)$ eine voll- dige Basis.

b) Die Klasse aller Funktionen f, die im Lebesgueschen Sinn integrierbar sind

$$\|f\| = \int_a^b |f|\,dx.$$

Als Basis kann ein beliebiges abgeschlossenes und orthogonales Funktionensystem $\{\varphi_n(x)\}$ genommen werden, das den folgenden Bedingungen genügt:

1. $\varphi_n(x)$ sind beschränkt

$$|\varphi_n(x)| \leqq M_n.$$

2. Es gibt eine Zahl A, so daß für alle x und n

$$\int_a^b |\psi_n(x\,\xi)|\,d\xi \leqq A,$$

wenn

$$\psi_n(x\,\xi) = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x)\,\varphi_i(\xi)$$

gesetzt wird.

Bezeichnen wir mit $s_n(f)$ die n-te Partialsumme der Reihenentwicklung (nach dem Orthogonalsystem φ_n), so ist ohne weiteres klar, daß für jede samt ihrem Quadrat integrierbare Funktion die Limesbeziehung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f - s_n(f)|\,dx = 0. \tag{5}$$

Ist jetzt f eine L-, aber nicht notwendig L^2-integrierbare Funktion, so läßt sich die Relation (5) wie folgt beweisen:

Man kann immer eine L^2 integrierbare Funktion f_1 finden, so daß

$$\int |f - f_1|\,dx < \varepsilon \tag{6}$$

(ε eine beliebige positive Zahl).

Wir können dann $\int |f - s_n(f)|\,dx$ folgendermaßen abschätzen:

$$\int |f - s_n(f)|\,dx \leqq \int |f - f_1|\,dx + \int |f_1 - s_n(f_1)|\,dx + \int |s_n(f) - s_n(f_1)|\,dx$$

also für genügend großes n infolge der Beziehungen (5), (6) und der Voraussetzung 2

$$\int |f - s_n(f)|\,dx \leqq 2\varepsilon + \varepsilon A, \text{ [4]}$$

d. h.

$$\lim \int |f - s_n(f)| = 0.$$

---

[4]) $\int |s_n(f) - s_n(f_1)|\,dx \leqq \int dx \int |f(\xi) - f_1(\xi)| \cdot |\varphi_n(x\,\xi)|\,d\xi$
$= \int d\xi\,|f_1(\xi) - f(\xi)| \cdot \int |\varphi_n(x\xi)|\,dx \leqq A \int |f_1(\xi) - f_2(\xi)|\,d\xi \leqq \varepsilon A$

ie Eindeutigkeit von (5) und die Stetigkeit von $c_n(f) = \int_a^b f\varphi_n\,dx$ kann icht bewiesen werden.

Das bekannte Haarsche Orthogonalsystem erfüllt die Voraus- tzungen 1, 2. [5])

c) Die Gesamtheit von Funktionen f, die samt der p-ten $(p > 1)$ otenz integrierbar sind.

$$\|f\| = \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p\,dx}.$$

d) Die Gesamtheit der in abgeschlossenem Quadrate 00, 01, 11, 10, etigen Funktionen $f(xy)$.

$$\|f\| = \text{Max}\,\|f\|:$$

e) Die Gesamtheit der Funktionen $f(x, y)$, die in Q samt ihrer zweiten mischten Ableitung stetig sind und den Randbedingungen genügen

$$f(0, y) \equiv f(x, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(0, 0) = 0, \text{ [6])}$$

$$\|f\| = \text{Max}\,|f| + \text{Max}\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| + \text{Max}\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| + \text{Max}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x, y)\right|.$$

f) Die Gesamtheit der Potenzreihen einer komplexen Veränderlichen z

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| \leqq 1,$$

r die $\Sigma\,|a_n|$ konvergiert.

$$\|f\| = \Sigma\,|a_n|.$$

In allen vorangehenden Beispielen ist die gewöhnliche Addition als „Addition" des Postulats I gemeint.

Wir kehren jetzt zurück zur Untersuchung allgemeiner Vektorfelder V d ziehen aus unseren Postulaten vorerst einige allgemeine Schlüsse. nächst sehen wir sofort, daß für jedes e aus V

$$\lim_{n\to\infty} c_n(e) = 0,$$

h. die beschränkten Funktionaloperationen $c_n(e)$ konvergieren identisch ch der Funktionaloperation Null.

---

[5]) Ein die Voraussetzungen 1, 2 erfüllendes Orthogonalsystem erhält man z. B. endermaßen: Es sei $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ eine im Intervalle $\langle a\,b\rangle$ dichte Punkt- ge. Bezeichnen wir mit $\psi_n(x)$ eine Funktion, die in $\langle a\,a_n\rangle$ gleich 1 und sonst l ist. Das durch Orthogonalisierung und passende Normierung der $\{\psi_n\}$ ent- ende System $\varphi_n(x)$ erfüllt 1., 2.

[6]) Die Randbedingungen können in vielfacher Weise abgeändert werden.

Nach einem von Herrn Banach bewiesenen Satz[7]) folgt, daß die c_n gleichmäßig beschränkt sind, d. h. es gibt eine Zahl M so, daß:

$$|c_n(e)| \leqq M\|e\| \qquad (n = 1, 2, \ldots$$

Betrachten wir jetzt ein Vektorfeld mit unendlicher Basis $\{e_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, \infty$ Wir wollen zeigen, daß man in V unendliche, beschränkte Teilmengen fi den kann, die nicht kompakt sind. In der Tat bilden die normierten Bass elemente $\{e_i\}$ selbst eine solche Teilmenge ohne Häufungspunkt.

Nehmen wir nämlich an, die e_i hätten einen Häufungspunkt e. sei $\{e_n\}$ eine nach e konvergierende Teilfolge von $\{e_i\}$. Dann wä infolge von (7)

$$\lim_{n\to\infty} c_m(e_n) = c_m(e).$$

Da aber $\lim_{n\to\infty} c_m(e_n) = 0$, so ist auch $c_m(e) = 0$, d. h. e ist das Nu element. Das ist aber unmöglich, da die e_n normiert sind. Um also d Methoden der klassischen Analysis anwenden zu können, müssen wir u auf kompakte Teilmengen von V beschränken. Mit H bezeichnen w eine beliebige abgeschlossene, kompakte und konvexe Teilmenge von

Wir wollen den folgenden Satz beweisen:

Satz I[8]). *Gegeben sei eine stetige Funktionaloperation $F(e)$, d in H definiert ist und die jedem Elemente aus H wieder ein Eleme aus H zuordnet. Dann gibt es ein (zu H gehörendes) e_0, so daß*

$$e_0 = F(e_0).$$

Wir bezeichnen mit:

1. V_n ein lineares Vektorfeld mit endlicher Basis — n die Anza seiner Basiselemente,

2. H_n eine n-dimensionale zu V_n gehörende, beschränkte, abg schlossene und konvexe Teilmenge und beweisen zuerst den folgend Hilfssatz.

Hilfssatz. *Sei $F_n(e)$ eine Funktion, die jedem Punkte aus H wieder einen Punkt aus H_n zuordnet. Für ein gewisses Zahlenpaar ε_0 bestehe weiter die folgende Eigenschaft:*

$$\|F_n(e) - F_n(e')\| < \varepsilon_0, \quad \textit{sobald}$$

$$\|e - e'\| < \vartheta_0.$$

---

[7]) St. Banach, loc. cit. Satz 5.

[8]) Besondere Fälle dieses Satzes beweisen Birkhoff und Kellog in ihr Arbeit: Invariant points in function space. Transactions of the Amer. Math. So 23 (1922).

ann kann man in H_n ein Element e *finden derart, daß*

$$\| F_n(e) - e \| < 3\varepsilon_0.$$

Wir betonen ausdrücklich, daß die Funktion $F_n(e)$ keineswegs stetig sein braucht.

Beweis des Hilfssatzes. Nehmen wir zuerst an, H_n bestehe aus einem schlossenen, konvexen $(n-1)$-dimensionalen Polyeder C_{n-1} mitsamt inem Innern. In diesem Falle können wir H_n in n-dimensionale Simplexe [9]) rlegen, deren Breite kleiner als ε_0 und kleiner als ϑ_0 ist. Es sei $\bar{F}_n(e)$ ejenige „simpliziale“ [10]) Abbildung von H_n auf H_n, die in den Eckıkten unserer Zerlegung mit F_n übereinstimmt. $\bar{F}_n(e)$ ist stetig. Nach ıem bekannten Brouwerschen Satze besitzt also F_n einen zu H_n gerenden Fixpunkt e

$$e = \bar{F}_n(e).$$

trachten wir dasjenige Simplex S, zu welchem e gehört. Dann gehört (e) zum Bilde $\bar{F}_n(S)$ von S. Bezeichnen wir die Eckpunkte von S t $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{n+1}$, so ist (nach der Definition von $\bar{F}_n$) $\bar{F}_n(S)$ ein nplex mit den Eckpunkten $\bar{F}_n(\psi_1), \bar{F}_n(\psi_2), \ldots, \bar{F}_n(\psi_{n+1})$. Es folgt also:

$$\left.\begin{aligned} &\| \psi_i - e \| \leqq \text{Breite von } S \leqq \operatorname{Min}(\varepsilon_0 \vartheta_0) < \varepsilon_0, \\ &\| F_n(\psi_i) - \bar{F}_n(e) \| = \| F_n(\psi_i) - e \| \leqq \\ &\qquad \leqq \text{Breite von } \bar{F}_n(S) < \varepsilon_0 \end{aligned}\right\} i = 1, 2, \ldots, n+1$$

d endlich

$$\| F_n(\psi_i) - \psi_i \| < 2\varepsilon_0.$$

r allgemeine Fall eines beliebigen H_n erledigt sich leicht wie folgt:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir voraussetzen, daß den Nullpunkt $e = 0$ in seinem Innern enthält.

Wir konstruieren ein konvexes Polyeder C_{n-1}, das H_n in seinem *ıern* enthält. Wir bezeichnen mit $\bar{H}_n$ die aus C_{n-1} und seinem Innern tehende konvexe Menge. Betrachten wir jetzt einen Punkt e, der zu $\bar{H}_n$, r nicht zu H_n gehört. Sei e* derjenige zum Rande von H_n gehörende ıkt, der auf der Halbgeraden λe $(\lambda > 0)$ liegt.

Wir nehmen an, C_{n-1} sei derart konstruiert worden (was, wie leicht zusehen, immer möglich ist), daß

$$\| e - e^* \| < \operatorname{Min}\left(\varepsilon_0 \frac{\vartheta_0}{3}\right), \qquad e \varepsilon \bar{H}_n - H_n.$$

---

[9]) Nach L. E. J. Brouwer verstehen wir unter einem Simplex eine zu V_n gende Menge von Punkten e, die sich in der folgenden Weise darstellen lassen:

$$e = \sum_{i=1}^{n+1} c_i \psi_i, \qquad c_i \geqq 0, \qquad \sum_{i=1}^{n+1} c_i = 1.$$

$\{\}_{i=1,2,\ldots,n+1}$ sind feste, zu V_n gehörende „Ecken“ des betreffenden Simplex.

[10]) Diese Benennung entlehnen wir den Brouwerschen Arbeiten.

Wir definieren jetzt in $\bar{H}_n$ die Funktion $F_n^*(e)$. Sie stimme in H_n mit $F_n(e)$ überein, für einen zu $\bar{H}_n - H_n$ gehörenden Punkt sei aber

$$F_n^*(e) \overset{\text{df.}}{=} F_n(e^*), \qquad e \varepsilon \bar{H}_n - H_n.$$

Die Funktion F_n^* genügt in $\bar{H}_n$ der folgenden Bedingung:

$$\| F_n^*(e) - F_n^*(e') \| < \varepsilon_0,$$

sobald nur

$$\| e - e' \| < \frac{\vartheta_0}{3}, \qquad e, e' \varepsilon \bar{H}_n.$$

Nach dem eben behandelten Falle gibt es also in $\bar{H}_n$ einen Punkt e^* für den

$$\| e - F_n^*(e) \| < 2\varepsilon_0, \qquad e \varepsilon \bar{H}_n.$$

Gehört nun e zu H_n, so ist

$$F_n^*(e) = F_n(e),$$

also

$$\| F_n(e) - e \| < 2\varepsilon_0.$$

Gehört aber e zu $\bar{H}_n - H_n$, so ist

$$\| e - e^* \| < \varepsilon_0,$$
$$F_n^*(e) = F_n(e^*),$$

also wieder

$$\| e^* - F_n(e^*) \| \leqq \| e - e^* \| + \| e - F_n^*(e) \| \leqq 3\varepsilon_0, \qquad \text{q. e.}$$

Wir gehen jetzt zum Beweis des Hauptsatzes über.

Beweis des Satzes I. Das Element e gehöre zu H. Wir entwickeln nach der Basis $\{e_i\}$

$$e = \sum_{i=1}^{\infty} c_i e_i$$

und bezeichnen

$$s_n(e) = \sum_{i=1}^{n} c_i(e) e_i$$

$$R_n(e) = \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i e_i.$$

$s_n(e)$ nennen wir die Projektion des Elementes e auf das n-dimensionale Vektorfeld V_n mit der Basis $e_1, e_2, \ldots, e_n$. $\| R_n(e) \|$ konvergiert zugleich mit $\frac{1}{n}$ gleichmäßig in H nach Null. Man beweist dies am besten indirekt, indem man die Kompaktheit der Menge H ausnützt und die Beziehung (7) zur Hilfe nimmt.

Betrachten wir jetzt die Menge der Elemente $s_n(e)$ — n konstant — wenn e alle Punkte aus H durchläuft. Sie bilden eine beschränkte, konvexe und abgeschlossene Punktmenge H_n. H_n ist im Vektorfeld V_n ein

ebettet. Da die Funktion $F(\mathfrak{e})$ in H stetig ist, können wir die positive ahl $\vartheta(\varepsilon)$ so wählen, daß

3) $$\| F(\mathfrak{e}) - F(\mathfrak{e}') \| < \varepsilon,$$

enn

$$\| \mathfrak{e} - \mathfrak{e}' \| < \vartheta(\varepsilon)$$

> 0 und sonst beliebig).

Wir fixieren jetzt ε und bemerken, daß es nach dem eben Gesagten ne ganze Zahl $N(\varepsilon)$ gibt, so daß

9) $$\| R_n(\mathfrak{e}) \| < \operatorname{Min}\left(\frac{\vartheta(\varepsilon)}{3}, \varepsilon\right), \quad N \leqq n,$$

r alle $\mathfrak{e} \varepsilon H$.

Wir definieren jetzt in H_N eine Funktion F_N folgendermaßen: Es sei e n zu H_N gehörender Punkt. Dann gibt es nach der Definition von H_N enigstens ein Element $\mathfrak{e} \varepsilon H$, so daß

$$s_N(\mathfrak{e}) = e.$$

ir bezeichnen mit $M(e)$ die Menge derjenigen Punkte $\mathfrak{e}$ aus H, für die

0) $$s_N(\mathfrak{e}) = e$$

lt. Nach der Voraussetzung gehört das ganze Bild $F[M(e)]$ zu H und dlich gehört die Projektion von $F[M(e)]$ auf das Vektorfeld V_N gänzh zu H_N. Wir nennen diese Projektion $M_N(e)$, greifen aus $M_N(e)$ illkürlich einen Punkt e' und ordnen ihn dem entsprechenden Punkte e . Wir erhalten so eine Funktion $F_N(e)$, die folgende Eigenschaften sitzt:

1. F_N hat H_N als Definitionsbereich; ihr Bild gehört wieder zu H_N.
2. Es ist

$$\| F_N(e) - F_N(e_1) \| < 3\varepsilon,$$

nn

$$\| e - e_1 \| < \frac{\vartheta(\varepsilon)}{3}.$$

n diese Eigenschaften festzustellen, braucht man sich nur die Art und eise, in der F_N konstruiert wurde, zu vergegenwärtigen. Dabei beachte an die Beziehungen (8), (9), (10).

Nach dem oben bewiesenen Hilfssatze gibt es also ein $e \varepsilon H_N$, so daß

$$\| e - F_N(e) \| < 9\varepsilon.$$

e dasjenige Element aus H, das sich auf e projiziert und für welches

$$s_N[F(\mathfrak{e})] = F_N(e),$$

ist

) $$\| \mathfrak{e} - F(\mathfrak{e}) \| < 11\varepsilon.$$

Da man aber ein solches der Relation (11) genügendes Element e jedes beliebige $\varepsilon > 0$ finden kann, folgt schließlich aus der Kompaktheit und Abgeschlossenheit von H für ein gewisses e_0:

$$e_0 = F(e_0) \qquad \text{q. e.}$$

Anwendungen.

I. Wir betrachten eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung vom hyperbolischen Typus:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f(x, y, z, p, q). \tag{12}$$

Von der Funktion f setzen wir voraus, daß sie in einem 5-dimensionalen Intervall:

$$|x| \leqq d, |y| \leqq d, \ldots, |q| \leqq d \tag{13}$$

erklärt sei und dort in Bezug auf die Variablen x, y, z einer Hölderschen Bedingung mit der Konstanten C und dem Exponenten λ $(0 < \lambda < 1)$ in Bezug auf die Variablen p, q einer Lipschitzschen Bedingung mit derselben Konstante genüge

$$\begin{aligned} &|f(x_1 y_1 z_1 p_1 q_1) - f(x_2 y_2 z_2 p_2 q_2)| \\ &\leqq C(|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda + |z_1 - z_2|^\lambda + |p_1 - p_2| + |q_1 - q_2|) \end{aligned} \tag{14}$$

Wir machen noch die folgende einschränkende Annahme:

$$f(0, 0, 0, 0, 0) = 0. \tag{15}$$

Wir wollen nun eine Lösung $z(x\,y)$ von (12) bestimmen, für die

$$z(x\,0) \equiv z(0\,y) \equiv 0. \tag{16}$$

Der allgemeine Fall (ohne Annahme (15)) bei beliebigen Randwerten, die einer Hölderschen Bedingung genügende erste Abteilungen besitzen, läßt sich mittels einer bekannten Transformation auf den hier behandelten zurückführen.

Beweis. Es ist sofort ersichtlich, daß unsere Aufgabe mit der folgenden gleichwertig ist: die Lösung der Gleichung

$$z = \int_0^x \int_0^y f(x, y, z, p, q)\, dx\, dy \tag{17}$$

zu finden.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Gesamtheit Γ aller Funktionen $z(x\,y)$, die:

1. samt ihren zweiten gemischten Abteilungen stetig sind für

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d;$$

2. den Randbedingungen

$$z(x\,0) \equiv z(0\,y) = \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}(0,\,0) = 0$$

nügen. Diese Gesamtheit ist nichts anderes als das Vektorfeld e). Dann dnet die Funktionaloperation:

8) $$U[z(x\,y)] = \int_0^x \int_0^y f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy$$

der Funktion aus Γ wieder eine Funktion aus Γ zu, Diejenige Teilenge aus Γ, deren zweite gemischte Ableitung $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ eine Höldersche edingung mit der Konstanten M und dem Exponenten μ erfüllt, bildet Γ eine H-Menge. Wir bezeichnen sie genauer mit $H_{M\mu}$. Wir werden zt, unter eventueller Beschränkung auf ein kleineres Intervall

$$|x| \leqq d' < d; \qquad |y| \leqq d' < d,$$

und μ so zu bestimmen suchen, daß

9) $$z'(x\,y) = U[z(x\,y)]$$

eder zu $H_{M\mu}$ gehört.

Es sei nun $z(x\,y)$ eine Funktion, die zu $H_{M\mu}$ gehört. Nach der finition von $H_{M\mu}$ ist

) $$\left|\frac{\partial^2 z(x\,y)}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 z(x_2\,y_2)}{\partial x\,\partial y}\right| \leqq M[|x_1 - x_2|^{\mu} + |y_1 - y_2|^{\mu}]$$
$$|x_{1,2},\ y_{1,2}| \leqq d.$$

raus folgt

) $$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_1\,y_1) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_2\,y_2)\right| \leqq |y_1| \cdot M(|x_1 - x_2|^{\mu} + |y_1 - y_2|^{\mu}) + M|y_1 - y_2|(|x_2|^{\mu} + |y_2|^{\mu})$$

vie eine entsprechende Ungleichung für $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Wählen wir also d so, daß

$$2(|x_1 - x_2|^{\mu} + |y_1 - y_2|^{\mu}) < 1,$$

nn $|x|,\ |y| \leqq d$, so wird

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_1\,y_1) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_2\,y_2)\right| \leqq 3 \cdot d^{\mu} \cdot M[|x_1 - x_2|^{\mu} + |y_1 - y_2|],$$

) $$\left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_1\,y_1) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_2\,y_2)\right| \leqq 3 \cdot d^{\mu} \cdot M[|x_1 - x_2|^{\mu} + |y_1 - y_2|],$$

$$|(z(x_1\,y_1) - z(x_2\,y_2)| \leqq 3 \cdot d^{\mu} \cdot M(|x_1 - x_2| + y_1 - y_2|).$$

Wir wollen mit Hilfe von (22) die Differenz

$$f\left[x_1, y_1, z(x_1 y_1), \frac{\partial z}{\partial x}(x_1 y_1), \frac{\partial z}{\partial y}(x_1 y_1)\right]$$

$$- f\left[x_2, y_2, z(x_2 y_2), \frac{\partial z}{\partial x}(x_2 y_2), \frac{\partial z}{\partial y}(x_2 y_2)\right] = f(P_1) - f(P_2)$$

abschätzen. Es ist

$$\begin{aligned} |f(P_1) - f(P_2)| &\leqq C[|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda \\ &\quad + 3^\lambda \cdot d^{\lambda-\mu} \cdot M^\lambda (|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)^\lambda \\ &\quad + \ldots + 6 \cdot d^\mu \cdot M \cdot (|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)] \\ &\leqq C[|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda + 2 \cdot 3^\lambda \cdot d^{\lambda-\mu} \cdot M^\lambda (|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda \\ &\quad + \ldots + 6 \cdot d^\mu \cdot M (|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)]. \end{aligned}$$

Die Zahlen M und μ waren bis jetzt beliebig — nur d war einer e schränkenden Bedingung unterworfen. Wir wählen jetzt:

(23) 1. M beliebig,
2. $\mu < \lambda$.

Unter Gebrauch von (23) verfolgen wir unsere Abschätzung.

$$\begin{aligned} &|f(P_1) - f(P_2)| \leqq C[|x_1 - x_2|^\mu \cdot d^{\lambda-\mu} + |y_1 - y_2|^\mu \cdot d^{\lambda-\mu} \\ &+ 2 \cdot 3^\lambda \cdot M^\lambda d^{\lambda-\mu} \cdot d^{\lambda-\mu} |x_1 - x_2|^\mu + 2 \cdot 3^\lambda \cdot M^\lambda \cdot d^{\lambda-\mu} \cdot d^{\lambda-\mu} |y_1 - y_2| \\ &+ 6 \cdot d^\mu \cdot M (|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)] \\ &= C[d^{\lambda-\mu} + 2 \cdot 3^\lambda \cdot M^\lambda \cdot d^{\lambda-\mu} \cdot d^{\lambda-\mu} + 6 \cdot d^\mu \cdot M](|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu \end{aligned} \tag{24}$$

Zuletzt wählen wir d so klein, daß

$$C[d^{\lambda-\mu} + 2 \cdot 3^\lambda d^{\lambda-\mu} \cdot M^\lambda d^{\lambda-\mu} + 6 \cdot d^\mu \cdot M] < M$$

und erhalten schließlich

$$|f(P_1) - f(P_2)| \leqq M(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu), \tag{25}$$

w. z. b. w.

II. In einem 5-dimensionalen Bereich B sei eine Funktion $f(x, y, z, p,$ erklärt, die der Bedingung (14) genügt.

Wir wollen die erste Randwertaufgabe für die Differentialgleichun

$$\Delta u = f(x, y, z, p, q) \tag{26}$$

lösen. Dabei beschränken wir uns auf Kurven vom genügend kleine Durchmesser[11]).

---

[11]) Den Sinn der Aussage „von genügend kleinem Durchmesser" wollen wir pr zisieren:

Erstens gelten unsere Entwicklungen für Kreise K_r vom genügend kleine Durchmesser r ($r < R$).

(Fortsetzung der Fußnote 11 auf nächster Seite

Das allgemeine Problem läßt sich wieder auf das folgende einfachere ückführen: *Die Lösung von* (26) *zu finden, die auf der geschlossenen rve J verschwindet.*

Beweis. Wir bezeichnen mit Ω[11]) das Innere von J, mit $G(x, y, \xi, \eta)$ zu Ω gehörende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta u = 0.$$

Betrachten wir die Gesamtheit Γ_1 aller Funktionen $z(x, y)$, die sich der folgenden Form darstellen lassen:

$$z(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\varphi(\xi\eta)d\xi\, d\eta,$$

$\varphi(\xi, \eta)$ eine beliebige, in $\Omega + J$ erklärte und dort stetige Funktion Dann beweist man leicht, daß Γ_1 ein Vektorfeld ist, wenn wir die rm $\|z\|$ gleich $\mathrm{Max}|\varphi|$ setzen; dabei bedeutet φ diejenige Funktion, der Funktion z zufolge (27) entspricht.

Richten wir jetzt unser Augenmerk auf solche Funktionen $\varphi(\xi\eta)$, einer Hölderschen Bedingung mit der Konstanten M und dem Exnenten μ genügen. Übersteigt dann auch das Maximum der Funk- $|\varphi|$ dieselbe Zahl M nicht, so bilden die entsprechenden $z(xy)$ eine $_\mu$-Menge in Γ_1.

Unser Problem ist dem folgenden gleichwertig:

Eine Funktion $z(x, y)$ zu finden, so daß in Ω

$$z(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f\left[\xi, \eta, z(\xi, \eta), \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi, \eta)\frac{\partial z}{\partial \eta}(\xi, \eta)\right] d\xi\, d\eta.$$

Wir betrachten zu diesem Zwecke die Funktionaloperation

$$U[z(x, y)] = z_1(x, y)$$

$$= \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta) f\left[\xi, \eta, z(\xi\eta), \frac{\partial z}{\partial \xi}(\xi\eta), \frac{\partial z}{\partial \eta}(\xi\eta)\right] d\xi\, d\eta$$

$$z(x, y) \varepsilon \Gamma_1.$$

Sind *zweitens* M_1 C_1 zwei beliebige positive Zahlen, dann sollen noch folgende iete $\Omega + J$ in Betracht gezogen werden. $\Omega + J$ entsteht aus einem $K_r - r < R -$ h konforme Abbildung. Diese konforme Abbildung muß aber gewisse einschränkende ingungen erfüllen. Bezeichnen wir nämlich mit w die komplexe Veränderliche in Ebene des Kreises K_r, mit W die komplexe Veränderliche in $\Omega + J$, so soll er:

$$\left|\frac{dW}{dw}\right| > M_1 > 0 \qquad \begin{matrix} r < R \\ w \varepsilon K_r \end{matrix}$$

$$\left|\frac{dW}{dw}(w_1) - \frac{dW}{dw}(w_2)\right| \leqq C_1 |w_1 - w_2|^{\lambda}$$

w_1, w_2 aus dem abgeschlossenen K_r sein.

Es genügt also nach Satz I M und μ so zu bestimmen, daß mit z zz gleich auch $z_1 = U(z)$ zu $H_{M\mu}$ gehört.

Es entspreche der Funktion $z(x, y)$ infolge von (27) die Funktic $\varphi(x, y)$. Dann entspricht der Funktion $z(x, y)$ die Funktion

$$f\left[x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right].$$

Wir haben zu zeigen, daß bei passenden M und μ auch

$$f\left[x, y, z(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}(x, y)\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)\right]$$

derselben Hölderschen Bedingung genügt.

Es ist

$$(30) \qquad |\varphi(x_1 y_1) - \varphi(x_2 y_2)| \leqq M(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)$$

also nach bekannten Sätzen

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}(x_1 y_1) - \frac{\partial z}{\partial x}(x_2 y_2)\right| \leqq A'(\mu)\cdot(\mathrm{Max}|\varphi|)^\mu(|x_1 - x|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu$$
$$\leqq A'(\mu)\cdot M^\mu\cdot(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)$$

$$(31) \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}(x_1 y_1) - \frac{\partial z}{\partial y}(x_2 y_2)\right| \leqq A'(\mu)\cdot M^\mu(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)$$

$$|z(x_1 y_1| - z(x_2 y_2)| \leqq A'(\mu)\cdot M^\mu(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|)$$

wenn

$$|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| < 1.$$

Aus (31) folgt

$$(32) \qquad |f(P_1) - f(P_2)|$$
$$\leqq C\{|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda + 2\cdot M^{\mu\lambda}\cdot A'(\mu)(|x_1 - x_2|^\lambda + |y_1 - y_2|^\lambda$$
$$+ 2\cdot M^\mu\cdot A'(\mu)(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu)\},$$

also für $\mu < \lambda$

$$3) \qquad |f(P_1) - f(P_2)|$$
$$\leqq C\{|x_1 - x_2|^{\lambda-\mu} + |y_1 - y_2|^{\lambda-\mu} + 2\cdot M^{\lambda,\mu}\cdot A'(\mu)(|x_1 - x_2|^{\lambda-\mu} + |y_1 - y$$
$$+ 2\cdot M^\mu A'(\mu)\}(|x_1 - x_2|^\mu + |y_1 - y_2|^\mu).$$

Die Zahl $A'(\mu)$ konvergiert nach Null, wenn der Durchmesser des Bereiches Ω nach Null konvergiert, also

$$C\{|x_1 - x_2|^{\lambda-\mu} + |y_1 - y_2|^{\lambda-\mu}$$
$$+ 2\cdot M^{\mu\lambda}\cdot A'(\mu)(|x_1 - x_2|^{\lambda-\mu} + |y_1 - y_2|^{\lambda-\mu}) + 2\cdot M^\mu\cdot A'(\mu)\} \leqq M,$$

wenn die Breite von Ω genügend klein ist. w. z. b. w.

---

[13]) Vgl. Encykl. d. Math. Wiss. 2, 3, Heft 3. L. Lichtenstein, Neuere Entwicklung der Potentialtheorie. Konforme Abbildung. S. 286. Relation 3.

Definition. Eine Folge von Elementen $\{\psi_n\}_{n=1,2,\ldots,\infty}$ (die zu einem ektorfeld V gehören) nennen wir „schwach konvergent in bezug auf die asis B“, wenn

1. $\|\psi_n\| \leqq M$,
2. in V ein Element ψ vorhanden ist, so daß:

$$\lim_{n\to\infty} c_m(\psi_n) = c_m(\psi) \quad \text{für jedes } m.$$

abei bezeichnen wir mit $c_m(\psi_n)$ die Koeffizienten der Reihenentwicklung tsprechender Elemente nach der Basis B.

Wir postulieren jetzt die folgende weitere Eigenschaft:

VI. Axiom. Es gibt in V wenigstens eine Basis B derart, daß in der beschränkten Folge ψ_n eine in bezug auf die Basis B schwach-nvergente Teilfolge vorhanden ist.

Definition. Eine Funktionaloperation $F(\mathfrak{e})$, die jedem Elemente s V ein Element aus dem Vektorfeld V' zuordnet, nennen wir „schwach etig“, wenn jeder schwachkonvergenten Folge in V wieder eine solche V' entspricht.

Man beweist sehr leicht die folgende Abänderung des Satzes I.

Satz I′. *Vorgelegt eine schwachstetige Funktionaloperation* $F(\mathfrak{e})$, *e jedem Elemente* $\mathfrak{e}$ *der Hypersphäre* K_M

$$\|\mathfrak{e}\| \leqq M$$

eder ein Element aus K_M *zuordnet. Dann gibt es ein Element* $\mathfrak{e}_0$, *daß*

$$F(\mathfrak{e}_0) = \mathfrak{e}_0.$$

Anwendungen des Satzes I′.

Wir betrachten die Gesamtheit Γ^* aller Funktionen $z(x, y)$, die sich folgender Weise darstellen lassen:

$$z(x, y) = \iint_{\Omega} G(x, y, \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Von den Funktionen $\varphi(\xi, \eta)$ setzen wir voraus, daß sie samt ihrem adrate in Ω in Lebesgueschem Sinne integrierbar sind. Es gibt also e Konstante M, so daß

1) $$\iint_{\Omega} z^2(x, y)\, dx\, dy \leqq M \iint_{\Omega} \varphi^2(x, y)\, dx\, dy,$$

1 bis) $$|z(x, y)| \leqq M \sqrt{\iint_{\Omega} \varphi^2(x, y)\, dx\, dy}.$$

sei jetzt $\{\varphi_n(x, y)\}$ eine Folge von Funktionen, die nach der Funktion

$\varphi(x, y)$ im schwachen Sinne konvergieren. Dann gilt für jedes fes (x, y) in Ω:

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = z(x, y), \tag{35}$$

wo

$$z_n(x, y) = \iint_\Omega G(x, y, \xi, \eta)\, \varphi_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \text{ [13]} \tag{35 bis}$$

Betrachten wir jetzt eine Funktion $f(x, y, z)$. Um unnötige Kor plikationen zu vermeiden, setzen wir voraus, daß sie im ganzen Raur (x, y, z) definiert ist. Sie soll weiter in allen drei Argumenten stet sein. Aus den Formeln (34), (34 bis), (35) bis folgt, daß die Funktiona operation:

$$U_\Omega(z) = \iint_\Omega f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

schwachstetig ist, wenn man sie im Vektorfelde Γ^*:

$$z(x, y) = \iint_\Omega \varphi(\xi, \eta)\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$\| z(x, y) \| = \sqrt{\iint_\Omega \varphi^2(x, y)\, dx\, dy}$$

betrachtet. Also liefert Satz I′, auf $U_\Omega(z)$ angewendet, folgende Ergebniss

α) *Gegeben eine stetige Funktion $f(x, y, z)$, die im ganzen Raur definiert und daselbst stetig und absolut kleiner als* 1 *ist; dann ist d Gleichung*:

$$z(x, y) = \iint_\Omega f(\xi, \eta, z(\xi, \eta))\, G(x, y, \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{38}$$

für jedes Gebiet Ω lösbar.

---

[13]) In der Tat folgt aus den Formeln (35) bis, daß jede Funktion $z_n(x, y)$ sic in eine gleichmäßig konvergierende, nach den Eigenfunktionen $\{\psi_m(x, y)\}$ des Kerne $G(x, y, \xi, \eta)$ fortschreitende Reihe entwickeln läßt:

$$z_n(x, y) = \sum_{s=1}^{\infty} \iint_\Omega G(x, y, \xi, \eta) \cdot \psi_s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \iint_\Omega \psi_s(\xi, \eta) \cdot \varphi_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{36}$$

Aus (34) folgt, daß die Reste

$$R_{mn}(x, y) = \sum_{s=m}^{\infty} \iint_\Omega G(x, y, \xi, \eta) \cdot \psi_s(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \cdot \iint_\Omega \psi_s(\xi, \eta) \cdot \varphi_n(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta$$

für jedes feste (x, y) gleichmäßig in n nach Null konvergieren, da die Funktions $\{\varphi_n(x, y)\}$ als schwach konvergent vorausgesetzt waren

$$\lim_{m\to\infty} R_{mn}(x, y) = 0 \quad \text{gleichmäßig in } n \text{ für festes } (x, y) \tag{37}$$

Aus (36), (37) schließt man leicht, daß:

$$\lim_{n\to\infty} z_n(x, y) = z(x, y) \qquad (x, y) \text{ fest.}$$

β) Vorgelegt eine stetige Funktion $f(x, y, z)$ die in einem dreidimen-
nalen Gebiete definiert ist. Dann ist für „genügend kleine" Bereiche Ω
8) lösbar[14]).

Satz II. *Wir setzen voraus:*

1°. *$F(\mathfrak{e})$ ist eine schwachstetige Funktionaloperation, deren Bild ganz einem Vektorfelde V' gehört.*

2°. *F besitzt an der Stelle $\mathfrak{e}_0$ ein (Frechetsches) Differential $L(\mathfrak{e})$.*

3°. *Die durch $L(\mathfrak{e})$ dargestellte Abbildung ist eineindeutig und erhöpft das ganze Vektorfeld V'.*

4°. *$L(\mathfrak{e})$ und die inverse Abbildung L^{-1} sind schwachstetig.*

Dann gibt es in V' eine gewisse Umgebung des Elementes $\mathfrak{e}_0' = F(\mathfrak{e}_0)$, e ganz zum Bilde von F gehört.

Beweis. Es sei $\{\mathfrak{e}_n\}_{n=1,2,\ldots,\infty}$ eine dem Postulate VI genügende sis des Vektorfeldes V. Dann ist $\psi_n = L(\mathfrak{e}_n)$ eine ebenfalls dem Postue VI genügende Basis des Vektorfeldes V'. Dies folgt sofort aus der raussetzung 4°. Ist also $\mathfrak{e}'$ ein beliebiges Element aus dem Vektorde V' und

$$\mathfrak{e}' = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \psi_i = \sum_{i=1}^{\infty} c_i L(\mathfrak{e}_i)$$

ne Entwicklung, so gibt es eine Zahl M[15]) so, daß

$$\|s_n(\mathfrak{e}')\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i \right\| \leqq M \|\mathfrak{e}\| \quad \text{für jedes } n. \tag{9}$$

Nach diesen Bemerkungen gehen wir zum Beweis des Satzes II über. r Einfachheit halber nehmen wir an

$$\mathfrak{e}_0 = F(\mathfrak{e}_0) = 0.$$

nn läßt sich $F(\mathfrak{e})$ in der Umgebung des Nullpunktes wie folgt darstellen:

$$F(\mathfrak{e}) = L(\mathfrak{e}) + R(\mathfrak{e}),$$

$$\frac{\|R(\mathfrak{e})\|}{\|\mathfrak{e}\|} \to 0,$$

nn $\|\mathfrak{e}\| \to 0$ (nach 2.). Es ist also für ein festes, aber genügend kleines μ_0

$$\|R(\mathfrak{e})\| < \frac{m}{2M} \|\mathfrak{e}\| \quad \text{für} \quad \|\mathfrak{e}\| < \mu_0.$$

---

[14]) Genügt $f(x, y, z)$ der bekannten Dinischen Bedingung, so kann man daraus Lösung der erten Randwertaufgabe mit nur stetigen Randwerten übergehen.

[15]) Vgl. Formel (7).

Die Zahl M wurde durch die Beziehung (39) erklärt. Die Zahl m soll der folgenden Beziehung genügen:

$$m\|\mathfrak{e}\| \leqq \|L(\mathfrak{e})\| \quad \text{für jedes } \mathfrak{e}.$$

Aus 3°. und 4°. folgt die Existenz einer solchen Zahl m.

Jetzt zeigen wir, daß alle Punkte des Vektorfeldes V', deren Entfernung vom Nullpunkt $F(\mathfrak{e}_0)$ kleiner als $\frac{m}{2}\mu_0$ ist, zum Bilde der „Kugel"

$$\|\mathfrak{e}\| < \mu_0$$

gehören

$$\mathfrak{e}' \varepsilon F(K), \quad \text{wenn} \quad \|\mathfrak{e}'\| < \frac{m}{2}\mu_0.$$

Wir bezeichnen:

mit K_μ^n die Gesamtheit aller Elemente $\mathfrak{e}$ aus V, die $\begin{cases} 1. \ \mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathfrak{e}_i, \\ 2. \ \|\mathfrak{e}\| \leqq \mu; \end{cases}$

mit T_μ^n die Gesamtheit aller Elemente $\mathfrak{e}$ aus $\dot{V}$, die $\begin{cases} 1. \ \mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathfrak{e}_i, \\ 2. \ \|\mathfrak{e}\| = \mu. \end{cases}$

Dann ist für $\mathfrak{e} \varepsilon K_\mu^n$:

$$F(\mathfrak{e}) = L(\mathfrak{e}) + R(\mathfrak{e}) = \sum_{i=1}^{n} c_i L(\mathfrak{e}_i) + R(\mathfrak{e}) = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i + R(\mathfrak{e}),$$

also

$$s_n[F(\mathfrak{e})] = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i + s_n[R(\mathfrak{e})], \qquad \mathfrak{e} \varepsilon K_\mu^n.$$

Wir ordnen nun jedem Punkte $\mathfrak{e} \varepsilon K_{\mu_0}^n$ den Punkt $s_n[F(\mathfrak{e})]$ zu. Die „Kugel" $K_{\mu_0}^n$ gehört zum n-dimensionalen Vektorfeld V_n:

$$\mathfrak{e} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathfrak{e}_i.$$

Ihr Bild $s_n[F]$ gehört gänzlich zum n-dimensionalen Vektorfeld V_n':

$$\mathfrak{e}' = \sum_{i=1}^{n} c_i \psi_i.$$

Dasselbe gilt für die Abbildung $L(\mathfrak{e})$:

$$L(\mathfrak{e}) \varepsilon V_n',$$

wenn $\mathfrak{e} \varepsilon K_{\mu_0}^n \prec \dot{V}_n$.

Die Abbildungen $s_n(F)$ und $L(\mathfrak{e})$ haben folgende Eigenschaften, wenn sie nur in den Vektorfeldern V_n, V_n' betrachtet werden:

1. $s_n[F]$ ist stetig in $K_{\mu_0}^n \prec V_n$, d. h. sie ist stetig in den Variablen $c_1, c_2, \ldots, c_n$.

2. $s_n[F]$ besitzt an der Stelle $\mathfrak{e} = 0$ ein vollständiges Differential, nämlich $L(\mathfrak{e})$, dessen Determinante gleich Eins ist.

Weiter gilt nach (39)

3. $\|s_n(R(\mathfrak{e}))\| \leqq M\|R(\mathfrak{e})\| < \frac{M \cdot m}{2M}\|\mathfrak{e}\| = \frac{m}{2}\|\mathfrak{e}\| \leqq \frac{m}{2}\mu_0, \quad \mathfrak{e} \varepsilon K^n_{\mu_0}.$

4. Die Abbildung $L(\mathfrak{e})$ ordnet der „Kugel" $K^n_{\mu_0}$ das „Ellipsoid" $E^n_{\mu_0} \prec V'_n$, dessen Begrenzung vom Nullpunkte mehr als $m \cdot \mu_0$ entfernt ist, zu:

$$\|L(\mathfrak{e})\| \geqq m \cdot \mu_0,$$

enn $\mathfrak{e} \varepsilon T^n_{\mu_0}$, d. h. wenn $L(\mathfrak{e})$ zur Begrenzung des Ellipsoides $E^n_{\mu_0}$ gehört.

Aus 1., 2., 3., 4. folgt nach einer bekannten Beweisführung, daß alle unkte aus V'_n, deren „Entfernung" vom Nullpunkte kleiner als $\frac{m}{2}\mu_0$ ist, im Bilde $s_n F(K^n_{\mu_0})$ gehören.

Es sei jetzt $\mathfrak{e}'$ ein beliebiges Element aus V', dessen „Entfernung" om Nullpunkte kleiner als $\frac{m}{2}\mu_0$ ist. Für genügend großes n haben wir

$$\|s_n(\mathfrak{e}')\| < \frac{m}{2}\mu_0, \qquad n > N.$$

ach dem eben Bewiesenen gibt es also in V ein Element $\mathfrak{e}_n$, so daß

$$\mathfrak{e}_n \varepsilon K^n_{\mu_0},$$

$$s_n F(\mathfrak{e}_n) = s_n(\mathfrak{e}');$$

e Folge $\{\mathfrak{e}_n\}$ ist beschränkt:

$$\|\mathfrak{e}_n\| \leqq \mu_0.$$

; also $\{\mathfrak{e}_i\}$ eine schwach konvergente Teilfolge von $\{\mathfrak{e}_n\}$, und $\mathfrak{e}$ deren Grenze", so gilt

$$F(\mathfrak{e}) = \mathfrak{e}',$$

e. d.

(Eingegangen 30. Juni 1925.)

Teilerprobleme.

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

---

1. Einleitung. Es bezeichne $\sigma(n)$ die Summe der reziproken Teile einer natürlichen Zahl n

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} \frac{1}{d},$$

also $n\sigma(n)$ die Teilersumme

$$n\sigma(n) = \sum_{d|n} d.$$

Ich betrachte ferner die beiden summatorischen Funktionen

$$S_0(x) = \sum_{n \leqq x} \sigma(n), \qquad S(x) = \sum_{n \leqq x} n\sigma(n)$$

(falls die untere Summationsgrenze nicht explizit bezeichnet wird, ist sie stets Eins). Für diese ist auf elementarem Wege

$$S_0(x) = \frac{\pi^2}{6} x + O(\log x), \tag{1.1}$$

$$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \log x) \tag{1.2}$$

bekannt. (1.1) wurde zuerst von S. Wigert[1]) festgestellt, geht aber nicht weiter als das Dirichletsche[2]) Ergebnis (1.2). Tiefer liegt dagegen die von Wigert, l. c. [1]), S. 119 abgeleitete Abschätzung nach unten

$$S_0(x) \neq \frac{\pi^2}{6} x + o(\log x),$$

welche zeigt, daß das O-Glied in (1.1) definitiv ist.

---

[1]) S. Wigert, Sur quelques fonctions arithmétiques [Acta Mathematica **37** (1914), S. 113–140], S. 117.

[2]) Vgl. z. B. P. Bachmann, Die analytische Zahlentheorie [Leipzig 1894, B. G. Teubner, XVIII + 494 S.], S. 402.

· Mein erstes Ziel ist eine Verschärfung von (1.1) und (1.2) zu

$$S_0(x) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x + O\left(\frac{\log x}{\log \log x}\right),$$

I) $$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right).$$

Nunmehr bezeichne für ganzes $n \geqq 0$

$$r_4(n) = \sum_{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 + n_4^2 = n} 1$$

Zerlegungsanzahl von n in vier Quadrate und $A_4(x)$ die zugehörige nmatorische Funktion, also die Anzahl der Gitterpunkte im Inneren und der Oberfläche der vierdimensionalen Kugel $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 \leqq x$. f Grund eines bekannten Jacobischen Satzes über $r_4(n)$ läßt sich (vgl. über Hilfssatz 1) $A_4(x)$ in eine sehr enge Verbindung mit $S(x)$ bringen. ist nämlich

$$A_4(x) = 8 S(x) - 32 S\left(\frac{x}{4}\right) + 1.$$

s (II) folgt daher

I) $$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right).$$

kannt ist hier durch E. Landau[3])

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2} x^2 + O(x \log x),$$

zwar wird dieses Ergebnis aus dem Jacobischen Satze auf elemen- m Wege abgeleitet.

(I), (II) und (III) werden mittels eines auf einem bekannten Weyl- n Satze über Diophantische Approximationen beruhenden Verfahrens icht, welches man G. H. Hardy, J. E. Littlewood und E. Landau lankt. Diese Methode kommt zuerst in einer Landauschen Arbeit[4]) Darstellung und ist seitdem durch Littlewood, Landau, Hardy den Verfasser zur Verfeinerung von O-Ergebnissen benutzt worden[5]).

---

[3]) E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen inger Nachrichten 1912, S. 687–771], S. 765, und Über Gitterpunkte in mehr- nsionalen Ellipsoiden [Math. Zeitschr. 21 (1924), S. 126–132], S. 127.

[4]) E. Landau, Über die ζ-Funktion und die L-Funktionen, Math. Zeitschr. 20), S. 105–125.

[5]) Es sei hier noch vermerkt, daß sich $S(x)$ durch $x S_0(x)$ viel genauer approxi- n läßt, als dies in (I) und (II) zum Ausdruck kommt. Landau, Über einige ntheoretische Funktionen [Göttinger Nachrichten 1924, S. 58–65], kommt, ohne hantische Approximationen zu benutzen, bis zu einem Restglied $O\left(x^{\frac{1}{3}}\right)$, wäh- er mit der H-L-L-Methode $O\left(x^{\frac{7}{23}} \log^{\frac{12}{23}} x\right)$ erreicht.

Weiterhin leite ich für $A_4(x)$ nach unten

$$A_4(x) \neq \frac{\pi^2}{2} x^2 + o(x \log\log x) \tag{IV}$$

ab. Dieses Resultat basiert auf der durch H. Gronwall und S. Wigert[6] nachgewiesenen Abschätzung

$$\sigma(n) \neq o(\log\log n). \tag{1.3}$$

Schließlich sei $r(n)$ die Zerlegungszahl eines nicht-negativen ganzen in zwei Quadrate

$$r(n) = \sum_{n_1^2+n_2^2=n} 1$$

und $A(x)$ die zugehörige summatorische Funktion, also die Anzahl de Gitterpunkte im Inneren und auf dem Rande des Kreises $u_1^2 + u_2^2 \leqq x$ Hier ist durch Littlewood und den Verfasser[7])

$$A(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{37}{112}+\varepsilon}\right)$$

und durch Landau[8]), darüber hinaus,

$$A(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{37}{112}} \log^{\frac{5}{56}} x\right)$$

bekannt. Die drei Autoren gehen in ihren Ansätzen von gewissen, de *Kreis*funktion $A(x)$ eigentümlichen Fourierentwicklungen aus und be nutzen für ihre Kernüberlegungen die H-L-L-Methode. Auf Grund eine bekannten Satzes über den Wert von $r(n)$ läßt sich jedoch das Studiu von $A(x)$ auf ein *Teilerproblem in Restklassen* zurückführen (dieser Zu sammenhang ist natürlich längst bemerkt und auch vielfach verwerte worden). Nachdem dann der entsprechende Ausgangspunkt (Hilfssatz 5 gewonnen ist, kann man unmittelbar eine von J. G. van der Corput[9] für das Dirichletsche Teilerproblem ausgearbeitete Methode auch fü $A(x)$ nutzbar machen. Die van der Corputsche Methode basiert eben falls auf dem Weylschen Satz, der jedoch in eigentümlicher Weise meh mals ineinandergeschachtelt wird, was gegenüber dem H-L-L-Verfahren groß rechnerische Komplikationen mit sich bringt. Aber van der Corpu

[6]) H. Gronwall, Some asymptotic expressions in the theory of numbe [Transactions of the American Mathematical Society **14** (1913), S. 113—122]; Wiger l. c. [1]). Beiden Autoren gelingt es, die Maximalordnung von $\sigma(n)$ genau zu bestimme

[7]) J. E. Littlewood and A. Walfisz, The Lattice Points of a Circle [Pr ceedings of the Royal Society A **106** (1924), S. 478—487].

[8]) E. Landau, Note on the Preceding Paper [ebenda, S. 487—488].

[9]) J. G. van der Corput, Verschärfung der Abschätzung beim Teilerproble Math. Annalen **87** (1922), S. 39—65.

ommt beim Teilerproblem bis zu $O\left(x^{\frac{163}{494}}\right)$,[10] und dieser Exponent liegt nterhalb $\frac{37}{112}$. Dasselbe Ergebnis kann ich mit seiner Methode auch für $\Delta(x)$ erreichen und demzufolge

V) $$A(x) = \pi x + O\left(x^{\frac{163}{494}}\right)$$

eweisen.

Ich benutze ferner die Gelegenheit, um noch auf eine Kreisfrage einugehen, die in der Literatur betrachtet worden ist. Es handelt sich hierei um eine O-Abschätzung für das Fehlerquadratintegral

$$J(x) = \int_0^x (A(u) - \pi u)^2 du.$$

Man hat nach Landau[11]

1.4) $$J(x) = \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x^{1+\varepsilon}) \qquad \left(\gamma = \frac{1}{3\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^2(n)}{n^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Durch eine geringe Modifikation des Landauschen Gedankenganges soll, arüber hinaus, noch

VI) $$J(x) = \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x \log^3 x)$$

bgeleitet werden.

Im folgenden sind alle wesentlichen Überlegungen in Hilfssätzen niederelegt. Der leichteren Übersicht wegen schreibe ich auch eine Reihe bekannter Ergebnisse in dieser Form auf.

2. Hilfssatz 1. *Es bezeichne zur Abkürzung*

$$\varrho(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \left(\frac{x}{n} - \left[\frac{x}{n}\right] - \frac{1}{2}\right).$$

Dann ist

2.1) $$S_0(x) = \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x - \varrho(x) + O(1),$$

2.2) $$S(x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 - x\varrho(x) + O(x),$$

2.3) $$A_4(x) = 8S(x) - 32S\left(\frac{x}{4}\right) + 1.$$

---

[10] Der eleganteren Formulierung wegen schreibt van der Corput für die estfunktion $R(x)$ des Teilerproblems

$$R(x) = O(x^M) \qquad \left(M < \frac{33}{100}, \text{ unabhängig von } x\right);$$

us dem Beweise seines Satzes [l. c. [9]), S. 65] geht aber ohne weiteres

$$R(x) = O\left(x^{\frac{163}{494}}\right)$$

ervor. Übrigens ist auch $\frac{33}{100} < \frac{37}{112}$.

[11] E. Landau, Über die Gitterpunkte in einem Kreise (Vierte Mitteilung), öttinger Nachrichten 1923, S. 58–65.

Beweis. (2.1) und (2.2) sind bekannt (vgl. die in den Fußnoten [1]) und [2]) angegebenen Stellen), doch sollen sie, da es rasch geht, mitt erledigt werden[11a]).

1. Beweis von (2.1):

$$S_0(x) = \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} \left[\frac{x}{n}\right] = x \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^2} - \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n} - \varrho(x)$$

$$= \frac{\pi^2}{6} x - \frac{1}{2} \log x - \varrho(x) + O(1).$$

2. Beweis von (2.2):

$$S(x) = \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right]^2 + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left[\frac{x}{n}\right]$$

$$= \frac{x^2}{2} \sum_{n \leqq x} \frac{1}{n^2} - x\varrho(x) + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left(\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right) + \frac{1}{2} \sum_{n \leqq x} \left(\left[\frac{x}{n}\right] - \frac{x}{n}\right)^2$$

$$= \frac{\pi^2}{12} x^2 - x\varrho(x) + O(x).$$

3. Beweis von (2.3). Nach Jacobi ist für ganzes $n \geqq 1$

$$(2.4) \qquad r_4(2n-1) = 8 \sum_{m \mid (2n-1)} m, \qquad r_4(2n) = 24 \sum_{(2m-1) \mid 2n} (2m-1).$$

Man hat ferner

$$\sum_{(2m-1) \mid 2n \leqq x} (2m-1) = \sum_{(2m-1) \mid n \leqq \frac{x}{2}} (2m-1) = \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{2}} m - \sum_{2m \mid n \leqq \frac{x}{2}} 2m$$

$$= S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sum_{2m \mid 2n \leqq \frac{x}{2}} m = S\left(\frac{x}{2}\right) - 2 \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{4}} m$$

$$(2.5) \qquad = S\left(\frac{x}{2}\right) - 2S\left(\frac{x}{4}\right).$$

Hieraus folgt

$$\sum_{m\,(2n-1) \leqq x} m = \sum_{m \mid n \leqq x} m - \sum_{m \mid 2n \leqq x} m = S(x) - \sum_{2m \mid 2n \leqq x} 2m - \sum_{(2m-1) \mid 2n \leqq x} (2m-1)$$

$$= S(x) - 2 \sum_{m \mid n \leqq \frac{x}{2}} m - S\left(\frac{x}{2}\right) + 2S\left(\frac{x}{4}\right)$$

$$(2.6) \qquad = S(x) - 3S\left(\frac{x}{2}\right) + 2S\left(\frac{x}{4}\right).$$

[11a]) **Zusatz bei der Korrektur.** Auch (2.3) ist bekannt. Vgl. W. Sierpinski „Teorja liczb“ (Wydanie drugie) [Warszawa 1925, XII + 410 S.], S. 365 (76).

(2.4), (2.5) und (2.6) ergeben

$$A_1(x) = 1 + 8S(x) - 24S\left(\frac{x}{2}\right) + 16S\left(\frac{x}{4}\right) + 24S\left(\frac{x}{2}\right) - 48S\left(\frac{x}{4}\right)$$
$$= 8S(x) - 32S\left(\frac{x}{4}\right) + 1.$$

3. Hilfssatz 2. *Es seien* $r \geqq 1$, $\nu \geqq 1$, $h \geqq 0$ *ganz*; $R = 2^{r-1}$; λ *reell*;

$$P(u) = \alpha_0 u^r + \ldots + \alpha_r$$

habe reelle Koeffizienten. Dann ist

$$\left|\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{i\lambda P(m)} m^h\right| < 4\nu^h\left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}}\left\{\sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \operatorname{Min}\left(\nu, \left|\sin\tfrac{1}{2}\lambda\alpha_0 r!\, H\right|^{-1}\right)\right\}^{\frac{1}{R}}\right),$$

wo $\operatorname{Min}\left(\nu, \frac{1}{0}\right)$ *die Zahl* ν *bedeutet, das Summationszeichen rechts im Falle* $r = 1$ *wegbleibt und* $H = h_1 \ldots h_{r-1}$ *für* $r \geqq 2$, $H = 1$ *für* $r = 1$ *ist.*

Dies ist Hilfssatz 3 in Landaus Abhandlung[4]), der seinerseits eine Modifikation des in der Einleitung erwähnten Weylschen Satzes[12]) bildet.

Nunmehr mögen $c_1, \ldots, c_{44}$ geeignete positive absolute Konstanten bedeuten.

4. Hilfssatz 3. *Voraussetzungen*: $r \geqq 1$ *ganz*; $R = 2^{r-1}$; $R_1 = R(r+1)$; $z \geqq 2^{r+3}$; Q, Q' *ganz*;

$$z^{\frac{1}{r+2}} \leqq Q \leqq Q' \leqq 2Q \leqq 2z^{\frac{2}{r+3}}.$$

Behauptung:

$$\left|\sum_{q=Q}^{Q'} e^{\frac{z}{q}i}\right| \leqq c_1 Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z. \tag{4.1}$$

Beweis. Ich setze

$$\nu = \left[Q^{1+\frac{1}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}}\right]; \quad N = \left[\frac{Q'-Q}{\nu}\right]; \quad v_n = Q + n\nu \quad (n \geqq 0 \text{ ganz}).$$

Wegen

$$Q^{1+\frac{1}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}} = Q^{\frac{r+2}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}} \geqq z^{\frac{1}{r+1}-\frac{1}{r+1}} = 1$$

ist $\nu \geqq 1$.

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{2}{r+3}\left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{R} + \frac{1}{R_1}\right) - \left(\frac{1}{r+1} + \frac{1}{R_1}\right) = -\frac{1}{r+3}\left(1 - \frac{1}{R}\right) \leqq 0,$$

[12]) H. Weyl, Über ein Problem aus dem Gebiet der Diophantischen Approximationen [Göttinger Nachrichten 1914, S. 234–244], S. 241. Vgl. auch desselben Verfassers, Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins [Math. Annalen 77 (1916), S. 313–352], S. 328, und Zur Abschätzung von $\zeta(1+it)$ [Math. Zeitschr. 10 (1921), S. 88–100], S. 90.

und daher

$$Q^{\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}} z^{-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{R_1}} \leqq 1;$$

$$\nu \leqq Q^{1+\frac{1}{r+1}} z^{-\frac{1}{r+1}} = Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \cdot Q^{\frac{1}{r+1}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}} z^{-\frac{1}{r+1}-\frac{1}{R_1}}$$

$$\leqq Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}}. \tag{4.2}$$

Für $N \leqq 1$ ist also (4.1) trivial, denn alsdann hat man

$$\left| \sum_{q=Q}^{Q'} e^{\frac{z}{q} i} \right| \leqq Q' - Q + 1 = \nu \frac{Q'-Q}{\nu} + 1 \leqq 2\nu + 1 \leqq 3\nu \leqq 3 Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}}.$$

Ich darf also $N \geqq 2$ annehmen.

Wegen

$$v_{N-1} + \nu = v_N > Q + \left(\frac{Q'-Q}{\nu} - 1\right)\nu = Q' - \nu$$

und (4.2) wird

$$\left| \sum_{q=Q}^{Q'} e^{\frac{z}{q} i} - \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{zi}{v_n+m}} \right| \leqq \nu < Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z. \tag{4.3}$$

Nunmehr sei für $|y| < v_n$

$$\frac{1}{v_n+y} = \frac{1}{v_n}(P(y) + y^{r+1} f(y)), \tag{4.41}$$

$$P(y) = P_{r,n}(y) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^k \left(\frac{y}{v_n}\right)^k, \tag{4.42}$$

$$f(y) = f_{r,n}(y) = (-1)^{r+1} \frac{1}{v_n^{r+1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{y}{v_n}\right)^k, \tag{4.43}$$

$$g(y) = g_{r,n}(y) = e^{\frac{iz}{v_n} y^{r+1} f(y)} = \sum_{h=0}^{\infty} g_{r,n,h} y^h = \sum_{h=0}^{\infty} g_h y^h. \tag{4.44}$$

Es wird dann

$$\sum_{h=0}^{\infty} g_h y^h = \exp\left\{(-1)^{r+1} i z \frac{y^{r+1}}{v_n^{r+2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{y}{v_n}\right)^k\right\}. \tag{4.45}$$

Aus den Voraussetzungen folgt

$$\frac{\nu}{Q} \leqq \left(\frac{Q}{z}\right)^{\frac{1}{r+1}} \leqq z^{\left(\frac{2}{r+3}-1\right)\frac{1}{r+1}} = z^{-\frac{1}{r+3}} \leqq \frac{1}{2}.$$

Mithin ergibt (4.45)

$$\sum_{h=0}^{\infty} |g_h| \nu^h \leqq \exp\left\{2z \frac{\nu^{r+1}}{Q^{r+2}}\right\} \leqq \exp\left\{2z \frac{1}{Q^{r+2}} \cdot \frac{Q^{r+2}}{z}\right\} = e^2 = c_2. \tag{4.46}$$

4.41), (4.42), (4.43) und (4.44) liefern sodann

$$\left|\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_n+m}}\right| = \left|\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_n}P(m)} \sum_{h=0}^{\infty} g_h m^h\right| \leqq \sum_{h=0}^{\infty} |g_h| \cdot \left|\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_n}P(m)} m^h\right|.$$

Auf die innere Summe wende ich Hilfssatz 2 mit $\lambda = \frac{z}{v_n}$ und dem P us (4.42) an. Es ist dann

$$\alpha_0 = \left(\frac{-1}{v_n}\right)^r.$$

o kommt, wenn noch zur Abkürzung

4.5) $$(0 \leqq n \leqq N-1) \qquad t_n = t_{r,n} = \frac{z}{2v_n^{r+1}} r! H$$

esetzt und (4.46) beachtet wird

$$\left|\sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_n+m}}\right|$$

$$\leqq 4 \sum_{h=0}^{\infty} |g_h| \nu^h \left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \operatorname{Min}(\nu, |\sin t_n|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}}\right)$$

$$\leqq c_3 \left(\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \right\}^{\frac{1}{R}}\right);$$

$$\left|\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{\nu-1} e^{\frac{iz}{v_n+m}}\right|$$

$$\leqq c_3 \left(N\nu^{1-\frac{1}{R}} + \nu^{1-\frac{r}{R}} \sum_{n=0}^{N-1} \left\{ \sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \operatorname{Min}(\nu, |\sin t_n|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}}\right)$$

4.6) $$\leqq c_3 \left(N\nu^{1-\frac{1}{R}} + N^{1-\frac{1}{R}} \nu^{1-\frac{r}{R}} \left\{ \sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{n=0}^{N-1} \operatorname{Min}(\nu, |\sin t_n|^{-1}) \right\}^{\frac{1}{R}}\right),$$

tzteres nach der verallgemeinerten Schwarzschen Ungleichung. Hierbei t nach Definition

4.61) $$N\nu^{1-\frac{1}{R}} \leqq c_4 Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z,$$

4.62) $$N^{1-\frac{1}{R}} \nu^{1-\frac{r}{R}} \leqq c_4 Q^{1-\frac{r}{R}-\frac{r-1}{R_1}} z^{\frac{r-1}{R_1}}.$$

Nunmehr soll die geschweifte Klammer in (4.6) abgeschätzt werden.

Aus (4.5) ergibt sich für $0 \leqq n \leqq N-2$

$$t_n - t_{n+1} = \frac{z\,r!\,H}{2}\left(\frac{1}{v_n^{r+1}} - \frac{1}{v_{n+1}^{r+1}}\right) = \frac{z\,r!\,H}{2}\,\frac{(v_n+\nu)^{r+1} - v_n^{r+1}}{v_n^{r+1}\,v_{n+1}^{r+1}}$$

$$\geqq \frac{z\,r!\,H}{2}\,\frac{(r+1)\nu}{v_{n+1}^{r+2}} \geqq \frac{z\,(r+1)!\,H\nu}{2\,(2Q)^{r+2}} = \frac{z\,(r+1)!\,H\nu}{2^{r+3}\,Q^{r+2}}$$

$$\geqq c_5\,\frac{z\,H\nu}{Q^{r+2}}. \tag{4.7}$$

Es sei ξ_g ein Intervall von der Form

$$\frac{\pi}{2}\,g < y \leqq \frac{\pi}{2}(g+1) \qquad (g \text{ ganz})$$

so betrachte ich die Teilsumme

$$\eta_g = \sum_{\substack{n=0 \\ t_n \mid \xi_g}}^{N-1} \operatorname{Min}\left(\nu, |\sin t_n|^{-1}\right),$$

welche als nicht leer vorausgesetzt wird. Ist g^* die ganze unter den beiden Zahlen $\frac{g}{2}$, $\frac{g+1}{2}$ und n^* dasjenige Glied von η_g, wofür $|t_n^* - g^*$ ein Minimum wird, so ersetze ich bei der Abschätzung von η_g nach oben dieses Glied durch ν; auf die übrigen (falls solche vorkommen) wende ich aber (4.7) an. So kommt

$$\eta_g \leqq \nu + \sum_k{}' \left(\sin c_5\,\frac{z\,H\nu k}{Q^{r+2}}\right)^{-1}, \tag{4.71}$$

wo in Σ' nur über diejenigen k zu summieren ist, die

$$1 \leqq k \leqq N, \qquad c_5\,\frac{z\,H\nu k}{Q^{r+2}} \leqq \frac{\pi}{2}$$

erfüllen. Aus (4.71) folgt

$$\eta_g \leqq \nu + c_6\,\frac{Q^{r+2}}{z\,H\nu}\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k} \leqq c_7\left(\nu + \frac{Q^{r+2}}{z\,H\nu}\log N\right)$$

$$\leqq c_7\left(\nu + \frac{Q^{r+2}}{z\,H\nu}\log z\right). \tag{4.72}$$

Andererseits ist nach (4.5)

$$t_n \leqq \frac{z\,r!\,H}{Q^{r+1}}.$$

Die Anzahl der von t_n betroffenen ξ_g-Intervalle ist also

$$\leqq c_8 \left(\frac{z\,r!\,H}{Q^{r+1}} + 1\right).^{13)}$$

Wendet man dies auf (4.72) an, so ergibt sich

$$\sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_n|^{-1})$$

$$\leqq c_9 \sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \left(\frac{z\,r!\,H}{Q^{r+1}} + 1\right)\left(\nu + \frac{Q^{r+2}}{z\,H\nu} \log z\right)$$

$$\leqq c_{10}\left(\frac{z\,r!}{Q^{r+1}}\,\nu^{2r-1} + \nu^r + r!\,\nu^{r-2}\,Q \log z + \frac{Q^{r+2}}{z\nu} \log z \log^{r-1}\nu\right)$$

(4.8) $$\leqq c_{10}\, r! \log^r z \left(\frac{z\,\nu^{2r-1}}{Q^{r+1}} + \nu^r + \nu^{r-2}\,Q + \frac{Q^{r+2}}{z\nu}\right).$$

Nach Definition ist

$$\frac{z\,\nu^{2r-1}}{Q^{r+1}} \leqq Q^{\frac{r+2}{r+1}(2r-1)-(r+1)}\, z^{1-\frac{2r-1}{r+1}} = Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\nu^r \leqq Q^{r+\frac{r}{r+1}}\, z^{-\frac{r}{r+1}} = Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}} \left(Q z^{-\frac{2}{r+3}}\right)^{\frac{r+3}{r+1}}$$

$$\leqq Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\nu^{r-2}\,Q \leqq 2\,Q^{\frac{r+2}{r+1}(r-2)+1}\, z^{-\frac{r-2}{r+1}} = 2\,Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}},$$

$$\frac{Q^{r+2}}{z\nu} \leqq 2\,Q^{r+2-\frac{r+2}{r+1}}\, z^{-1+\frac{1}{r+1}} = 2\,Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}} \left(Q z^{-\frac{2}{r+3}}\right)^{\frac{r+3}{r+1}}$$

$$\leqq 2\,Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}}$$

Es wird somit nach (4.8)

$$\sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{Min}\,(\nu, |\sin t_n|^{-1}) \leqq c_{11}\, r!\, Q^{r-\frac{3}{r+1}}\, z^{-1+\frac{3}{r+1}} \log^r z.$$

Wegen $r \leqq R$ und $\sqrt[R]{r!} \leqq c_{12}$ folgt hieraus

$$\left\{\sum_{h_1,\ldots,h_{r-1}=1}^{\nu} \sum_{n=0}^{N-1}\right\}^{\frac{1}{R}} \leqq c_{13}\, Q^{\frac{r}{R}-\frac{3}{R_1}}\, z^{-\frac{1}{R}+\frac{3}{R_1}} \log z.$$

[13]) Die Eins darf nicht weggelassen werden, da für feste r, H der Ausdruck $\frac{r!\,H}{Q^{r+1}}$ eventuell mit wachsendem z beliebig klein wird.

Jetzt liefert (4.62)

$$N^{1-\frac{1}{R}}\nu^{1-\frac{r}{R}}\{\}^{\frac{1}{R}} \leqq c_{14}\, Q^{1-\frac{r}{R}-\frac{r-1}{R_1}+\frac{r}{R}-\frac{3}{R_1}} z^{\frac{r-1}{R_1}-\frac{1}{R}+\frac{3}{R_1}}$$

$$= c_{14}\, Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} z^{\frac{1}{R_1}} \log z, \tag{4.9}$$

und nunmehr folgt die Behauptung (4.1) aus (4.3), (4.6), (4.61) und (4.9).

5. Hilfssatz 4. *Für* $x \geqq 3$, $r \geqq 1$ *ganz*, $R = 2^{r-1}$ *ist*

$$\left| \sum_{x^{\frac{2}{r+4}} < q \leqq x^{\frac{2}{r+3}}} \frac{1}{q}\left(\frac{x}{q} - \left[\frac{x}{q}\right] - \frac{1}{2}\right)\right| \leqq c_{15}\, x^{-\frac{1}{20Rr}} \log^2 x. \tag{5.1}$$

Beweis[14]. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $x \geqq 2^{r+3}$, da sonst die Behauptung trivial ist. Ich setze zur Abkürzung

$$\psi(u) = u - [u] - \frac{1}{2}.$$

Dann liefert für $w > 0$ eine Fourierentwicklung

$$w \int_0^{\pm\frac{1}{w}} \psi(u+v)\, dv = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2n\pi u i} \tag{5.2}$$

mit

$$a_0 = 0; \quad |a_n| \leqq \frac{1}{|n|}, \qquad |a_n| \leqq \frac{w}{n^2} \qquad (n \neq 0) \tag{5.21}$$

Nunmehr mögen die ganzen Zahlen Q, Q' den Ungleichungen

$$x^{\frac{2}{r+4}} < Q \leqq Q' \leqq 2Q \leqq 2x^{\frac{2}{r+3}}$$

genügen. Ferner sei

$$n_0 = \frac{1}{2\pi}\frac{Q^{r+2}}{x}.$$

Aus (5.2) und (5.21) folgt dann

$$w\left|\sum_{q=Q}^{Q'} \int_0^{\pm\frac{1}{w}} \psi\left(\frac{x}{q}+v\right) dv\right| \leqq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\sum_{q=Q}^{Q'} e^{\frac{2n\pi x i}{q}}\right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{w}{n^2}\right) \tag{5.3}$$

$$= 2\sum_{n \leqq n_0} + 2\sum_{n > n_0} = 2S_1 + 2S_2, \tag{5.31}$$

zur Abkürzung.

---

[14]) Beim Beweise dieses Satzes wende ich, nach dem Vorbild von van der Corput, l. c. [9]), S. 54, einen der älteren Pfeiffer-Landauschen Methode entlehnten Kunstgriff an.

In S_1 nehme ich $2n\pi x = z$. Dann wird zunächst $z > x \geqq 2^{r+3}$. Ferner besagt $n \leqq n_0$, daß $z^{\frac{1}{r+2}} \leqq Q$ ist. Und schließlich ist $Q \leqq x^{\frac{2}{r+3}} < z^{\frac{2}{r+3}}$. Q, Q', z erfüllen also alle Voraussetzungen von Hilfssatz 3. (4.1) ist mithin anwendbar und liefert mit $R_1 = R(r+1)$

$$S_1 \leqq c_1 Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} (2\pi x)^{\frac{1}{R_1}} \sum_{n \leqq n_0} n^{\frac{1}{R_1}} \log(2n\pi x) \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{w}{n^2}\right)$$

$$\leqq c_{16} Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} \log x \sum_{n \leqq n_0} n^{\frac{1}{R_1}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{n}, \frac{w}{n^2}\right)$$

$$\leqq c_{16} Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} \log x \left(\sum_{n \leqq w} n^{\frac{1}{R_1}-1} + w \sum_{n > w} n^{\frac{1}{R_1}-2} \right)$$

(5.32) $$\leqq c_{17} Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} (wx)^{\frac{1}{R_1}} \log x .$$

In S_2 ist die innere Summe trivialerweise

$$\leqq Q' - Q + 1 \leqq Q + 1 \leqq 2Q .$$

Es wird somit

(5.33) $$S_2 \leqq 2Qw \sum_{n > n_0} \frac{1}{n^2} \leqq c_{18} \frac{Qw}{n_0} \leqq c_{19} Q^{-r-1} wx .$$

Aus (5.3), (5.31), (5.32) und (5.33) folgt

(5.4) $$w \left| \sum_{q=Q}^{Q'} \int_0^{\pm\frac{1}{w}} \psi\left(\frac{x}{q} + v\right) dv \right| \leqq c_{20} \left(Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} w^{\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} + Q^{-r-1} wx \right) \log x .$$

Da für jedes Zahlenpaar u_1 und $u_2 > u_1$ die Ungleichung

$$\psi(u_2) - \psi(u_1) \leqq u_2 - u_1$$

gilt, ist

$$-\frac{Q'-Q+1}{2w} + w \sum_{q=Q}^{Q'} \int_0^{\frac{1}{w}} \psi\left(\frac{x}{q} + v\right) dv \leqq \sum_{q=Q}^{Q'} \psi\left(\frac{x}{q}\right)$$

$$\leqq \frac{Q'-Q+1}{2w} + w \sum_{q=Q}^{Q'} \int_{-\frac{1}{w}}^{0} \psi\left(\frac{x}{q} + v\right) dv ,$$

also, wegen $Q' - Q + 1 \leqq 2Q$, nach (5.4)

$$\left| \sum_{q=Q}^{Q'} \psi\left(\frac{x}{q}\right) \right| \leqq c_{21} \left(Q^{1-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}} w^{\frac{1}{R_1}} x^{\frac{1}{R_1}} + Q^{-r-1} wx + Q w^{-1} \right) \log x .$$

Durch partielle Summation folgt hieraus

$$(5.5)\quad \left|\sum_{q=Q}^{Q'}\frac{1}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right)\right| \leqq c_{22}\left(Q^{-\frac{1}{R}-\frac{1}{R_1}}w^{\frac{1}{R_1}}x^{\frac{1}{R_1}}+Q^{-r-2}wx+w^{-1}\right)\log x\,.$$

Da sich das Intervall $x^{\frac{2}{r+4}}<q\leqq x^{\frac{2}{r+3}}$ in $\leqq c_{23}\log x$ Teilintervalle $Q\leqq q\leqq Q'$ zerlegen läßt, so folgt aus (5.5) mit $w=x^{\frac{1}{10}}$

$$(5.6)\quad \left|\sum_{x^{\frac{2}{r+4}}<q\leqq x^{\frac{2}{r+3}}}\frac{1}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right)\right|$$

$$\leqq c_{24}\left(x^{-\frac{2}{r+4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{11}{10R_1}}+x^{-\frac{2(r+2)}{r+4}+\frac{11}{10}}+x^{-\frac{1}{10}}\right)\log^2 x\,.$$

Hierin ist

$$(5.61)\quad -\frac{2}{r+4}\left(\frac{1}{R}+\frac{1}{R_1}\right)+\frac{11}{10R_1}$$

$$=\frac{1}{R_1}\left(-\frac{r}{r+4}+\frac{1}{10}\right)\leqq\frac{1}{2R_r}\left(-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}\right)=-\frac{1}{20R_r}$$

$$(5.62)\quad -\frac{2(r+2)}{r+4}+\frac{11}{10}=-\frac{r}{r+4}+\frac{1}{10}\leqq-\frac{1}{5}+\frac{1}{10}=-\frac{1}{10}\leqq-\frac{1}{20R_r}\,.$$

Und nunmehr folgt (5.1) aus (5.6), (5.61) und (5.62).

6. Beweis von (I), (II) und (III). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei x so groß, daß

$$r_0=[\log\log x]\geqq 1$$

wird. Dann teile ich

$$\varrho(x)=\sum_{q\leqq x}\frac{1}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right)=\sum_{q\leqq x^{\frac{2}{r_0+4}}}+\sum_{x^{\frac{2}{r_0+4}}<q\leqq\sqrt{x}}+\sum_{\sqrt{x}<q\leqq x}=\varrho_1+\varrho_2+\varrho_3\,.$$

Für ϱ_1 ergibt eine triviale Abschätzung

$$|\varrho_1|\leqq\sum_{q\leqq x^{\frac{2}{r_0+4}}}\frac{1}{q}\leqq 1+\frac{2}{r_0+4}\log x=O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right).$$

Für $1\leqq r\leqq r_0$ wird ferner

$$x^{-\frac{1}{20R_r}}\leqq x^{-\frac{1}{10\cdot 2\log\log x\log\log x}}=\exp\left\{-\frac{(\log x)^{1-\log 2}}{10\log\log x}\right\}\leqq c_{25}\frac{1}{\log^2 x\log\log x}$$

und daher nach Hilfssatz 4

$$|\varepsilon_r|=\left|\sum_{x^{\frac{2}{r+4}}<q\leqq x^{\frac{2}{r+3}}}\frac{1}{q}\psi\left(\frac{x}{q}\right)\right|\leqq c_{26}\frac{1}{\log\log x}\leqq\frac{c_{26}}{r_0}\,.$$

ür ϱ_2 ergibt sich somit

$$|\varrho_2| = \left|\sum_{r=1}^{r_0} s_r\right| \leqq c_{26} = O(1).$$

ndlich ist nach Wigert, l. c. [1]), S. 117,

$$\varrho_3 = O(1).$$

ısammenfassend hat man also

$$\varrho(x) = O\left(\frac{\log x}{\log\log x}\right),$$

ıd nunmehr folgen (I), (II) und (III) aus (2.1), (2.2) und (2.3).

7. Beweis von (IV). Aus (1.3) ergibt sich, daß

.1) $$\sigma(u) \neq o(\log\log u)$$

, wo u nur die ungeraden Zahlen durchläuft, doch ist eine direkte erifikation einfacher. Lasse ich u alle Zahlen von der Form

$$u = u_k = 1\cdot 3 \ldots (2k+1) \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

ırchlaufen, so ist

$$\sigma(u) \geqq 1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2k+1} \sim \frac{1}{2}\log k \sim \frac{1}{2}\log\log u,$$

ıd somit (7.1) in Ordnung.

Wäre nun die zu (IV) gegenteilige Annahme

$$A_4(x) = \frac{\pi^2}{2}x^2 + o(x\log\log x)$$

ahr, so würde für ungerades $x = u$

$$r_4(u) = A_4(u) - A_4(u-1) = o(u\log\log u)$$

lgen. Das ist aber mit (7.1) unverträglich, denn aus (2.4) ergibt sich

$$r_4(u) = 8u\sigma(u).$$

8. Hilfssatz 5. *Es ist*

.1) $$A(x) = \pi x - 4\sum_{n\leqq\frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{x}{4n+1}\right) + 4\sum_{n\leqq\frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{x}{4n+3}\right)$$

$$+ 4\sum_{n\leqq\sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n}+\frac{1}{4}\right) - 4\sum_{n\leqq\sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n}+\frac{3}{4}\right) + O(1).$$

Beweis. Bekanntlich hat man für natürliches n

$$r(n) = 4\sum_{(4m+1)\mid n} 1 - 4\sum_{(4m+3)\mid n} 1.$$

Hieraus folgt

$$A(x) = 1 + 4 \sum_{(4m+1)\,n \leqq x} 1 - 4 \sum_{(4m+3)\,n \leqq x} 1$$

$$= 1 + 4 \sum_{\substack{(4m+1)\,n \leqq x \\ 4m+1 \leqq \sqrt{x}}} 1 + 4 \sum_{\substack{(4m+1)\,n \leqq x \\ n \leqq \sqrt{x}}} 1 - 4 \sum_{\substack{4m+1 \leqq \sqrt{x} \\ n \leqq \sqrt{x}}} 1$$

$$- 4 \sum_{\substack{(4m+3)\,n \leqq x \\ 4m+3 \leqq \sqrt{x}}} 1 - 4 \sum_{\substack{(4m+3)\,n \leqq x \\ n \leqq \sqrt{x}}} 1 + 4 \sum_{\substack{4m+3 \leqq \sqrt{x} \\ n \leqq \sqrt{x}}} 1$$

$$= 1 + 4 \sum_{0 \leqq m \leqq \frac{\sqrt{x}-1}{4}} \left[\frac{x}{4m+1}\right] + 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{4n} + \frac{3}{4}\right] - 4 \sum_{0 \leqq m \leqq \frac{\sqrt{x}-3}{4}} \left[\frac{x}{4m+3}\right]$$

$$- 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left[\frac{x}{4n} + \frac{1}{4}\right] - 4\,[\sqrt{x}]\left(\left[\frac{\sqrt{x}+3}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}+1}{4}\right]\right)$$

$$= O(1) - 4 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{x}{4n+1}\right) + 4x \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{\sqrt{x}-1}{4}} \frac{1}{4n+1} - 2 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} 1 + O(1)$$

$$- 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n} + \frac{3}{4}\right) + 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{4n} + \frac{3}{4}\right) - 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} 1$$

$$+ 4 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{4}{4n+3}\right) - 4x \sum_{0 \leqq n \leqq \frac{\sqrt{x}-3}{4}} \frac{1}{4n+3} + 2 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} 1 + O(1)$$

$$+ 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n} + \frac{1}{4}\right) - 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \left(\frac{x}{4n} + \frac{1}{4}\right) + 2 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} 1$$

$$- 4\sqrt{x}\left(\left[\frac{\sqrt{x}-1}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-3}{4}\right]\right) + O(1)$$

$$(8.2) = - 4 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{x}{4n+1}\right) + 4 \sum_{n \leqq \frac{\sqrt{x}}{4}} \psi\left(\frac{x}{4n+3}\right) + 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n} + \frac{1}{4}\right)$$

$$- 4 \sum_{n \leqq \sqrt{x}} \psi\left(\frac{x}{4n} + \frac{3}{4}\right) + 4x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right)$$

$$- 4x \sum_{n > \frac{\sqrt{x}-1}{4}} \left(\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+3}\right) + 4x \sum_{\frac{\sqrt{x}-3}{4} < n \leqq \frac{\sqrt{x}-1}{4}} \frac{1}{4n+3}$$

$$- 4\sqrt{x}\left(\left[\frac{\sqrt{x}-1}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-3}{4}\right] - \frac{1}{2}\right) + O(1).$$

Nunmehr setze ich

$$\delta = \left[\frac{\sqrt{x}-1}{4}\right] - \left[\frac{\sqrt{x}-3}{4}\right].$$

ann wird der in (8.2) nach den ψ-Summen auftretende Rest

$$= \pi x - 4x \int_{\frac{\sqrt{x}-1}{4}}^{x} \left(\frac{1}{4u+1} - \frac{1}{4u+3}\right) du + 4\delta\sqrt{x} - 4\sqrt{x}\left(\delta - \frac{1}{2}\right) + O(1)$$

$$= \pi x - 2\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + O(1) = \pi x + O(1),$$

Übereinstimmung mit (8. 1).

9. Die folgende Definition eines Exponentensystems sowie die Hilfs-tze 6, 7 und 8, entnehme ich der van der Corputschen Abhand-ng [9]), wo sie S. 51—52 und 64 zu finden sind.

Definition. *Wir werden sagen, daß die Zahlenpaare* (k_1, l_1), $_2, l_2), \ldots, (k_m, l_m)$, *deren Anzahl und deren Werte konstant vorausgesetzt erden, ein Exponentensystem bilden, wenn*

$$0 \leqq k_p \leqq \frac{1}{2}, \quad 0 \leqq l_p \leqq 1 \ ^{15}) \qquad (1 \leqq p \leqq m)$$

, und es zu jeder positiven Zahl s zwei nur von s abhängige Zahlen und $\mu\left(r \text{ ganz} \geqq 3,\ 0 < \mu < \frac{1}{2}\right)$ *gibt, derart, daß stets die Ungleichung*

.1) $$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leqq K \sum_{p=1}^{m} z^{k_p} a^{l_p}$$

t einem nur von s und t abhängigen $K > 0$ *gilt, wenn die folgenden raussetzungen erfüllt sind:*

.2) $$t > 0, \quad 1 \leqq a < b < at, \quad y > 0, \quad z = ya^{-s} > 1;$$

n) ist im Intervall $a \leqq n \leqq b$ *definiert, reell, r-mal differentiierbar (in n Endpunkten eventuell nur einseitig), und für* $a \leqq n \leqq b, 0 \leqq p \leqq r-1$ *ist*

3) $$\left| f^{(p+1)}(n) - (-1)^p ys(s+1)\ldots(s+p-1)n^{-s-p} \right| < \mu ys(s+1)\ldots(s+p-1)n^{-s-p}$$

ir $p = 0$ *bezeichne* $s(s+1)\ldots(s+p-1)$ *die Zahl* 1).

Hilfssatz 6. *Es sei* $a < b$, $f(n)$ *im Intervall* $a \leqq n \leqq b$ *definiert, ll und zweimal differentiierbar (in den Endpunkten eventuell nur ein-tig),* $|f'(b) - f'(a)| < 2$, $f''(n)$ *stets* $\geqq \omega$ *oder* $\leqq -\omega$, *wo* ω *eine n unabhängige positive Zahl bezeichnet. Dann ist*

$$\left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi i f(n)} \right| \leqq c_{27}\left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} + 1\right).$$

Hilfssatz 7. *Falls N und P positive ganze Konstanten,* $u_n (\geqq 0)$ *d* $v_p\ (> 0) (1 \leqq n \leqq N, 1 \leqq p \leqq P)$ *Konstanten bezeichnen,* A_n *und*

[15]) Der Druckfehler $0 \leqq l_p \leqq \frac{1}{2}$ ist nach den dem 89. Annalenbande durch der Corput beigegebenen „Berichtigungen" korrigiert.

B_p $(1 \leqq n \leqq N, 1 \leqq p \leqq P)$ *positiv sind, gibt es ein positives* w *mit d*
Eigenschaft

$$\sum_{n=1}^{N} A_n w^{u_n} + \sum_{p=1}^{P} B_p w^{-v_p} \leqq c_{28} \sum_{n=1}^{N} \sum_{p=1}^{P} (A_n^{v_p} B_p^{u_n})^{\frac{1}{u_n+v_p}}$$

Hilfssatz 8. *Die Zahlenpaare* $\left(\frac{43}{104}, \frac{54}{104}\right)$, $\left(\frac{147}{344}, \frac{177}{344}\right)$, $\left(\frac{71}{176}, \frac{92}{176}\right)$ *und* $\left(\frac{17}{38}, \frac{19}{38}\right)$ *bilden ein Exponentensystem.*

10. Hilfssatz 9. *Die Zahlenpaare* (k_p, l_p) *mit* $k_p > 0$ $(1 \leqq p \leqq m$ *mögen ein Exponentensystem bilden.* x *sei* > 1, *und für jedes* n *i*
Intervall $a \leqq n \leqq b$ $(1 \leqq a < b < 2a)$ *habe* $\varphi(n)$ *eine der vier Gestalt*

$$\frac{x}{4n+1}, \quad \frac{x}{4n+3}, \quad \frac{x}{4n} + \frac{1}{4}, \quad \frac{x}{4n} + \frac{3}{4}.$$

Dann ist

$$(10.1) \qquad \left| \sum_{a \leqq n \leqq b} \psi(\varphi(n)) \right| \leqq c_{29} \left(x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \sum_{p=1}^{m} (x^{k_p} a^{l_p - k_p})^{\frac{1}{1+k_p}} \right).$$

Beweis. Aus (5.2) und (5.21) folgt

$$(10.2) \qquad w \left| \sum_{a \leqq n \leqq b} \int_{0}^{\pm \frac{1}{w}} \psi(\varphi(n) + v)\, dv \right| \leqq 2 \sum_{h=1}^{\infty} \left| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi h \varphi(n) i} \right| \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h}, \frac{w}{h^2}\right)$$

$$(10.21) \qquad = 2 \sum_{h \leqq \frac{4a^2}{x}} + 2 \sum_{h > \frac{4a^2}{x}} = 2 S_1 + 2 S_2,$$

zur Abkürzung.

In S_1 ist Hilfssatz 6 mit

$$f(n) = -h \varphi(n)$$

(f habe hinfort diese Bedeutung)

$$1 \geqq \omega = \frac{16 h x}{(4b+3)^3} \geqq c_{30} h x a^{-3}$$

anwendbar und liefert

$$S_1 \leqq c_{31} \sum_{h=1}^{\infty} h^{-\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h}, \frac{w}{h^2}\right)$$

$$\leqq c_{31} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} \sum_{h=1}^{\infty} \frac{1}{h^{\frac{3}{2}}}$$

$$(10.3) \qquad \leqq c_{32} x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}}.$$

Bei der Abschätzung von S_2 darf $a \geqq c_{33}$ für ein geeignetes c_{33} angenommen werden, da andernfalls die Behauptung (10. 1) trivial ist. Ich setze

$$s = 2, \quad t = 2, \quad y = \frac{h x}{4}, \quad z = \frac{h x}{4 a^2}.$$

Dann sind zunächst die Ungleichungen (9. 2) erfüllt. Da s und t festgelegt sind, werden K, r und μ absolute Konstanten. f ist unbeschränkt oft, also r-mal differentiierbar, und für $c_{33} = c_{33}(\mu)$ gilt auch (9. 3). Also ist (9. 1) anwendbar und liefert

$$\Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} e^{2\pi h \eta(n) i} \Big| \leqq c_{34} \sum_{p=1}^{m} z^{k_p} a^{l_p} \leqq c_{34} \sum_{p=1}^{m} h^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p}.$$

Wegen $k_p > 0$ $(1 \leqq p \leqq m)$ wird somit

$$\begin{aligned} S_2 &\leqq c_{34} \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{m} h^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p} \operatorname{Min}\left(\frac{1}{h}, \frac{w}{h^2}\right) \\ &\leqq c_{34} \sum_{p=1}^{m} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p} \left(\sum_{h \leqq w} h^{k_p - 1} + w \sum_{h > w} h^{k_p - 2} \right) \\ &\leqq c_{35} \sum_{p=1}^{m} w^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p}. \end{aligned} \tag{10. 4}$$

Aus (10. 2), (10. 21), (10. 3) und (10. 4) folgt

$$w \Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} \int_0^{\pm \frac{1}{w}} \psi(\varphi(n) + v)\, dv \Big| \leqq c_{36} \left(x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \sum_{p=1}^{m} w^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p} \right),$$

und hieraus, durch den beim Beweise von Hilfssatz 4 angewandten Kunstgriff,

$$\Big| \sum_{a \leqq n \leqq b} \psi(\varphi(n)) \Big| \leqq c_{37} \left(x^{-\frac{1}{2}} a^{\frac{3}{2}} + \sum_{p=1}^{m} w^{k_p} x^{k_p} a^{l_p - 2k_p} + \frac{a}{w} \right).$$

Das erste Glied rechts hat bereits die Form der Behauptung, die Summe der beiden anderen nimmt aber diese Form an, sobald ein geeignetes w nach Hilfssatz 7 gewählt wird.

11. Beweis von (V). Es sei $x > 1$ und, zur Abkürzung,

$$\xi = \frac{\sqrt{x}}{4} \quad \text{oder} \quad = \sqrt{x}; \qquad \eta = \left[\frac{\log \xi}{\log 2}\right].$$

Ferner liege ein Exponentensystem (k_p, l_p) mit $0 < k_p < l_p$ vor. Eine Anwendung von (10. 1) ergibt sodann

$$\left|\sum_{n\leqq\xi}\psi(\varphi(n))\right| \leqq \sum_{h=0}^{\eta}\left|\sum_{1+\left[\frac{\xi}{2^h+1}\right]\leqq n\leqq\left[\frac{\xi}{2^h}\right]}\psi(\varphi(n))\right|$$

$$\leqq c_{39}\sum_{h=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=1}^{m}(x^{k_p}\xi^{l_p-k_p}2^{-h(l_p-k_p)})^{\frac{1}{1+k_p}}+x^{-\frac{1}{2}}\xi^{\frac{3}{2}}2^{-\frac{3}{2}h}\right\}$$

$$\leqq c_{39}\sum_{h=0}^{\infty}\left\{\sum_{p=1}^{m}(x^{k_p+\frac{1}{2}(l_p-k_p)}2^{-h(l_p-k_p)})^{\frac{1}{1+k_p}}+x^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}2^{-\frac{3}{2}h}\right\}$$

$$\leqq c_{38}\left(\sum_{p=1}^{m}x^{\frac{k_p+l_p}{2(1+k_p)}}+x^{\frac{1}{4}}\right).$$

Setzt man hierin für k, l die vier Paare aus Hilfssatz 8 ein, so treten fünf x-Potenzen auf, deren größter Exponent $\frac{163}{494}$ wird. Somit ist

$$\sum_{n\leqq\xi}\psi(\varphi(n))=O\left(x^{\frac{163}{494}}\right).$$

Beachtet man die Definition von ξ und φ, so folgt, daß jede der vier ψ-Summen in (8.1)

$$O\left(x^{\frac{163}{494}}\right)$$

ist. Es wird somit

$$A(x)=\pi x+O\left(x^{\frac{163}{494}}\right). \tag{V}$$

12. Dem Beweise von (VI) schicke ich zwei Hilfssätze voraus, welche den Hilfssätzen 2 und 3 der Landauschen Abhandlung[11]) entsprechen.

Hilfsatz 10. *Für* $x\geqq 2$ *und*

$$\Phi(u)=\frac{x^{\frac{3}{4}}}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}}\left\{\cos\left(2\pi\sqrt{n(u+1)}-\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\pi\sqrt{nu}-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

ist

$$\int_0^x\Phi^2(u)\,du=\gamma x^{\frac{3}{2}}+O(x\log^3 x). \tag{12.1}$$

Beweis. Aus

$$\sum_{n\leqq x}r(n)=O(x),\qquad \sum_{n\leqq x}r^2(n)=O(x\log x)$$

folgt durch partielle Summation

$$\sum_{k\leqq y}\frac{r(k)}{k^{\frac{3}{4}}}=O(y^{\frac{1}{4}}), \tag{12.21}$$

$$\sum_{k\leqq y}\frac{r(k)}{k}=O(\log y), \tag{12.22}$$

12.23) $$\sum_{k>y} \frac{r(k)}{k^{\frac{5}{4}}} = O(y^{-\frac{1}{4}}),$$

12.24) $$\sum_{k\leqq y} \frac{r^2(k)}{\sqrt{k}} = O(y^{\frac{1}{2}} \log y),$$

12.25) $$\sum_{k\leqq y} \frac{r^2(k)}{k} = O(\log^2 y),$$

12.26) $$\sum_{k>y} \frac{r^2(k)}{k^{\frac{3}{2}}} = O(y^{-\frac{1}{2}} \log y).$$

12.27) $$\sum_{k>y} \frac{r^2(k) \log k}{k^{\frac{3}{2}}} = O(y^{-\frac{1}{2}} \log^2 y).$$

Im Beweise des Landauschen Hilfssatzes 2 ist

12.3) $$\int_0^x \Phi^2(u)\,du = \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x) \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r(m)}{m^{\frac{1}{4}}} \sum_{n<m} \frac{r(n)\ \mathrm{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}(m-n)} + O(\sqrt{x}) \sum_{m\leqq x} \frac{r^2(m)}{\sqrt{m}} + O(x^{\frac{3}{2}}) \sum_{m>x} \frac{r^2(m)}{m^{\frac{3}{2}}}$$

nthalten.

Aus (12.3), (12.24) und (12.26) folgt, daß es hinreicht,

12.4) $$S = O(\log^3 x)$$

u beweisen, wo S abgekürzt die in (12.3) auftretende zweifache Summe ezeichnet.

Ich teile

12.5) $$S = \sum_{m=2}^{x} \sum_{n<m} = \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{n\leqq \frac{m}{2}} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\frac{m}{2}<n<m}$$

12.51) $$= S_1 + S_2.$$

In S_1 ist

$$\frac{1}{m-n} \leqq \frac{2}{m},$$

nd daher

$$S_1 \leqq 2 \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r(m)}{m^{\frac{5}{4}}} \sum_{n\leqq m} \frac{r(n)\ \mathrm{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}}$$

ach (12.21) und (12.23) ist für $x \leqq m$ die innere Summe

$$\leqq \sum_{n\leqq x} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} + \sqrt{x} \sum_{n>x} \frac{r(n)}{n^{\frac{5}{4}}} \leqq c_{39} \sqrt[4]{x},$$

r $x > m$ ist sie wegen (12.21)

$$= \sum_{n\leqq m} \frac{r(n)}{n^{\frac{3}{4}}} \leqq c_{40} \sqrt[4]{m}.$$

Somit wird nach (12.22) und (12.23)

$$S_1 \leqq c_{41} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r(m)}{m^{\frac{5}{4}}} \operatorname{Min}(\sqrt[4]{x}, \sqrt[4]{m})$$

$$= c_{41} \left(\sum_{m \leqq x} \frac{r(m)}{m} + \sqrt[4]{x} \sum_{m>x} \frac{r(m)}{m^{\frac{5}{4}}} \right)$$

$$= O(\log x). \tag{12.6}$$

In S_2 ist

$$r(m)\, r(n) \leqq r^2(m) + r^2(n),$$

und daher

$$S_2 \leqq \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^2(m)}{m^{\frac{1}{4}}} \sum_{\frac{m}{2}<n<m} \frac{\operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}(m-n)}$$

$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^{\frac{1}{4}}} \sum_{\frac{m}{2}<n<m} \frac{r^2(n) \operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{n})}{n^{\frac{5}{4}}(m-n)}$$

$$\leqq c_{42} \left(\sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^2(m) \operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{m})}{m^{\frac{3}{2}}} \sum_{n<m} \frac{1}{m-n} \right.$$

$$\left. + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\frac{m}{2}<n<m} \frac{r^2(n) \operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{n})}{n^{\frac{3}{2}}(m-n)} \right)$$

[16]) $$= 2\, c_{42} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^2(m) \operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{m})}{m^{\frac{3}{2}}} \sum_{n<m} \frac{1}{m-n}$$

$$\leqq c_{43} \sum_{m=2}^{\infty} \frac{r^2(m) \log m}{m^{\frac{3}{2}}} \operatorname{Min}(\sqrt{x}, \sqrt{m})$$

$$\leqq c_{43} \left(\log x \sum_{m \leqq x} \frac{r^2(m)}{m} + \sqrt{x} \sum_{m>x} \frac{r^2(m) \log m}{m^{\frac{3}{2}}} \right.$$

$$= O(\log^3 x), \tag{12.7}$$

nach (12.25) und (12.27).

Und nunmehr folgt (12.4) aus (12.5), (12.51), (12.6) und (12.7)

13. Hilfssatz 11. *Für*

$$\Psi(u) = \int_u^{u+1} (A(v) - \pi v)\, dv$$

---

[16]) In der vorigen Ungleichung sind beide Summen wegen

$$\sum_{m=2}^{\infty} \sum_{\frac{m}{2}<n<m} = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{n<m<2n}$$

einander gleich.

st

13.1) $$\int_0^x \Psi^2(u)\,du = \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x\log^3 x).$$

Beweis. Setzt man

13.2) $$\Omega(u) = \Psi(u) + \Phi(u),$$

o ist nach dem Landauschen Beweise seines Hilfssatzes 3

13.3) $$\int_0^x \Omega^2(u)\,du = O(\sqrt{x}).$$

Aus (12.1) und (13.3) folgt mittels der Schwarzschen Ungleichung

13.4) $$\int_0^x \Phi(u)\,\Omega(u)\,du = O(x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{4}}) = O(x),$$

und nunmehr ergeben (12.1), (13.2), (13.3) und (13.4)

$$\int_0^x \Psi^2(u)\,du = \int_0^x \Phi^2(u)\,du - 2\int_0^x \Phi(u)\,\Omega(u)\,du + \int_0^x \Omega^2(u)\,du$$

$$= \gamma x^{\frac{3}{2}} + O(x\log^3 x),$$

. h. (13.1).

14. Beweis von (VI). Es werde

$$Q(u) = A(u) - \pi u$$

gesetzt und überdies für ganzes N

$$N \leqq u \leqq N+1$$

ngenommen. Beim Beweise seines Hilfssatzes 4 zeigt Landau, daß

14.1) $$\Psi(u) - Q\left(u+\tfrac{1}{2}\right) = \left(u - N - \left[u - N + \tfrac{1}{2}\right]\right) r(N+1),$$

14.2) $$\int_N^{N+1} \left(\Psi^2(u) - Q^2\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\right) du$$

$$= \int_N^{N+1} \left(\Psi(u) - Q\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\right)^2 du$$

$$+ 2\int_N^{N+1} \left(Q\left(u+\tfrac{1}{2}\right) - Q(N)\right)\left(\Psi(u) - Q\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\right) du$$

st. Nach Definition hat man ferner

14.3) $$Q\left(u+\tfrac{1}{2}\right) - Q(N) = A\left(u+\tfrac{1}{2}\right) - A(N) - \pi\left(u+\tfrac{1}{2} - N\right).$$

Aus (14.1), (14.2) und (14.3) folgt

$$\left|\int_N^{N+1}\left(\Psi^2(u)-Q^2\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\right)du\right| \leqq c_{44}(r^2(N+1)+r(N+1)+1),$$

$$\left|\int_0^{N}\left(\Psi^2(u)-Q^2\left(u+\tfrac{1}{2}\right)\right)du\right| \leqq c_{44}\sum_{n=1}^{N}(r^2(n)+r(n)+1)$$

$$= O(N\log N).$$

Wendet man nunmehr (13.1) mit $x=N$ an, so ergibt sich

$$\int_0^{N} Q^2\left(u+\tfrac{1}{2}\right)du = \gamma N^{\frac{3}{2}}+O(N\log^3 N),$$

d. h.

$$\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}} Q^2(u)\,du = \gamma N^{\frac{3}{2}}+O(N\log^3 N). \tag{14.4}$$

Jetzt bestimme ich zu $x\geqq 2$ ein N mit

$$N+\frac{1}{2}\leqq x < N+\frac{3}{2}.$$

Dann ist

$$J(x)=\int_0^x Q^2(u)\,du=\left(\int_0^{\frac{1}{2}}+\int_{\frac{1}{2}}^{N+\frac{1}{2}}+\int_{N+\frac{1}{2}}^{x}\right)Q^2(u)\,du=J_1+J_2+J_3 \tag{14.5}$$

Trivialerweise wird hierbei

$$J_1=O(1)$$

und, wegen $Q(u)=O(\sqrt{u})$,

$$J_3=O(x).$$

Aus (14.4) und (14.5) folgt mithin

$$J(x)=\gamma N^{\frac{3}{2}}+O(N\log^3 N)+O(x)$$

$$=\gamma x^{\frac{3}{2}}+O(x\log^3 x),$$

d. h. (VI).

Warschau, den 9. September 1925.

(Eingegangen am 6. November 1925.)

Probleme aus der Theorie der Wärmeleitung.

IV. Mitteilung.

Die räumliche Fortsetzung des Temperaturablaufs (Bolometerproblem).

Von

Felix Bernstein in Göttingen und Gustav Doetsch in Stuttgart.

Wir stellen uns hier ein Problem, welches das genaue Analogon zu em in § 3 der dritten Mitteilung[1]) erledigten ist. Dort wurde die Auf- abe gelöst, den Wärmezustand $\Phi(x, t)$ eines Stabes *zeitlich* zu rekon- ruieren, d. h. bei bekannter Temperatur $A(t)$, $B(t)$ der Enden aus einem ur Zeit $t_0 > 0$) erreichten Zustand $\Phi(x, t_0)$ den Anfangszustand $\Phi(x)$ ieder herzustellen; abstrakt ausgedrückt: Aus den Werten einer der ifferentialgleichung $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ in dem Gebiete $0 < x < c$, $t > 0$ genügen- en Funktion $\Phi(x, t)$ auf den beiden nicht zusammenstoßenden Rändern $= 0$ und $x = c$ und auf einer zum dritten Rand parallelen Strecke $t = t_0$ e Funktionswerte auf diesem Rand zu finden. Hier werfen wir nun die ntsprechende Frage bezüglich der *räumlichen* Koordinate auf: Bei be- annntem Anfangszustand und bekannter Temperatur $B(t)$ des einen Endes $= c$ aus dem Temperaturverlauf $\Phi(x_0, t)$ an einem Zwischenpunkt x_0 $< x_0 < c$) auf den an dem andern Ende $x = 0$ zu schließen; abstrakt: us den Funktionswerten auf zwei zusammenstoßenden Rändern $t = 0$ und

---

[1]) I. Mitteilung von F. Bernstein und G. Doetsch: Eine neue Methode zur tegration partieller Differentialgleichungen. Der lineare Wärmeleiter mit verschwin- nder Anfangstemperatur. Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 285–292.

II. Mitteilung von G. Doetsch: Der lineare Wärmeleiter mit verschwindender nfangstemperatur. Die allgemeinste Lösung und die Frage der Eindeutigkeit. Ebenda, 293–306.

III. Mitteilung von G. Doetsch: Der lineare Wärmeleiter mit beliebiger An- ngstemperatur. Die zeitliche Fortsetzung des Wärmezustandes. Math. Zeitschr. 25 926), S. 608–626.

Im folgenden als M I, M II, M III zitiert.

$x = c$ und auf einer zum dritten Rand parallelen Halbgeraden $x = x_0$ di Funktionswerte auf diesem dritten Rand zu finden.

Ebenso wie man das vorige Problem (unter irrelevanter Verschiebun des Zeitnullpunktes) als die Frage nach der Möglichkeit der Integratio der Wärmeleitungsgleichung in dem nach der Seite der negativen t sic erstreckenden *Halbstreifen* deuten kann (vgl. M. III S. 617), läßt sich di gegenwärtige Aufgabe auffassen als die Frage, *ob* und eventuell *wie wei* die Gleichung in dem nach der Seite der negativen x sich erstreckende *Winkelraum* $x < 0$, $t > 0$ integrierbar ist.

Die *praktische Bedeutung* unseres Problems liegt auf der Hand. E wird überall da auftreten, wo man Temperaturabläufe an Stellen zu messe hat, die der direkten Beobachtung nicht zugänglich sind, so daß man sic darauf beschränken muß, die Feststellungen in einer gewissen Entfernun zu machen (*Bolometerproblem*).

Versuchen wir zunächst, unsere Aufgabe *mathematisch zu formulieren* Wir nehmen (ohne Schaden der Allgemeinheit, wie man leicht sieht) zu Erzielung größerer Übersichtlichkeit an, daß der Anfangszustand $\Phi(x)$ iden tisch verschwindet, ferner schließen wir, um Eindeutigkeit zu erreichen, da Auftreten von singulären Lösungen (vgl. M II S. 299; M III S. 612) aus Hat der Stab an den Enden die Temperatur $A(t)$ bzw. $B(t)$, so wir an dem beliebigen Zwischenpunkt x der Temperaturablauf gegeben durch

$$\Phi(x, t) = A(t) * G(x, t) + B(t) * G(c - x, t),$$

wo $G(x, t)$ die aus M I S. 292 bekannte Greensche Funktion

$$G(x, t) = -\frac{1}{2c^2}\left[\frac{\partial \vartheta_3\left(v, \frac{t}{c^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{x}{2c}}$$

ist und die Sterne „Faltungsintegrale" bedeuten (vgl. M I S. 290). Is nun $B(t)$ und ferner $\Phi(x, t)$ an einer bestimmten Stelle x_0 $(0 < x_0 < c$ bekannt, während $A(t)$ gesucht wird, so kommt dies auf die Auflösun der linearen (Volterraschen) Integralgleichung erster Art für $A(t)$:

$$(1) \quad \Phi(x_0, t) - B(t) * G(c - x, t) = G(x, t) * A(t) = \int_0^t G(x, t - \tau) A(\tau) d$$

hinaus. Diese Integralgleichung läßt sich nicht durch den bekannte Kunstgriff ein- oder mehrmaliger Differentiation[2]) auf eine solche zweite Art reduzieren, da $G(x, t)$ mit seinen sämtlichen Ableitungen für $t \to$ den Grenzwert 0 hat. (M II Hilfssatz 1, S. 293 u. S. 301.) Da sie jedoc

[2]) Wie dieselbe unter unseren aus den früheren Mitteilungen bekannten allgemeine Voraussetzungen zu bewerkstelligen wäre, ergibt sich aus M II Hilfssatz 2, S. 294.

ne Integralgleichung vom Faltungstypus[3]) ist, so ist sie der Behandlung
rch die Laplace-Transformation zugänglich. Setzen wir nämlich voraus,
ß die beteiligten Funktionen Oberfunktionen sind (vgl. M I S. 286), d. h.
ß sie Laplace-Transformierte besitzen, und bezeichnen wir diese, die
nterfunktionen, mit kleinen Buchstaben, so ergibt die Anwendung der
aplace-Transformation nach M I S. 290:

$$\varphi(x_0, s) - b(s)\, g(c - x_0, s) = g(x_0, s)\, a(s),$$

raus folgt:

$$a(s) = \frac{\varphi(x_0, s)}{g(x_0, s)} - b(s)\frac{g(c - x_0, s)}{g(x_0, s)}$$

ler, wenn wir den Ausdruck aus M I S. 289 für g (dort φ_0 genannt)
nsetzen:

a) $$a(s) = \varphi(x_0, s)\frac{\sin c\sqrt{-s}}{\sin(c - x_0)\sqrt{-s}} - b(s)\frac{\sin x_0\sqrt{-s}}{\sin(c - x_0)\sqrt{-s}}.$$

Zu dieser Unterfunktion gilt es nun die Oberfunktion aufzusuchen.
chreiben wir sie folgendermaßen:

$$a(s) = \varphi(x_0, s)\frac{\sin(c - x_0 - [-x_0])\sqrt{-s}}{\sin(c - x_0)\sqrt{-s}} + b(s)\frac{\sin[-x_0]\sqrt{-s}}{\sin(c - x_0)\sqrt{-s}},$$

bemerken wir, daß sie mutatis mutandis genau dieselbe Form hat, wie
über die Lösung in M I S. 289, 290. Nämlich die früheren gegebenen
andwerte $a(s)$ und $b(s)$ lauten jetzt $\varphi(x_0, s)$ und $b(s)$, die frühere
ntervallänge c jetzt $c - x_0$, die frühere Entfernung x des Punktes, in
em die Temperatur bestimmt werden soll, vom linken Endpunkt jetzt
x_0. Im Unterbereich, also bei den totalen Differentialgleichungen, ist
ie Lösung für „Interpolation" mithin ohne weiteres auch zur „Extra-
olation" brauchbar, d. h. analytisch fortsetzbar. Nicht so im Oberbereich:
etzt man $G(x, t)$ für negative x analytisch fort, so ist $G(-x, t) = -G(x, t)$
gl. die Fourierreihe für $G(x, t)$ in M II S. 294, Zeile 3); folglich strebt
er Ausdruck $A(t) * G(x, t)$, wenn x durch negative Werte gegen 0 strebt,
egen $-A(t)$ und nicht gegen $A(t)$, ist also keine Lösung unseres Problems.
ies kommt darin zum Ausdruck, daß sich, wie wir sogleich zeigen werden,
n allgemeinen die jetzige Lösung im Unterbereich (oder, was dasselbe ist,
e frühere von M I für negative x) gar nicht in den Oberbereich „über-
tzen" läßt, mit anderen Worten, daß die Gleichung im Oberbereich, wie
as bei einer Integralgleichung erster Art selbstverständlich ist, nur unter
ewissen, sehr einschränkenden Voraussetzungen eine Lösung hat.

Betrachten wir in dem Ausdruck (1a) für $a(s)$ zunächst den *zweiten*

[3]) G. Doetsch, Die Integrodifferentialgleichungen vom Faltungstypus, Math.
nn. 89 (1923), S. 192–207 [§ 2].

Summanden, so ergibt ein Vergleich mit den in M I S. 290, 291 für d dortige entsprechende Funktion $\varphi_1(x, s)$ gemachten Rechnungen, daß d Faktor $\frac{\sin x_0\sqrt{-s}}{\sin(c-x_0)\sqrt{-s}}$ jedenfalls dann noch eine Oberfunktion besitzt, wen $-(c-x_0) < -x_0$, d. h. $x_0 < \frac{c}{2}$ ist (denn bei φ_1 durfte noch $-c <$ sein). Die zugehörige Oberfunktion lautet übrigens

$$-\frac{1}{2(c-x_0)^2}\left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v, \frac{t}{(c-x_0)^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{c}{2(c-x_0)}}$$

Da der Multiplikation im Unterbereich die Faltung im Oberbereich ent spricht, so gehört also zu dem zweiten Glied die Oberfunktion

$$-\frac{1}{2(c-x_0)^2}B(t) * \left[\frac{\partial\vartheta_3\left(v, \frac{t}{(c-x_0)^2}\right)}{\partial v}\right]_{v=\frac{c}{2(c-x_0)}}$$

sicher dann, wenn $x_0 < \frac{c}{2}$, oder was dasselbe ist, $c - x_0 > x_0$, d. h. wen die beabsichtigte „Stabverlängerung" x_0 *kleiner* ist als die „zugängliche Stablänge" $c - x_0$. — Im anderen Fall, d. h. für $x_0 \geqq \frac{c}{2}$, ist zwa $\frac{\sin x_0\sqrt{-s}}{\sin(c-x_0)\sqrt{-s}}$ keine Unterfunktion (da es sich für $s \to \infty$ wie $e^{-(c-2x_0)\sqrt{s}}$ verhält und daher für $x_0 \geqq \frac{c}{2}$ nicht gegen 0 strebt, was für eine Unter funktion erfüllt sein muß), trotzdem kann das Produkt $b(s)\frac{\sin x_0\sqrt{-s}}{\sin(c-x_0)\sqrt{-}}$ eine Oberfunktion besitzen. Das Problem, diese in einem solchen Fall zu bestimmen, liegt nun aber bei dem *ersten* Summanden in (1a) *immer* vor, da der Faktor $\frac{\sin c\sqrt{-s}}{\sin(c-x_0)\sqrt{-s}}$ für $s \to \infty$ sich wie $e^{x_0\sqrt{s}}$ verhält, wes halb wir nunmehr zu dessen Behandlung übergehen. Das Resultat, da sich hier ergeben wird, läßt sich leicht auf den zweiten Summanden in Falle $x_0 \geqq \frac{c}{2}$ übertragen, so daß wir diesen im folgenden ganz beiseit lassen und $b(s) \equiv 0$, oder was im wesentlichen dasselbe ist, $B(t) \equiv$ annehmen können.

Unsere Integralgleichung lautet dann

$$(1') \qquad \Phi(x_0, t) = A(t) * G(x_0, t),$$

die entsprechende Gleichung im Unterbereich

$$(1a') \quad a(s) = \varphi(x_0, s)\frac{\sin c\sqrt{-s}}{\sin(c-x_0)\sqrt{-s}} = \varphi(x_0, s)\frac{e^{c\sqrt{s}} - e^{-c\sqrt{s}}}{e^{(c-x_0)\sqrt{s}} - e^{-(c-x_0)\sqrt{s}}}.$$

ir werden nun sehen, daß die Integralgleichung (1′) völlig *äquivalent* r folgenden mit sehr viel *einfacherem Kern*:

)
$$\Phi(x_0, t) = \mathsf{A}(t) * \psi(x_0, t)$$

, wo $\psi(x,t) = \dfrac{x\,e^{-\frac{x^2}{4t}}}{2\sqrt{\pi}\,t^{\frac{3}{2}}}$ die aus M II S. 303 bekannte Greensche Funk-

on für den unendlich langen Stab bedeutet. Angenommen, diese Gleichung be eine Oberfunktion A zur Lösung, so ergibt der Übergang in den nterbereich (wegen der Unterfunktion zu ψ vgl. M II S. 305):

a)
$$\varphi(x_0, s) = \alpha(s)\, e^{-x_0\sqrt{s}}.$$

Setzen wir dies in den Ausdruck für $a(s)$ ein, so ergibt sich:

$$a(s) = \alpha(s)\,\frac{e^{(c-x_0)\sqrt{s}} - e^{-(c+x_0)\sqrt{s}}}{e^{(c-x_0)\sqrt{s}} - e^{-(c-x_0)\sqrt{s}}}.$$

iese Funktion können wir nun leicht in den Oberbereich transfor- ieren. Es ist

$$\frac{e^{(c-x_0)\sqrt{s}} - e^{-(c+x_0)\sqrt{s}}}{e^{(c-x_0)\sqrt{s}} - e^{-(c-x_0)\sqrt{s}}} = \frac{1 - e^{-2c\sqrt{s}}}{1 - e^{-2(c-x_0)\sqrt{s}}} = (1 - e^{-2c\sqrt{s}})\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n(c-x_0)\sqrt{s}}\right).$$

lle vorkommenden Glieder haben Oberfunktionen bis auf die Konstante 1. iese wird aber noch mit $\alpha(s)$ multipliziert, so daß auch dieser Bestandteil ansformierbar wird. Deuten wir wieder wie in M II S. 305 durch ein äkchen über 1 an, daß mit 1 nicht gefaltet, sondern einfach multipliziert erden soll, so ergibt sich:

a)
$$A(t) = \mathsf{A}(t) * \{\breve{1} - \psi(2c, t)\} * \{\breve{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n(c - x_0), t)\}$$
$$= \mathsf{A}(t) * \{\breve{1} - \psi(2c, t)\} * \{\breve{1} - \Psi(2(c - x_0), t)\},$$

o
$$\Psi(y, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi(ny, t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \psi(y, t)^{*n}$$

setzt wurde. Durch gliedweise Ausführung der Faltung in $\{\} * \{\}$ und eachtung des Additionstheorems der ψ-Funktion (M II S. 305) er- lt man:

b)
$$A(t) = \mathsf{A}(t) * \Big\{\breve{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2n(c - x_0), t) - \psi(2c, t) - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2(n(c - x_0) + c), t)\Big\}$$
$$= \mathsf{A}(t) * \Big\{\breve{1} - \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2((n-1)(c-x_0)+c), t) - \psi(2n(c-x_0), t)]\Big\}.$$

Übrigens gelten die erhaltenen Ausdrücke offenbar unabhängig vo der bei der Herleitung gemachten Voraussetzung, daß die beteiligte Funktionen Oberfunktionen sind.

Damit haben wir bewiesen, daß die Lösbarkeit von (2) für die vo (1′) *hinreichend* ist. Wir zeigen nun aber, daß sie auch *notwendig* is und knüpfen zu diesem Zweck an die Form an, die der Greensche Funktion $G(x,t)$ in M II S. 305 gegeben worden ist:

$$G(x,t) = \{\psi(x,t) - \psi(2c-x,t)\} * \{\breve{1} - \Psi(2c,t)\}$$

(die Funktion $\Psi(2c,t)$ wurde in M II mit $-\Psi(t)$ bezeichnet).

Da für $x < c$ auf Grund des Additionstheorems der ψ-Funktion

$$\psi(x,t) - \psi(2c-x,t) = \psi(x,t) * \{\breve{1} - \psi(2(c-x),t)\}$$

ist, so ergibt sich:

$$G(x,t) = \psi(x,t) * \{\breve{1} - \psi(2(c-x),t)\} * \{\breve{1} - \Psi(2c,t)\},$$

was wir durch Einsetzen des Reihenausdruckes für $\Psi(2c,t)$ auch i folgende Form bringen können:

$$\begin{aligned} G(x,t) &= \psi(x,t) * \Big\{\breve{1} + \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2nc,t) - \psi(2(c-x),t) \\ &\qquad - \sum_{n=1}^{\infty} \psi(2((n+1)c-x),t)\Big\} \\ &= \psi(x,t) * \Big\{\breve{1} + \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2nc,t) - \psi(2(nc-x),t)]\Big\}. \end{aligned}$$

Hat also die Gleichung (1) eine Lösung $A(t)$, so gilt

$$\Phi(x_0,t) = \Big[A(t) * \Big\{\breve{1} - \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2(nc-x_0),t) - \psi(2nc,t)]\Big\}\Big] * \psi(x_0,t),$$

d. h. auch die Gleichung (2) hat eine Lösung:

$$\text{(4a)} \qquad \mathsf{A}(t) = A(t) * \Big\{\breve{1} - \psi(2(c-x),t)\Big\} * \Big\{\breve{1} - \Psi(2c,t)\Big\}$$

$$\text{(4b)} \qquad = A(t) * \Big\{\breve{1} - \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2(nc-x_0),t) - \psi(2nc,t)]\Big\}.$$

Stellt man die Gleichungen (3b) und (4b) einander gegenüber, so sieh man, daß die eine jeweils die Auflösung der anderen, betrachtet al lineare Integralgleichung 2. Art, darstellt, daß also die Funktionen

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2((n-1)(c-x_0)+c),t) - \psi(2n(c-x_0),t)]$$

und

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2(nc-x_0),t) - \psi(2nc,t)]$$

zueinander reziprok sind.

Beachten wir nun, daß die Gleichung (2) nichts anderes ausdrückt, ls daß $\Phi(x_0, t)$ die Temperatur eines einseitig unendlich langen Stabes on der Anfangstemperatur 0 bei der Abszisse x_0 ist, wenn an das Ende ie Temperatur $A(t)$ angelegt wird (M II S. 303), so können wir den atz aussprechen:

Notwendig und hinreichend für die Existenz einer Randtemperatur $1(t)$, *die bei endlichem Stab an der Stelle* $x_0 (0 < x_0 < c)$ *den Tem-eraturverlauf* $\Phi(x_0, t)$ *hervorbringt, ist die Existenz einer Randtemperatur* (t), *die denselben Verlauf bei unendlich langem Stab erzeugen würde.*

Zur Berechnung der einen Temperatur aus der anderen dienen die Glei-hungen (3) und (4). Hierbei ist angenommen, daß die Anfangstempe-atur $\Phi(x)$ und die Temperatur $B(t)$ an dem anderen Rande $x = c$ ver-chwindet. Ist letzteres nicht der Fall, so tritt im allgemeinen noch die Bedingung hinzu, daß $x_0 < \frac{c}{2}$, d. h. $c - x_0 > x_0$ sein muß.

Man kann die Gleichung (1) unter der Voraussetzung ihrer Lösbar-eit auch direkt auf eine Gleichung der Form (2), d. h. mit dem Kern $\psi(x_0, t)$ bringen, indem man die Gleichung (3b) mit $\psi(x_0, t)$ faltet und ierauf $A(t) * \psi(x_0, t)$ wieder durch $\Phi(x_0, t)$ ersetzt:

5) $$A(t) * \psi(x_0, t)$$

$$= \Phi(x_0, t) * \left\{\breve{1} - \sum_{n=1}^{\infty} [\psi(2((n-1)(c-x_0)+c), t) - \psi(2n(c-x_0), t)]\right\}.$$

Diese Gleichung läßt sich natürlich auch unmittelbar aus Gleichung (1) ewinnen: Setzt man diese in der Form von M II S. 306 an ($B(t)$ wurde etzt $\equiv 0$ vorausgesetzt):

$$\Phi(x_0, t) = \{A(t) * [\psi(x_0, t) - \psi(2c - x_0, t)]\} * \{\breve{1} - \Psi(2c, t)\},$$

o kann man sie als eine lineare Integralgleichung 2. Art für

$$\mathfrak{A}(t) = A(t) * [\psi(x_0, t) - \psi(2c - x_0, t)]$$

nsehen und erhält, da $\Psi(2c, t) = -\sum_{1}^{\infty} \psi(2c, t)^{*n}$ offenbar die reziproke unktion zu $\psi(2c, t)$ ist:

$$\mathfrak{A}(t) = \Phi(x_0, t) * \{\breve{1} - \psi(2c, t)\}.$$

Für $x_0 < c$ ist

$$\mathfrak{A}(t) = [A(t) * \psi(x_0, t)] * \{\breve{1} - \psi(2(c - x_0), t)\},$$

olglich, da die reziproke Funktion zu $\psi(2(c - x_0), t)$ gleich $\Psi(2(c - x_0), t)$ ist:

$$A(t) * \psi(x_0, t) = \mathfrak{A}(t) * \{\breve{1} - \Psi(2(c - x_0), t)\}$$

der, indem wir den oben gefundenen Wert für $\mathfrak{A}(t)$ einsetzen:

$$A(t) * \psi(x_0, t) = \Phi(x_0, t) * \{1 - \psi(2c, t)\} * \{\breve{1} - \Psi(2(c - x_0), t)\};$$

diese Gleichung geht nach einer geringfügigen Rechnung in Gleichung (5) über.

Mit der Zurückführung der Integralgleichung (1) auf die Gleichung (2) dürfte eine *für die physikalische Praxis ausreichende* Erledigung des Problems der räumlichen Fortsetzung des Temperaturablaufs gewonnen sein, da der Kern $\psi(x, t)$ rechnerisch sehr leicht zu behandeln ist und der Ersatz der Integralgleichung durch approximierende lineare Gleichungen wegen der variablen oberen Grenze auf ein rekurrentes System führt:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\,\Phi(x_0, t_1) = \psi(x_0, t_1)\,\mathsf{A}(t_0)\\
&\frac{1}{\Delta t}\,\Phi(x_0, t_2) = \psi(x_0, t_2)\,\mathsf{A}(t_0) + \psi(x_0, t_1)\,\mathsf{A}(t_1)\\
&\qquad\qquad\qquad

rmittels der bekannten „Umkehrformel“

$$A(t) = \lim_{\omega=\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} \alpha(s)\, e^{ts}\, ds$$

e Oberfunktion $A(t)$ bestimmen. Nach einem Satz von Pincherle[7]) ist für die Existenz und Richtigkeit dieser Formel hinreichend, daß $\alpha(s)$ ne für $\Re s \geqq \sigma > 0$ (mit eventueller Ausnahme von $s = \infty$) reguläre nktion ist (dies ist sicher erfüllt, da $\varphi(x_0, s)$ als Unterfunktion in ner Halbebene regulär ist) und sich dort in der Form

$$\alpha(s) = \frac{c_0}{s} + \frac{c_1(s)}{s^{1+\vartheta}}$$

rstellen läßt, wo c_0 eine Konstante, $\vartheta > 0$ und $c_1(s)$ eine für $\Re s \geqq \sigma$ schränkte Funktion bedeutet. In Formel (6) kann dann für γ jede elle Zahl $\geqq \sigma$ gewählt werden. Es genügt also, daß die Unterfunktion s gegebenen Temperaturverlaufs $\Phi(x_0, t)$ von der Form ist:

$$\varphi(x_0, s) = c_0 \frac{e^{-x_0\sqrt{s}}}{s} + c_1(s) \frac{e^{-x_0\sqrt{s}}}{s^{1+\vartheta}}.$$

Man überzeugt sich leicht[8]), daß diese Bedingung erfüllt ist, wenn (t) die Gestalt hat:

$$A(t) = C_0 + C_1(t)\, t^{\vartheta},$$

$C_1(t)$ für $t \geqq 0$ beschränkt ist; d. h. Wenn die Randtemperatur $A(t)$ n ihrem Anfangswert C_0 nicht stärker ansteigt als eine Potenz der it t, so ist sie auf diesem Wege sicher bestimmbar. Praktisch brauchbar diese Methode vor allem dann, wenn man die Unterfunktion $\varphi(x_0, s)$ $\Phi(x_0, t)$ sowie das Integral (7) analytisch auswerten kann. Statt (7) r hinreichend viele t auszurechnen, was die vorhergehende Bestimmung n $\varphi(x_0, s)$ für komplexe s voraussetzt, kann man auch das Integral

$$\alpha(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} A(t)\, dt$$

rekt „umkehren“, indem man es durch die Substitution $e^{-t} = u$ zunächst ein solches mit endlichen Grenzen verwandelt und die Integralgleichung

$$\alpha(s) = \int_0^1 u^{s-1} A(-\lg u)\, du$$

proximativ durch ein System linearer Gleichungen ersetzt.

[7]) S. Pincherle, Sur les fonctions déterminantes, Ann. éc. norm. 22 (1905), S. 1–68 31–36].

[8]) Es ist nämlich $\frac{1}{s} = L(1)$, $\frac{1}{s^{1+\vartheta}} = L\left(\frac{t^{\vartheta}}{\Gamma(1+\vartheta)}\right)$, wenn wir die Laplace-ansformation durch L andeuten.

Die *zweite Methode* vermeidet den Weg über den Unterbereich u macht statt der Voraussetzung über das Verhalten der Unterfunktio $\varphi(x_0, s)$ eine Annahme über die Gestalt der Funktion $\Phi(x_0, t)$ selbs Ist diese nämlich in eine Reihe der Form

$$\Phi(x_0, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(\lambda_n, t), \tag{8}$$

wo die λ_n beliebig reell, aber $> x_0$ sind entwickelbar und konvergie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \psi(\lambda_n - x_0, t)$$

gleichmäßig für $t \geqq 0$, so ist sie wegen des Additionstheorems der ψ-Funkti offenbar eine Lösung unserer Integralgleichung (2). Im praktischen F wird man die (eventuell nur für diskrete Punkte gegebene) Funktion $\Phi(x_0,$ durch eine passend gewählte Kombination von endlich vielen ψ-Funktion approximieren $\left(\psi(\lambda, t)\right.$ ist für $t = 0$ gleich 0, steigt bei $t = \frac{\lambda^2}{6}$ zu de Maximalwert $\frac{(\sqrt{6})^3}{2\sqrt{\pi}\, e^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\lambda^2}$ an und klingt dann rasch zu 0 ab$\left.\right)$, entwed nach der Methode der kleinsten Quadrate oder so, daß die Reihe m den endlich vielen gegebenen Funktionswerten übereinstimmt, und bekomm dann für $A(t)$ sofort einen geschlossenen analytischen Ausdruck.

(Eingegangen am 23. November 1925.)

Über die Summierbarkeit der Orthogonalreihen.

Von

Stefan Kaczmarz in Lwów (Lemberg).

In dieser Arbeit beschäftige ich mich mit der Summierbarkeit der thogonalreiche $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ konvergiert. In einer rigen Note[1]) habe ich bewiesen, daß die Konvergenz von $\sum a_n^2 \sqrt{\lg n}$ r Konvergenz der arithmetischen Mittel von Teilsummen der Orthogolreihe hinreicht; dies läßt sich nun folgendermaßen verschärfen: wenn e Reihe $\sum a_n^2 (\lg\lg n)^2$ konvergiert, dann ist die Orthogonalreihe fast erall C_1-summierbar; die Konvergenz von $\sum a_n^2 V(n)$ aber, wenn $(n) = o[(\lg\lg n)^2]$, ist nicht hinreichend, wie es sich durch Beispiele igen läßt[2]).

I.

Betrachten wir eine Folge $\{\varphi_n(x)\}$ von Orthogonalfunktionen, welche Intervall $[a, b]$ definiert, normiert und L^2-integrierbar sind. Es sei ßerdem eine Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$$

geben; dann gilt der

Satz I. *Wenn die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg\lg n)^2$$

nvergiert, dann konvergiert die Folge

$$s(x; 2^n) = \sum_{k=1}^{2^{2^n}} a_k \varphi_k(x) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

t überall im Intervall $[a, b]$.

[1]) Math. Zeitschr. 23 (1925), S. 268.

[2]) Dasselbe wurde auch von D. Menchoff (etwas früher) gefunden, vgl. Comptes ndus 22. VI. 1925.

In der Tat, nach dem Satz von H. Rademacher[3]) ist die Teilfol $s(x; 2^n)$ fast überall konvergent.

Satz II. *Unter der Voraussetzung des vorigen Satzes konvergi die Folge*

$$s(x, n) = s_{2^n}(x) \qquad (n = 1, 2, ..$$

fast überall.

Beweis. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit können wir unt „log" den Logarithmus zur Basis 2 verstehen. Wir setzen

$$n = 2^r + \vartheta_1 2^{r-1} + \ldots + \vartheta_{r-1} 2 + \vartheta_r \qquad (\vartheta_i = 0, 1$$

$$s(x; p) = \sum_{k=1}^{2^p} a_k \varphi_k(x);$$

dann ist identisch

$$s(x; n) - s(x; 2^r) = \sum_{i=1}^{r} [s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_i 2^{r-i}) - s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-i+}$$

Zwecks Abschätzung der Differenz wenden wir die Schwarzsche U gleichung an

$$[s(x; n) - s(x; 2^r)]^2 \leqq r \sum_{i=1}^{r} [s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_i 2^{r-i}) - s(x; 2^r + \ldots + \vartheta_{i-1} 2^{r-}$$

Die Glieder rechts sind entweder Null oder von der Form

$$[s(x; 2^r + h \cdot 2^j) - s(x; 2^r + h \cdot 2^j + 2^{j-1})]^2$$
$$(j = 1, 2, \ldots, r;\ h = 0, 1, \ldots, 2^{r-j} - 1);$$

es gilt also a fortiori die Ungleichung

$$(3) \quad [s(x; n) - s(x; 2^r)]^2 \leqq r \sum_{j=1}^{r} \sum_{h=0}^{2^{r-j}-1} [s(x; 2^r + h \cdot 2^j) - s(x; 2^r + h \cdot 2^j + 2^j$$

Die obige Relation ist für jedes n, daß die Bedingung $2^r < n < 2^{r+1}$ er füllt, gültig, wobei zu bemerken ist, daß die rechte Seite von n unab hängig ist.

Der Kürze halber bezeichnen wir die rechte Seite von (3) mit

$$u_r(x).$$

Es ist nun leicht zu beweisen, daß die Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ fast überal konvergiert. Die Glieder dieser Reihe sind nämlich nicht negativ un die Reihe

$$(4) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} \int_a^b u_r(x)\, dx$$

ist konvergent, wie im folgenden gezeigt wird.

[3]) H. Rademacher, Math. Ann. 87 (1922), S. 114; vgl. auch meine Note i den Math. Ann. 96 (1926), S. 148.

Wir setzen

$$t(m,n) = \sum_{k=2^m+1}^{2^n} a_k^2,$$

nn ist das allgemeine Glied der Reihe (4) gleich

$$\int_a^b u_r(x)\,dx = r \sum_j \sum_k t(2^r + h\cdot 2^j,\ 2^r + h\cdot 2^j + 2^{j-1});$$

o

$$\int_a^b u_r(x)\,dx \leqq r \sum_{j=1}^{r} t(2^r,\ 2^{r+1} - 2^{j-1}) \leqq r^2\, t(2^r,\ 2^{r+1}),$$

raus folgt, daß

$$\sum_{r=1}^{\infty} \int_a^b u_r(x)\,dx \leqq \sum_{r=1}^{\infty} r^2\, t(2^r,\ 2^{r+1}) \leqq \sum_{k=2}^{\infty} a_k^2 (\lg\lg k)^2.$$

konvergiert also die Reihe (4), was die Konvergenz der Reihe $\sum_{r=1}^{\infty} u_r(x)$ t überall impliziert. Da aber die Folge $\{s(x;2^r)\}$ nach Satz I fast erall konvergiert, so ist auch die Folge $\{s(x;n)\}$, wie die Ungleichung) lehrt, fast überall konvergent, wodurch der Satz bewiesen ist.

Es folgt nun der

Satz III. *Unter der Voraussetzung, daß die Reihe* (2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lg\lg n)^2$$

nvergiert, ist die Reihe (1) *fast überall C_1-summierbar.*

Beweis. Wie ich vorher gezeigt habe[4]), ist zur fast ausnahmslosen i. bis auf eine Nullmenge) C_1-Summierbarkeit einer Reihe (1) für die a_n^2 konvergiert, notwendig und hinreichend, daß die Folge $s_{2^n}(x)$ fast erall konvergiere. Diese Bedingung ist aber bei unseren Voraussetzungen ch Satz II erfüllt, womit der Satz bewiesen ist.

II.

Es entsteht die Frage, ob man nicht aus der Konvergenz von

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 V(n),$$

rin $V(n)$ eine Funktion bezeichnet, welche die Eigenschaft besitzt, daß

$$V(n) > 0, \quad V(n) = o[(\lg\lg n)^2]$$

, auf die Summierbarkeit der Orthogonalreihe schließen kann, was natür-

[4]) Math. Ann. 96 (1926), S. 151.

lich eine Verschärfung des Satzes III zur Folge hätte. Diese Frage i negativ zu beantworten; es gilt nämlich der

Satz IV. *Für jede positive Funktion $V(n)$ von der Eigenschaft, da*

$$V(n) = o[(\lg\lg n)^2],$$

existiert eine normierte Folge von Orthogonalfunktionen $\{\chi_n(x)\}$ und ei numerische Folge $\{b_n\}$ von der Beschaffenheit, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x)$ im Intervall $[a, b]$ nirgends C_1-summierbar ist, obgleich die Reih $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 V(n)$ konvergent ist.

Beim Beweise dieser Tatsache werden wir uns an ein Resultat von Menchoff anlehnen. Menchoff hat nämlich folgendes bewiesen[5]):

Für jede positive Funktion $W(n)$ von der Beschaffenheit

$$W(n) = o(\lg n)$$

existiert eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$, worin $\varphi_n(x)$ Orthogonalfunktionen be zeichnen, die im Intervall $[0, 1]$ definiert und normiert sind, mit folgen den Eigenschaften:

I. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n)$ konvergiert;

II. es existiert eine Folge von natürlichen Zahlen

$$\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 < \ldots,$$

welche die Bedingung

$$\nu_1 = 0,\ N_0 = 0,\ N_{k-1} = 1 + 2(\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{k-1}) < \nu_k \quad (k = 2, 3, \ldots$$

erfüllen, und eine Mengenfolge

$$\{E_k\} \qquad (k = 1, 2, \ldots$$

für welche in jedem Punkt x aus der Menge E_k

$$|a_{n_k}\varphi_{n_k}(x) + \ldots + a_{N_k-1}\varphi_{N_k-1}(x)| > \frac{1}{2},$$

worin $n_k = N_{k-1} + m_k$, $1 \leqq m_k \leqq \nu_k$ ist und die Menge E der Punkte welche in unendlich vielen E_k auftreten, das Maß 1 besitzt;

III. in der Komplementarmenge von E ist

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{a_n}.$$

Mit Hilfe dieser Reihe werden wir eine neue Reihe bauen, durch welche unser Satz bewiesen wird.

[5]) Menchoff, Fund. Math. 4 (1923), S. 89—104.

Wir setzen nämlich

$$W(n) = V(2^n);$$

aber

$$\frac{W(n)}{\lg^2 n} = \frac{V(2^n)}{(\lg\lg 2^n)^2},$$

sind die Menchoffschen Bedingungen erfüllt, es existiert also die Reihe

$$\sum a_n \varphi_n(x)$$

n den Eigenschaften I, II, III.

Jetzt definieren wir

$$\chi_{2^n}(x) = \varphi_n(x) \quad \text{für} \quad n_k \leqq n \leqq N_k - 1,$$

r andere m bezeichne $\chi_m(x)$ eine beliebige von den anderen Funktionen r Folge $\{\varphi_n(x)\}$; dies ist immer möglich, weil wenigstens die Funktionen

$$\varphi_{N_k}(x) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

ch der Eigenschaft II zur Restfolge von $\{\varphi_n(x)\}$ gehören. Betrachten r nun die Reihe

)
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \chi_n(x)$$

orin

$$b_{2^n} = a_n \quad \text{für} \quad n_k \leqq n \leqq N_k - 1,$$
$$b_m = 0 \quad \text{sonst}$$

. Die gebildete Reihe erfüllt die Bedingungen unseres Satzes: Zuächst ist

)
$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 V(n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 W(n),$$

so die Reihe (6) konvergent, weiter ist die Reihe (5) nirgends C_1-sumierbar: Es gilt nämlich für jeden Wert von x aus der Menge E für die ifferenz zwischen entsprechend gewählten Teilsummen $S(x; n_k)$ und $(x; N_k - 1)$ unserer Reihe (5) die Ungleichung

$$|S(x; n_k) - S(x; N_k - 1)| > \frac{1}{2}$$

ut Eigenschaft II der Menchoffschen Reihe, weil diese Differenz gleich er Summe

$$a_{n_k} \varphi_{n_k}(x) + \ldots + a_{N_k - 1} \varphi_{N_k - 1}(x)$$

t, und diese Ungleichung ist bei gegebenem x für unendlich viele k erfüllt.

Daher ist die Folge $\{S(x; n)\}$, wie leicht hieraus gefolgert werden ann, überall in E, also fast überall im Intervall $[0, 1]$ divergent. Nach em Satz von Kolmogoroff[6]) konvergiert fast überall

$$S(x; n) - \sigma_{2^n}(x) \to 0,$$

[6]) Kolmogoroff, Fund. Math. 5 (1924), S. 96.

wobei

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} S_k(x), \qquad S_k(x) = \sum_{j=1}^{k} b_j \chi_j(x)$$

ist. Es ist also die Folge der arithmetischen Mittel $\{\sigma_p(x)\}$ fast überall divergent; in der übrigen Menge setzen wir

$$\chi_{2^n}(x) = \frac{1}{b_{2^n}};$$

dann ist die Folge $\{\sigma_p(x)\}$ überall divergent, w. z. b. w.

Wie wir eben gesehen haben, ist die Folge $S(x; n)$ unserer Reihe überall divergent; trotzdem kann sie fast überall summierbar sein, wie der folgende Satz belehrt:

Satz V. *Es sei die Reihe*

$$\sum_{k=2}^{\infty} a_n^2 \sqrt{\lg\lg k}$$

konvergent; dann ist die Folge $\{s_{2^n}(x)\}$ *fast überall* C_1*-summierbar.*

Um dies zu beweisen, bezeichnen wir mit $t_n(x)$ das arithmetische Mittel von $s_{2^n}(x)$, d. h.

$$t_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} s_{2^n}(x)$$

und betrachten, indem wir die Variable x der Kürze wegen weglassen, die Differenz

$$(7) \qquad D_n = (f - t_n)^2 - (f - t_{n+1})^2 = (t_{n+1} - t_n)(2f - t_n - t_{n+1}).$$

Dabei bezeichne $f(x)$ diejenige Funktion, für welche

$$(8) \qquad \int_a^b (f - s_n)^2\, dx \to 0.$$

Das Integral von (7) ist nicht größer als

$$\int_a^b |D_n|\, dx \leqq \sqrt{\int (t_{n+1} - t_n)^2\, dx \cdot \int (2f - t_n - t_{n+1})^2\, dx}.$$

Da aber

$$\int_a^b (t_n - t_{n+1})^2\, dx = \sum_{k=1}^{n} (a_{2^{k+1}}^2 + \ldots + a_{2^{k+1}}^2)\frac{k^2}{n^2(n+1)^2},$$

$$\int_a^b (2f - t_n - t_{n+1})^2\, dx = \sum_{k=1}^{n-1} (a_{2^{k+1}}^2 + \ldots + a_{2^{k-1}}^2)\, k^2 \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right)^2 +$$

$$+ (a_{2^{n+1}}^2 + \ldots + a_{2^{n+1}}^2)\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^2 + 4r_{2^{n+1}},$$

wenn

$$r_p = \sum_{p+1}^{\infty} a_k^2$$

gesetzt wird, so ist

$$9) \qquad \int_a^b |D_n|\,dx \leqq 2\frac{B_n}{n+1} + 2\sqrt{\frac{B_n}{(n+1)^2}\,r_{2^n}},$$

worin

$$B_n = \sum_{k=1}^{n}(a^2_{2^{k+1}} + \ldots + a^2_{2^{k+1}})\frac{k^2}{n^2}$$

bezeichnet.

Hieraus folgt, daß die Reihe

$$10) \qquad \sum \int_a^b |D_n|\,dx$$

konvergiert, denn die erste Reihe in der rechten Seite von (8) ist gewiß konvergent und für ein Stück der zweiten Reihe liefert die Schwarzsche Ungleichung

$$\left[\sum \sqrt{\frac{B_n}{(n+1)^2}\,r_{2^n}}\right]^2 \leqq \sum \frac{B_n \sqrt{\lg n}}{n} \sum \frac{r_{2^n}}{n\sqrt{\lg n}}.$$

Hier ist jede der beiden Reihen rechts konvergent, denn

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{r_{2^n}}{n\sqrt{\lg n}} = \sum_{k=2}^{\infty}(a^2_{2^{k+1}} + \ldots + a^2_{2^{k+1}})\left(\frac{1}{2\sqrt{\lg 2}} + \ldots + \frac{1}{k\sqrt{\lg k}}\right) <$$

$$< \sum (a^2_{2^{k+1}} + \ldots + a^2_{2^{k+1}})\,2\sqrt{\lg k} \leqq 2\sum a_k^2 \sqrt{\lg \lg k}$$

und ähnlich beweist man die Konvergenz der anderen Reihe.

Aus der Konvergenz von (10) folgt, daß die Reihe

$$\sum \{(f-t_n)^2 - (f-t_{n+1})^2\},$$

also auch die Folge $\{(f-t_n)^2\}$ fast überall konvergiert. Wegen (8) muß fast überall $f-t_n$ gegen Null konvergieren; der Satz ist somit bewiesen.

Wir wissen nun also, daß es Orthogonalreihen gibt, die nirgends C_1-summierbar sind. Man kann aber die Frage stellen, ob diese Reihen nicht mit Mitteln von höherer Ordnung summierbar sind. Die Antwort darauf ist negativ: Wie ich nämlich in der vorigen Note[7]) gezeigt habe, *ist jede Reihe* (1), *für welche* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ *konvergiert und die fast nirgends* C_1*-summierbar ist, auch fast nirgends* C_k*-summierbar* $(k = 2, 3, \ldots)$, *ja sogar fast nirgends mit der Poissonschen Methode summierbar*, d. h. es existiert auch fast nirgends der Grenzwert

$$\lim_{y \to 1} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)\, y^n.$$

---

[7]) A. a. O. [1]), S. 267–268.

(Eingegangen am 10. Dezember 1925.)

Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden.

Zweite Abhandlung.

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

Es sei $x > 0$, $k \geqq 2$ ganz;

$$Q = \sum_{\alpha,\beta=1}^{k} a_{\alpha\beta} u_\alpha u_\beta \qquad (a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha})$$

eine positiv definite quadratische Form mit rationalen Koeffizienten und der Determinante D. Speziell werde die Kugelform mit K bezeichnet:

$$K = \sum_{\alpha=1}^{k} u_\alpha^2 .$$

$\sum_{Q \leqq x} 1$ stellt dann die Anzahl aller Gitterpunkte im abgeschlossenen Ellipsoid $Q \leqq x$ dar. Dieser Ausdruck wird durch das Ellipsoidvolumen

$$\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}$$

approximiert. Ich setze zur Abkürzung

$$\mathsf{P}_Q(x) = \sum_{Q \leqq x} 1 - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}$$

und

$$\mathsf{P}_k(x) = \sum_{K \leqq x} 1 - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} x^{\frac{k}{2}}$$

(falls eine Verwechslung nicht zu befürchten ist, schreibe ich einfach $\mathsf{P}(x)$). Im folgenden soll stets $k \geqq 4$ angenommen und, wenn nötig, noch weiter eingeschränkt werden.

In der ersten gleichnamigen Abhandlung[1]) zeigte Verfasser, nach der
-Richtung hin,

1) $$P_Q(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 8),$$

$$P_k(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 5).$$

Nach Landau[2]) gilt (1) für $k \geqq 5$, während darüber hinaus

2) $$P_Q(x) = O(x \log^2 x) \qquad (k = 4)$$

st. Für die vierdimensionale Kugel hatte Landau bereits früher

3) $$P_4(x) = O(x \log x)$$

achgewiesen, und diese Beziehung läßt sich noch um ein weniges zu

4) $$P_4(x) = O\left(\frac{x \log x}{\log \log x}\right)$$

erschärfen[3]).

Nach der $\Omega - \Omega_R - \Omega_L$-Richtung zeigten: Landau[4])

5) $$P_Q(x) = \begin{matrix}\Omega_R \\ \Omega_L\end{matrix}\left(x^{\frac{k-1}{4}}\right),$$

V. Jarník[5])

6) $$P_Q(x) = \Omega\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

nd Verfasser[6])

7) $$P_4(x) = \Omega(x \log \log x).$$

---

[1]) Math. Zeitschr. 19 (1924), S. 300–307. Im folgenden mit I zitiert.

[2]) „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden", Math. Zeitschr. 21 1924), S. 126–132. Beide Verfasser behandeln den allgemeineren Fall, daß jeder itterpunkt mit einem geeigneten Gewicht belegt wird. — In einer soeben erschienenen bhandlung „Über Gitterpunkte in vierdimensionalen Ellipsoiden", Math. Zeitschr. 24 1925), S. 519–529, zeigt H. D. Kloosterman: Für $Q = au_1^2 + bu_2^2 + cu_3^2 + du_4^2$ a, b, c, d ganzzahlig) ist

$$P_Q(x) = O(x \log x).$$

[3]) A. Walfisz, „Teilerprobleme", dieses Heft der Math. Zeitschr. S. 66–88.

[4]) In einem allgemeinen $\Omega_R - \Omega_L$-Satz enthalten: „Über die Anzahl der Gitter unkte in gewissen Bereichen. Vierte Abhandlung", Göttinger Nachrichten 1924, S. 137 is 150. Landau läßt beliebige reelle Ellipsoide zu und zeigt auch, daß für geeignete ositive c_Q, c_Q' die beiden Ungleichungen

$$\pm P_Q(x) > c_Q x^{\frac{k-1}{4}}$$

in jedem Intervall $\xi \leqq x \leqq \xi + c_Q' \sqrt{\xi}$ ($\xi > 1$ beliebig) Lösungen besitzen.

[5]) Bei Landau, „Über Gitterpunkte in mehrdimensionalen Ellipsoiden. Zweite bhandlung", Math. Zeitschr. 24 (1925), S. 299–310.

[6]) l. c. [3]).

Ferner wies Landau, l. c. [5]) nach: 1) daß (6) auch dann gilt, wenn x nur die Sprungstellen von $\sum_{Q \leqq x} 1$ durchläuft, und 2) daß eine Beziehung von der Form

$$P_Q(x) = c_Q x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),$$

für konstantes c und stetig, oder auch nur über alle Sprungstellen, wachsendes x, unmöglich ist.

Ein Vergleich von (1) und (6) ergibt, daß für $k \geqq 5$ beide Beziehungen definitiv werden; desgleichen sind (2), (3), (4) und (7) immer noch „gut".

Über (5) ist kürzlich Ch. H. Müntz hinausgekommen. Sein Hauptsatz ist in der Abhandlung „Über den Gebrauch willkürlicher Funktionen in der analytischen Zahlentheorie. I. Das Ellipsoidgitter in n Dimensionen" [7]) formuliert und wird in kurzem in der Math. Zeitschr. genauer ausgeführt werden [8]). Er lautet: *Besitzt Q ganzzahlige Koeffizienten und läuft n über natürliche Zahlen, so wird*

$$(8) \qquad \sum_{Q \leqq n} 1 - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{m=1}^{n} m^{\frac{k}{2}-1} = \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(n^{\frac{k-1}{4}}\right);$$

ein analoger Satz besteht auch in entsprechender Fassung für alle Q mit rationalen Koeffizienten.

Wir wollen sehen, was dieser Satz für $\Omega_R - \Omega_L$ ergibt; es genügt hierbei eine erste Näherung, weil damit schon alles Wesentliche gesagt ist.

Ich setze (eine auch für später nützliche Abkürzung)

$$M = \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{2\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

Dann ist

$$(9) \qquad \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \sum_{m=1}^{n} m^{\frac{k}{2}-1} - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} n^{\frac{k}{2}} \sim M n^{\frac{k}{2}-1}$$

$$(10) \qquad P(n-1) - P(n-0) \sim 2M n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Ich formuliere jetzt die folgenden Behauptungen B_1 und B_2:

B_1. *Für jedes $\mu < M$ sind immer wieder die beiden Ungleichungen*

$$P(n) > \mu n^{\frac{k}{2}-1} \quad \text{und} \quad P(n-0) < -\mu n^{\frac{k}{2}-1}$$

erfüllt;

[7]) Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft **24**, 2 (1925), S. 81 bis 93. Vor der betreffenden Formel (S. 82) fehlt ein $\pm$-Zeichen.

[8]) „Zur Gittertheorie n-dimensionaler Ellipsoide", Math. Zeitschr. **25** (1926), S. 150–165.

B_2. *Für ein geeignetes* $\mu' > M$ *ist immer wieder*

$$P(n) > \mu' n^{\frac{k}{2}-1} \quad \textit{und} \quad P(n-0) < -\mu' n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Aus (9) und (10) folgt dann, daß (8) *mehr* als B_1, dagegen *weniger* ls B_2 aussagt[9]). Der wesentliche Kern von (8) ist also

$$P(n) = \Omega_R\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right), \qquad P(n-0) = \Omega_L\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

Hiermit ist das Landausche Ergebnis (5) in zweifacher Hinsicht (Erhöung des Restgliedes, diskontinuierliche x-Folge) verschärft.

Ich beschränke mich im folgenden auf Q-Formen, für die alle $a_{\alpha\alpha}$, $2a_{\alpha\beta}$ $(\alpha \neq \beta)$ ganzzahlig sind und den größten gemeinsamen Teiler Eins besitzen. Dies erspart einen Parameter und gestattet bequemere Formulierungen, bedeutet aber eine triviale Einschränkung der Allgemeinheit. Ist nämlich ein Q mit beliebigen rationalen Koeffizienten gegeben, so bezeichne man mit r_1 den Hauptnenner aller $a_{\alpha\alpha}$, $2a_{\alpha\beta}$ und mit r_2 den größten gemeinsamen Teiler aller $r_1 a_{\alpha\alpha}$, $2r_1 a_{\alpha\beta}$; ferner sei $r = \frac{r_2}{r_1}$. Dann ist $Q^* = \frac{Q}{r}$ eine spezialisierte Form von der verlangten Eigenschaft, auf die man alle folgenden Sätze anwenden kann.

Ich beginne die folgenden Ausführungen, welche einer weiteren Förderung des $\Omega_R - \Omega_L$-Problems gewidmet sind, mit zwei Sätzen (1 und 1a), die zusammen nur die Behauptung B_1 ergeben. Sie besitzen lediglich methodisches Interesse, da die Beweise wesentlich kürzer und einfacher sind als das zu (8) führende Müntzsche Verfahren.

Satz 1. *Für jedes* $\mu < M$ *sind die beiden Ungleichungen*

$$\pm P(x) > \mu x^{\frac{k}{2}-1}$$

immer wieder erfüllt.

Beweis. Ich setze für beliebiges $\gamma > 0$

11) $$P^{(\gamma)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x P(u)(x-u)^{\gamma-1}\,du;$$

es ist dann bekanntlich

$$P^{(\gamma+1)}(x) = \int_0^x P^{(\gamma)}(u)\,du \qquad (P^{(0)}(x) = P(x)).$$

---

[9]) Ob B_2 — auch nur für ein einziges Q — zutrifft, weiß ich nicht. Für die vierdimensionale Kugel kann man allerdings aus (7) ablesen, daß *eine* der betreffenden Ungleichungen für *beliebig vorgegebenes* $\mu' > 0$ immer wieder erfüllt ist.

Ferner sei $\bar{Q}$ die zu Q inverse Form, und für ganzzahliges $n \geqq 0$

$$\bar{A}(n) = \sum_{Q = \frac{n}{D}} 1.$$

Dann ist nach Landau[10]) für ganzzahliges $\gamma > \frac{k-1}{2}$

$$(12) \qquad \mathsf{P}^{(\gamma)}(x) = \frac{1}{\pi^{\gamma}} D^{\frac{\gamma-1}{2}+\frac{k}{4}} x^{\frac{\gamma}{2}+\frac{k}{4}} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{A}(n) n^{-\frac{\gamma}{2}-\frac{k}{4}} J_{\gamma+\frac{k}{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right)$$

(J Besselsche Funktion). Wegen

$$(13) \qquad J_{\gamma+\frac{k}{2}}\left(2\pi\sqrt{\frac{nx}{D}}\right) = O\left(n^{-\frac{1}{4}} x^{-\frac{1}{4}}\right)$$

und

$$(14) \qquad \bar{A}(n) = O\left(n^{\frac{k}{2}-1+\varepsilon}\right)^{11})$$

konvergiert die Reihe (12) absolut. Setzt man insbesondere $\gamma = k$, so folgt aus (12), (13) und (14)

$$(15) \qquad \mathsf{P}^{(k)}(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}+\frac{k}{4}-\frac{1}{4}}\right) = O\left(x^{\frac{3k-1}{4}}\right).$$

Ich nehme jetzt an, daß es ein ganzes x_1 mit

$$(16) \qquad \mathsf{P}(x) \leqq \mu x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (x \geqq x_1)$$

gibt. Alsdann hat man für $n \geqq x_1$ (die O- und o-Zeichen dürfen von μ abhängen)

$$\int_n^{n+1} \mathsf{P}(u)\,du = \mathsf{P}(n) - \int_n^{n+1} (\mathsf{P}(n) - \mathsf{P}(u))\,du$$

$$= \mathsf{P}(n) - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)} \int_n^{n+1} \left(u^{\frac{k}{2}} - n^{\frac{k}{2}}\right) du$$

$$= \mathsf{P}(n) - Mn^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

$$(17) \qquad \leqq -(M-\mu) n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

---

[10]) „Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid)“. [Berliner Akademieberichte 31 (1915), S. 458–476, S. 472 (34). Landau benutzt funktionentheoretische Hilfsmittel.

[11]) Landau, „Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen“ [Göttinger Nachrichten 1912, S. 687–771], S. 752, Hilfssatz 16 (elementar).

Wegen

$$\mathsf{P}(x) = o\left(x^{\frac{k}{2}}\right)$$

nd (11) folgt hieraus weiter

$$\mathsf{P}^{(1)}(x) = \left(\int_0^{x_2} + \int_{x_2}^{[x]} + \int_{[x]}^{x}\right) \mathsf{P}(u)\,du \leqq O(1) - \frac{M-\mu}{\frac{k}{2}}\, x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right),$$

. h.

$$\mathsf{P}^{(1)}(x) \leqq -\frac{M-\mu}{\frac{k}{2}}\, x^{\frac{k}{2}} + o\left(x^{\frac{k}{2}}\right).$$

Dies ergibt wiederum

$$\mathsf{P}^{(2)}(x) \leqq -\frac{M-\mu}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)}\, x^{\frac{k}{2}+1} + o\left(x^{\frac{k}{2}+1}\right), \ldots,$$

nd endlich

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) \leqq -\frac{M-\mu}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}+k-1\right)}\, x^{\frac{3k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{3k}{2}-1}\right),$$

m Gegensatz zu (15). Damit ist die Annahme (16) ad absurdum geführt.

Ebenso zeigt man, daß es kein ganzes x_2 mit

18) $$\mathsf{P}(x) \geqq -\mu x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (x \geqq x_2)$$

eben kann. Hier hat man

$$\int_n^{n+1} \mathsf{P}(u)\,du = \mathsf{P}(n+1-0) + \int_n^{n+1} (\mathsf{P}(u) - \mathsf{P}(n+1-0))\,du$$

$$= \mathsf{P}(n+1-0) + M n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

19) $$\geqq (M-\mu) n^{\frac{k}{2}-1} + o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right);$$

araus folgt aber wie oben

$$\mathsf{P}^{(k)}(x) \geqq \frac{M-\mu}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{k}{2}+k-1\right)}\, x^{\frac{3k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{3k}{2}-1}\right),$$

in ebenfalls mit (15) unverträgliches Resultat.

Ein Blick auf den obigen Beweis zeigt, daß die Voraussetzungen (16) nd (18) nicht im vollen Umfange verarbeitet worden sind. Ich habe ur benutzt, daß für alle großen n

$$\mathsf{P}(n) \leqq \mu n^{\frac{k}{2}-1}, \quad \mathsf{P}(n+1-0) \geqq -\mu(n+1)^{\frac{k}{2}-1}$$

wird. De facto habe ich also bewiesen: *Immer wieder ist*

$$(20) \qquad P(n) > \mu n^{\frac{k}{2}-1}, \quad P(n+1-0) < -\mu(n+1)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Es seien nun $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2} < \beta < 1$ fest vorgegeben. Dann ist

$$P(n+\alpha) - P(n) \sim -\frac{\alpha \pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1},$$

$$P(n+\beta) - P(n+1-0) \sim \frac{(1-\beta)\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} n^{\frac{k}{2}-1}.$$

Aus (20) folgt daher

Satz 1a. *Bei vorgegebenen α, β, μ_α, μ_β mit*

$$0 < \alpha < \frac{1}{2}, \qquad \frac{1}{2} < \beta < 1,$$

$$\mu_\alpha < \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}, \qquad \mu_\beta < \left(\beta - \frac{1}{2}\right) \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$$

sind immer wieder die beiden Ungleichungen

$$P(n+\alpha) > \mu_\alpha (n+\alpha)^{\frac{k}{2}-1}, \quad P(n+\beta) < -\mu_\beta (n+\beta)^{\frac{k}{2}-1}$$

erfüllt.

Auch die beiden folgenden Sätze 2 und 3 lassen ähnliche Erweiterungen zu, die ich nicht erst formuliere.

Satz 2. *Zu jedem $\mu < M$ gibt es ein $l = l(Q, \mu) > 0$, so daß die beiden Ungleichungspaare*

$$(21) \qquad \pm P_Q(x) > \mu x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (k \geqq 9)$$

$$(22) \qquad \pm P_k(x) > \mu x^{\frac{k}{2}-1} \qquad (k \geqq 5)$$

in jedem Intervalle $\xi \leqq x \leqq \xi + l$ ($\xi > 0$ beliebig) Lösungen besitzen.

Dem Beweise seien zwei Hilfssätze vorausgeschickt, die man M. Riesz[12]) verdankt. Diesen beiden Sätzen sind die Voraussetzungen

1) *$\varphi(u)$ ist eine für $0 \leqq u \leqq x$ ($x > 0$ beliebig) beschränkte und im Lebesgueschen Sinne integrable Funktion*;

---

[12]) „Sur un théorème de la moyenne et ses applications", Acta Litterarum ac Scientiarum Regiae Universitatis Hungaricae Francisco-Josephinae, Sectio Scientiarum Mathematicarum I (1923), S. 114–126.

2) *für* $\gamma > 0$ *ist*

$$\varphi^{(\gamma)}(x) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \varphi(u)(x-u)^{\gamma-1}\,du$$

meinsam.

Hilfssatz 1. *Es sei für zwei geeignete positive, nicht abnehmende unktionen* $V = V(x)$, $W = W(x)$

$$|\varphi(x)| < V, \qquad |\varphi^{(\gamma)}(x)| < W \qquad (x > 0).$$

Dann gibt es zu jedem $0 < \gamma' < \gamma$ *ein nur von* γ *und* γ' *abhängiges* $= \gamma''(\gamma, \gamma') > 0$, *so daß*

$$|\varphi^{(\gamma')}(x)| < \gamma'' V^{1-\frac{\gamma'}{\gamma}} W^{\frac{\gamma'}{\gamma}} \qquad (x > 0)$$

lt.

Hilfssatz 2. $0 < \gamma < 1$; $0 \leqq x < y$.

Behauptung:

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)} \int_0^x \varphi(u)(y-u)^{\gamma-1}\,du = \varphi^{(\gamma)}(z) \qquad (0 \leqq z = z(x,y) < x).$$

Beweis von Satz 2. Für $0 \leqq \varrho < 1$ liefert eine Fourierentwicklung

$$\int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n}\,du = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^x dt \int_0^t u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)u}\,du.$$

Hierin ist für $|\varrho + m| > 0$

$$\int_0^t = -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)t} + \frac{\frac{k}{2}-1}{2\pi i(\varrho+m)} \int_0^t u^{\frac{k}{2}-2} e^{-2\pi i(\varrho+m)u}\,du$$

$$= -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} t^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)t} + O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-2}}{(\varrho+m)^2}\right);$$

$$\int_0^x \int_0^t = -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} \int_0^x t^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)t}\,dt + O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{(\varrho+m)^2}\right) = O\left(\frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{(\varrho+m)^2}\right).$$

Man hat daher für $0 < \varrho < 1$

3) $$\int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n}\,du = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(1-\varrho)^2}\right)$$

und für $\varrho = 0$

$$\int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} du = \frac{x^{\frac{k}{2}+1}}{\frac{k}{2}\left(\frac{k}{2}+1\right)} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{24}$$

Andererseits liefert partielle Summation

$$\sum_{n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n} = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{1-\varrho}\right) \qquad (0 < \varrho < 1) \tag{25}$$

und eine primitive Integralabschätzung

$$\sum_{n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} = \frac{x^{\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{26}$$

Nunmehr wende ich Hilfssatz 1 zweimal an: 1) auf

$$\varphi(x) = \sum_{n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n}; \qquad \gamma = 1; \qquad \gamma' = \frac{1}{4};$$

$$W = \lambda_1 x^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(1-\varrho)^2}\right); \qquad V = \lambda_2 x^{\frac{k}{2}-1}\left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{1-\varrho}\right) \qquad (0 < \varrho < 1)$$

wobei $\lambda_1(k) > 0$ und $\lambda_2(k) > 0$ gemäß (23) und (25) bestimmt werden. Es ist dann

$$\int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n} (x-u)^{-\frac{3}{4}} du \tag{27}$$

$$= O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)\left(\frac{1}{\varrho^{\frac{5}{4}}} + \frac{1}{(1-\varrho)^{\frac{5}{4}}}\right) \qquad (0 < \varrho < 1)$$

2) auf

$$\varphi(x) = \sum_{n \leqq x} n^{\frac{k}{2}-1} - \frac{x^{\frac{k}{2}}}{\frac{k}{2}}; \qquad \gamma = 1; \qquad \gamma' = \frac{1}{4};$$

$$W = V = \lambda_3 x^{\frac{k}{2}-1},$$

wobei $\lambda_3(k) > 0$ aus (24) und (26) gegeben ist. Die Behauptung lautet dann

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} (x-u)^{-\frac{3}{4}} du = \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+\frac{5}{4}\right)} x^{\frac{k}{2}+\frac{1}{4}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right). \tag{28}$$

Ich greife jetzt auf Formel (14) von I zurück. Diese lautet in der pezialisierten Fassung $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$; $H = 1$ [13])

29) $$\sum_{Q=n} 1 = 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=0}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} + O\left(n^{\frac{k}{4}}\right) \qquad (k \geqq 5).$$

ierbei durchläuft p nur die zu q primen Werte, so daß $p = 0$ lediglich $q = 1$ gehört, während

30) $$S_{p,q,(0)} = \sum_{u_1,\ldots,u_k=0}^{q-1} \exp\left\{2\pi i \frac{p}{q} Q(u_1, \ldots, u_k)\right\}$$

t (I, (16)). Die Reihe (29) konvergiert wegen

31) $$S_{p,q,(0)} = O\left(q^{\frac{k}{2}}\right)$$

, (23a)) absolut.

In den obigen Bezeichnungen gilt ferner nach G. H. Hardy, l. c. I, [2])

32) $$\sum_{K=n} 1 = 2Mn^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} \qquad (5 \leqq k \leqq 8).$$

Konvergiert eine Reihe

$$\sum_{q=1}^{\infty} \varphi_q(u)$$

bsolut und gleichmäßig in jedem Intervall $0 \leqq u \leqq x$, so läßt sich auf e die Operation $\varphi^{(\gamma)}$ gliedweise anwenden. Aus (27), (28), (29), (30), 1) und (32) folgt daher

$$\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^x \left\{\sum_{Q \leqq u} 1 - 2M \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1}\right\} (x-u)^{-\frac{3}{4}}\, du = \mathrm{P}^{\left(\frac{1}{4}\right)}(x) + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

$$2M \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^x \sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-\frac{2\pi i n p}{q}} (x-u)^{-\frac{3}{4}}\, du + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' O\left(q^{-\frac{k}{2}}\right) x^{\frac{k}{2}-1} \left(q^{\frac{5}{4}} p^{-\frac{5}{4}} + q^{\frac{5}{4}} (q-p)^{-\frac{5}{4}}\right) + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right)$$

$$O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \sum_{q=2}^{\infty} q^{\frac{5}{4}-\frac{k}{2}} + O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right),$$

h.

33) $$\mathrm{P}^{\left(\frac{1}{4}\right)}(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right).$$

[13]) A. a. O. ist zwar die Ganzzahligkeit aller $a_{\alpha\beta}$ postuliert; der Beweis geht er wörtlich, wenn nur $r = 1$ vorausgesetzt wird.

Von jetzt ab verläuft der Beweis demjenigen von Satz 1 in der Idee analog, wobei (33) die Abschätzung (15) vertritt. Die Überlegungen werden indessen etwas komplizierter, da wir es mit einem Integral gebrochener Ordnung zu tun haben.

Es sei $C \geqq 1$ ganz, nähere Bestimmung vorbehalten. Die O-Zeichen dürfen von μ abhängen, müssen aber C-frei sein.

Aus (33) folgt

$$\int_0^{x+C} \mathsf{P}(u)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du = O(x+C)^{\frac{k}{2}-1},$$

aus Hilfssatz 2 und (33)

$$\int_0^{x} \mathsf{P}(u)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du = O\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) = O(x+C)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Es wird somit

$$\int_x^{x+C} \mathsf{P}(u)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du = O(x+C)^{\frac{k}{2}-1}. \tag{34}$$

Ich nehme jetzt $x \geqq 1$ ganz an und setze voraus, daß

$$\mathsf{P}(u) \leqq \mu u^{\frac{k}{2}-1} \qquad (x \leqq u \leqq x+C) \tag{35}$$

ist. Für ein beliebiges Teilintegral von (34) hat man dann die folgende Abschätzung nach oben

$$\int_n^{n+1} \mathsf{P}(u)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$= \mathsf{P}(n)\int_n^{n+1} (x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du - \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\sqrt{D}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\int_n^{n+1}\left(u^{\frac{k}{2}}-n^{\frac{k}{2}}\right)(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$\leqq \mu n^{\frac{k}{2}-1}\int_n^{n+1} (x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du - 2Mn^{\frac{k}{2}-1}\int_n^{n+1}(u-n)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$= -(M-\mu)\int_n^{n+1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$-2M\int_n^{n+1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)du.$$

ieraus folgt

$$\int_x^{x+C} P(u)\,(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du \leqq -(M-\mu)\int_x^{x+C}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$-2M\left(\int_x^{x+C-1}+\int_{x+C-1}^{x+C}\right)[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)du$$

$$-(M-\mu)x^{\frac{k}{2}-1}\int_x^{x+C}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du-2M(x+C)^{\frac{k}{2}-1}\int_{\text{irgendwo}}^{x+C-1}\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)du$$

$$+O(x+C)^{\frac{k}{2}-1}\int_{x+C-1}^{x+C}(x+C-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$=-4(M-\mu)C^{\frac{1}{4}}x^{\frac{k}{2}-1}+O(x+C)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Ich bezeichne jetzt mit $l_1, l_2, \ldots$ geeignete natürliche Zahlen, die nur on Q und μ abhängen dürfen. Dann besagen (34) und (36)

$$C^{\frac{1}{4}}x^{\frac{k}{2}-1} < l_1(x+C)^{\frac{k}{2}-1}.$$

iese Ungleichung wird nicht gelöst, sobald ich

$$l_1 \geqq 2^{\frac{k}{2}-1}, \quad C = l_1^8, \quad x \geqq l_1^8$$

nehme. Daher erfüllt jedes Intervall der Länge $l_2 = 2l_1^8 + 2$ die Ω_R-Behauptungen von Satz 2, da es ein Teilintervall der Länge l_1^8 enthält, dessen nker ganzzahliger Endpunkt eine Abszisse $\geqq l_1^8$ besitzt.

Um auch die Ω_L-Behauptungen zu beweisen, mache ich die zu (35) naloge Annahme

$$P(u) \geqq -\mu u^{\frac{k}{2}-1} \qquad (x \leqq u \leqq x+C_1), \tag{37}$$

$C_1 \geqq 1$ ganz, nähere Verfügung vorbehalten). Für ein entsprechendes Teilintervall von (34) folgt dann

$$\int_n^{n+1} P(u)\,(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$= P(n+1-0)\int_n^{n+1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$+\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{|D|\,\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\int_n^{n+1}\left((n+1)^{\frac{k}{2}}-u^{\frac{k}{2}}\right)(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}\,du$$

$$\geqq -\mu n^{\frac{k}{2}-1}\int_n^{n+1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$-\mu\left((n+1)^{\frac{k}{2}-1}-n^{\frac{k}{2}-1}\right)\int_n^{n+1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$+2Mn^{\frac{k}{2}-1}\int_n^{n+1}(n+1-u)(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$\geqq (M-\mu)\int_n^{n+1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$-\mu\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{\frac{k}{2}-1}\int_n^{n+1}[u]^{\frac{k}{2}-2}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$-2M\int_n^{n+1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)du,$$

d. h. für ganzes x

$$\int_x^{x+C_1}\mathsf{P}(u)(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du\geqq\left\{(M-\mu)\int_x^{x+C_1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du\right.$$

$$\left.-2M\int_x^{x+C_1}[u]^{\frac{k}{2}-1}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}\left(u-[u]-\frac{1}{2}\right)du\right\}$$

$$-\mu\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{\frac{k}{2}-1}\int_x^{x+C_1}[u]^{\frac{k}{2}-2}(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du.$$

Hierin ist (vgl. (36))

$$\{\}\geqq 4(M-\mu)C_1^{\frac{1}{4}}x^{\frac{k}{2}-1}+O(x+C_1)^{\frac{k}{2}-1};$$

ferner hat man

$$-\mu\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{\frac{k}{2}-1}\int_x^{x+C_1}\geqq-\mu\left(\frac{k}{2}-1\right)2^{\frac{k}{2}-1}(x+C_1)^{\frac{k}{2}-2}\cdot 4C_1^{\frac{1}{4}}$$

$$\geqq -l_3C_1(x+C_1)^{\frac{k}{2}-2}.$$

Es wird somit

$$\int_x^{x+C_1}\mathsf{P}(u)(x+C_1-u)^{-\frac{3}{4}}du$$

$$\geqq 4(M-\mu)C_1^{\frac{1}{4}}x^{\frac{k}{2}-1}-l_3C_1(x+C_1)^{\frac{k}{2}-2}+O(x+C_1)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Aus (34) mit C_1 statt C folgt jetzt

$$C_1^{\frac{1}{4}} x^{\frac{k}{2}-1} < l_4 \left\{ C_1 (x+C_1)^{\frac{k}{2}-2} + (x+C_1)^{\frac{k}{2}-1} \right\} < l_5 (x+C_1)^{\frac{k}{2}-1}.$$

Diese Ungleichung ist nicht erfüllt, sobald ich

$$l_5 \geqq 2^{\frac{k}{2}-1}, \quad C_1 = l_5^8, \quad x \geqq l_5^8$$

annehme. Daher genügt jedes Intervall der Länge $l_6 = 2 l_5^8 + 2$ für die Ω_L-Behauptungen von Satz 2. In jedem Intervall der Länge

$$l = \mathrm{Max}\,(l_2, l_6)$$

sind also die Ungleichungspaare (21) und (22) lösbar.

Der obige Beweis versagt für $K : k = 4$, da alsdann (32) zwar immer noch gültig ist, die Reihe aber nicht mehr absolut konvergiert; für $Q : 4 \leqq k \leqq 8$ ist das Analogon von (32) unbekannt, während in (29) das Restglied stört. Ich kann für alle $Q : k \geqq 4$ ein anderes Verfahren anwenden, das Resultat wird aber wesentlich ungünstiger:

Satz 3. *Zu jedem $\mu < M$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $l = l(Q, \mu, \varepsilon) > 0$, so daß die beiden Ungleichungen*

$$\pm P_Q(x) > \mu x^{\frac{k}{2}-1} \tag{38}$$

in jedem Intervall $\xi \leqq x \leqq \xi + l\,\xi^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon}$ ($\xi \geqq 1$ beliebig) Lösungen besitzen.

Beweis. Ein ε mit $0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{k-1}$ sei vorgegeben: die O- und $\ll$-Zeichen dürfen von μ und ε abhängen.

Die Landausche Formel (12) gilt auch für beliebiges $\gamma > \frac{k-1}{2}$.[14]) Aus (13) und (14) folgt daher

$$P^{(\gamma)}(x) = O\left(x^{\frac{\gamma}{2}+\frac{k-1}{4}}\right) \qquad \left(\gamma > \frac{k-1}{2}\right).$$

Berücksichtigt man, daß

$$P(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1+\varepsilon}\right)$$

ist, so ergibt Hilfssatz 1

$$P^{(1)}(x) = O(x^{\tau}),$$

wobei

$$\tau = \left(\frac{k}{2} - 1 + \varepsilon\right)\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) + \left(\frac{\gamma}{2} + \frac{k-1}{4}\right)\frac{1}{\gamma} \leqq \frac{k}{2} - 1 + \frac{1}{k-1} + \varepsilon$$

für ein genügend kleines $\gamma = \gamma(\varepsilon)$ ist. Es wird somit

$$P^{(1)}(x) = O\left(x^{\frac{k}{2}-1+\frac{1}{k-1}+\varepsilon}\right). \tag{39}$$

[14]) Ch. H. Müntz gewinnt sie, l. c. [7]) durch Fourierentwicklungen, im Rahmen eines allgemeinen Theorems. Auch ein Beweis mit dem Cauchyschen Integralsatz, wie bei Landau, ist möglich.

Mache ich jetzt den Ansatz (35), so folgt aus (17)

$$\int_x^{x+C} \mathsf{P}(u)\,du \leqq -(M-\mu)\sum_{n=x}^{x+C-1}\left\{n^{\frac{k}{2}-1}+o\left(n^{\frac{k}{2}-1}\right)\right\}$$

$$\leqq -(M-\mu)\,C\,x^{\frac{k}{2}-1}(1+o(1)).$$

Andererseits ergibt (39)

$$\int_x^{x+C} \mathsf{P}(u)\,du = \mathsf{P}^{(1)}(x+C)-\mathsf{P}^{(1)}(x) = O(x+C)^{\frac{k}{2}-1+\frac{1}{k-1}+\varepsilon}$$

Es wird somit ($l_1, l_2, \ldots$ sind geeignete positive Zahlen, die von Q, μ, abhängen dürfen)

$$C\,x^{\frac{k}{2}-1} < l_1(x+C)^{\frac{k}{2}-1+\frac{1}{k-1}+\varepsilon}$$

Diese Ungleichung wird nicht erfüllt, wenn ich

$$l_1 \geqq 2^k, \qquad C = l_1^2\left[x^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon}\right], \qquad x \geqq l_1^{\frac{2}{1-\frac{1}{k-1}-\varepsilon}}$$

annehme. Jedes Intervall

$$x \leqq u \leqq x + l_1^2 x^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon} \qquad \left(x \geqq l_1^{\frac{2}{1-\frac{1}{k-1}-\varepsilon}}\ \textit{ganz}\right)$$

enthält also eine Lösung der ersten Ungleichung (38); desgleichen jedes Intervall

$$x \leqq u \leqq x + l_2 x^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon} \qquad \left(x \geqq l_1^{\frac{2}{1-\frac{1}{k-1}-\varepsilon}}\ \textit{ganz}\right),$$

desgleichen jedes Intervall

$$\xi \leqq x \leqq \xi + l_3\,\xi^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon} \qquad (\xi \geqq 1\ \textit{beliebig}).$$

Ebenso führt der Ansatz (37) mittels (19) zu

$$C_1 x^{\frac{k}{2}-1} < l_4(x+C_1)^{\frac{k}{2}-1+\frac{1}{k-1}+},$$

und diese Ungleichung ergibt ein l_5, so daß jedes Intervall

$$\xi \leqq x \leqq \xi + l_5\,\xi^{\frac{1}{k-1}+\varepsilon} \qquad (\xi \geqq 1\ \textit{beliebig})$$

die zweite Ungleichung (38) löst. $l = \mathrm{Max}(l_3, l_5)$ genügt also für Satz 3.

Der folgende Satz ist von etwas anderer Art. Er sagt aus, daß man für eine geeignete — und sogar explizit angebbare — x-Folge eine genauere Auskunft über das infinitäre Verhalten von $\mathsf{P}(x)$ erhalten kann als im allgemeinen Falle.

Satz 4. *Für* $x = n!$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *ist*

40) $$P_Q(x) = c_Q\, x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 9),$$

41) $$P_k(x) = c_k x^{\frac{k}{2}-1} + o\left(x^{\frac{k}{2}-1}\right) \qquad (k \geqq 7),$$

obei die Konstanten c_Q, c_k *nur von* Q, k *abhängen.*

Beweis. Es sei $u \equiv \frac{1}{2} \pmod 1$, $0 \leqq \varrho < 1$, $k \geqq 5$. Dann liefert ne Fourierentwicklung

$$\sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n} = \lim_{m'=\infty} \sum_{m=-m'}^{m'} \int_0^u v^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)v}\, dv.$$

ierbei ist für $|\varrho + m| > 0$

$$\int_0^u = -\frac{1}{2\pi i(\varrho+m)} u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i(\varrho+m)u} + \frac{\frac{k}{2}-1}{2\pi i(\varrho+m)} \int_0^u v^{\frac{k}{2}-2} e^{-2\pi i(\varrho+m)v}\, dv$$

$$= \frac{(-1)^{m+1}}{2\pi i(\varrho+m)} u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho u} + O\left(\frac{u^{\frac{k}{2}-2}}{(\varrho+m)^2}\right).$$

omit wird

$$\sum_{\leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho n} = \frac{i}{2} u^{\frac{k}{2}-1} e^{-2\pi i \varrho u} \operatorname{cosec} \pi\varrho + O\left(u^{\frac{k}{2}-2}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{(1-\varrho)^2}\right),$$

$$\sum_{n \leqq u} n^{\frac{k}{2}-1} = \frac{2}{k} u^{\frac{k}{2}} + O\left(u^{\frac{k}{2}-2}\right) \qquad (0 < \varrho < 1).$$

Wendet man dies auf (29) und (32) an, so folgt für Q: $k \geqq 9$; $k \geqq 7$

42) $$P(u) = i M u^{\frac{k}{2}-1} \sum_{q=2}^{\infty} {\sum_{p=1}^{q-1}}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i p u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} + o\left(u^{\frac{k}{2}-1}\right).$$ [15])

[15]) Man sieht es diesem Ausdruck unschwer an, daß er reell ist: für $q = 2$ ist näm- ch $S_{p,q,(0)}$ reell, i e $-\frac{2\pi i p u}{q} = \pm 1$; für $q \geqq 3$ entspricht aber jedem p ein $p' = q - p \neq p$, nd es wird dann, wenn der Querstrich einen Übergang zu konjugiert komplexen rößen bedeutet,

$$i S_{p',q,(0)} e^{-\frac{2\pi i p' u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p'}{q} = \overline{\left\{ i S_{p,q,(0)} e^{-\frac{2\pi i p u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} \right\}}.$$

Da diese Reihe absolut konvergiert, so wird für $u = n! + \frac{1}{2}$

$$\sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i p u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} = \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{\pi i p}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q}$$

$$- \sum_{q=n+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{\pi i p}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} + \sum_{q=n+1}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i p u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q}$$

$$= \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{\pi i p}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} + o(1).$$

(40) und (41) sind daher mit

$$c = M\left(1 + i \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{\pi i p}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q}\right)$$

erfüllt.

Für Kugeln kann man aus (42) einen weiteren $\Omega_R - \Omega_L$-Satz folgern:

Satz 5. *Zu jedem $k \geqq 8$ gibt es eine Schranke $n_0 = n_0(k)$, oberhalb der für jedes ganze n*

$$\mathrm{P}_k(n) > \frac{1}{3} M n^{\frac{k}{2}-1}, \qquad \mathrm{P}_k(n-0) < -\frac{1}{3} M n^{\frac{k}{2}-1}$$

ist.

Beweis. Ein Blick auf (42) zeigt, daß ich nur

$$S = \left| \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{S_{p,q,(0)}}{q^k} e^{-\frac{2\pi i p u}{q}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} \right|$$

$$\leqq \sum_{q=2}^{\infty} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \frac{|S_{p,q,(0)}|}{q^k} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} = \sum_{q=2}^{\infty} s_q < \frac{2}{3} \qquad (k \geqq 8)$$

vorzurechnen brauche.

Aus (30) folgt für $Q = K$

$$S_{p,q,(0)} = (S_{p,q})^k,$$

wobei $S_{p,q}$ die Gaußsche Summe

$$S_{p,q} = \sum_{m=0}^{q-1} e^{\frac{2\pi i m^2 p}{q}}$$

bedeutet. Daher wird

$$S_{p,q,(0)} = 0 \qquad (q = 2),$$

$$|S_{p,q,(0)}| = q^{\frac{k}{2}} \qquad (q \geqq 3 \text{ } \textit{ungerade}),$$

$$|S_{p,q,(0)}| \leqq (2q)^{\frac{k}{2}} \qquad (q \geqq 4 \text{ } \textit{gerade}).$$

Hieraus folgt für gerades q

$$s_2 = 0;$$

$$s_q \leqq 2^{\frac{k}{2}} q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} = 2^{1+\frac{k}{2}} q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p<\frac{q}{2}}{}' \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q}$$

$$\leqq 2^{1+\frac{k}{2}} q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p \leqq \frac{q}{4}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} \leqq 2^{\frac{k}{2}} q^{1-\frac{k}{2}} \sum_{p \leqq \frac{q}{4}} \frac{1}{p}$$

$$\leqq 2^{\frac{k}{2}} q^{1-\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} - \log 8 + \log q\right)$$

$$\leqq 2^4 q^{-3} \left(\frac{3}{2} - \log 8 + \log q\right)$$

$$= 2n^{-3} \left(\frac{3}{2} - \log 4 + \log n\right) \qquad (q = 2n \geqq 6),$$

nd dieselbe Ungleichung gilt auch noch für $q = 2n = 4$, da alsdann

$$s_q \leqq 2^{-\frac{k}{2}} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{4} + \operatorname{cosec} \frac{3\pi}{4}\right) = 2^{\frac{3-k}{2}} \leqq 2^{-\frac{5}{2}}$$

t.

Für ungerades q hat man

$$s_3 = 3^{-\frac{k}{2}} \left(\operatorname{cosec} \frac{\pi}{3} + \operatorname{cosec} \frac{2\pi}{3}\right) = 4 \cdot 3^{-\frac{k+1}{2}} \leqq 4 \cdot 3^{-\frac{9}{2}}$$

$$= \frac{4}{81 \cdot \sqrt{3}} < \frac{4 \cdot 3}{81 \cdot 5} = \frac{4}{135} < \frac{9}{128};$$

$$s_q = q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p=1}^{q-1}{}' \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q} \leqq 2q^{-\frac{k}{2}} \sum_{p<\frac{q}{2}} \operatorname{cosec} \frac{\pi p}{q}$$

$$\leqq q^{1-\frac{k}{2}} \sum_{p<\frac{q}{2}} \frac{1}{p} \leqq q^{1-\frac{k}{2}} \left(1 + \frac{1}{2} - \log 4 + \log q\right)$$

$$\leqq q^{-3} \left(\frac{3}{2} - \log 4 + \log q\right)$$

$$\leqq \frac{1}{8} n^{-3} \left(\frac{3}{2} - \log 2 + \log n\right) \qquad (q = 2n + 1 \geqq 5).$$

Es wird somit

$$S < \frac{9}{128} + \left\{(3 - 4 \log 2) + \frac{1}{8}\left(\frac{3}{2} - \log 2\right)\right\} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3} + \frac{17}{8} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3} \log n$$

$$= \frac{9}{128} + \left(\frac{51}{16} - \frac{33}{8} \log 2\right) \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3} + \frac{17}{8} \sum_{n=2}^{\infty} n^{-3} \log n.$$

Hierin ist

$$\sum_{n=2}^{x} n^{-3} \leqq \frac{1}{8} + \int_{2}^{x} \frac{du}{u^3} = \frac{1}{4},$$

$$\sum_{n=2}^{x} n^{-3} \log n \leqq \frac{\log 2}{8} + \int_{2}^{x} \frac{\log u}{u^3}\, du = \frac{\log 2}{4} + \frac{1}{16}.$$

Dies ergibt

$$S < \frac{9}{128} + \frac{51}{64} - \frac{33}{32}\log 2 + \frac{17}{32}\log 2 + \frac{17}{128} = 1 - \frac{\log 2}{2} < \frac{2}{3},$$

wie behauptet.

Warschau, den 14. Dezember 1925.

(Eingegangen am 21. Dezember 1925.)

Über die Iteration derjenigen in einem Gebiete regulären Funktionen, deren Werte dem Gebiete angehören.

Von

J. Wolff in Utrecht.

Es sei für $|z|<1$ die Funktion $f(z)$ regulär und $|f(z)|<1$. Wir setzen $f_1(z)=f(z)$, $f_{n+1}(z)=f\{f_n(z)\}$, $(n=1,2,\ldots)$.

Da die Iteration der linearen Funktionen $\frac{az+b}{cz+d}$ keine Schwierigkeit liefert, setzen wir $f(z)$ nicht-linear voraus und beweisen den Satz:

Wenn $f(z)$ nicht linear ist, so sind nur zwei Fälle möglich: entweder nähert sich $f_n(z)$ für $n\to\infty$ einem von z unabhängigen Wert α, mit $|\alpha|<1$, oder aber $|f_n(z)|\to 1$ für jedes z.[1])

Erster Fall. Es gibt einen Punkt α, wo $f(\alpha)=\alpha$. Dann hat man für jedes z: $f_n(z)\to\alpha$. Für $\alpha=0$ folgt dies direkt aus $|f(z)|<|z|$, und für $\alpha\neq 0$ folgt die Behauptung durch lineare Transformation.

Zweiter Fall. Überall ist $f(z)\neq z$. Dann ist auch überall $f_k(z)\neq z$ für jedes k. Ist nämlich $f_k(\alpha)=\alpha$, so ist $k>1$, also sind α und $f(\alpha)$ zwei verschiedene Wurzeln der Gleichung $f_k(z)=z$, also hätte man wegen $|f_k(z)|<1$ und wegen des ersten Falles für jedes z: $f_{kn}(z)\to\alpha$ und $f_{kn}(z)\to f(\alpha)$, was unmöglich; oder $f_k(z)$ wäre linear, also $f_k(z)\equiv z$. Setzt man im letzten Falle $w=f(z)$, so ist $z=f_{k-1}(w)$; folglich würde die Funktion $f(z)$ das Innere des Einheitskreises eineindeutig auf sich abbilden, also wäre $f(z)$ linear, gegen die Voraussetzung.

Daher sind für jedes z die Zahlen $z, f_1(z), f_2(z), \ldots$ alle verschieden. Wir wollen jetzt einmal annehmen, das für irgendeinen Punkt $z=\alpha$ diese Punktmenge eine Häufungsstelle β hat im Inneren des Einheitskreises. Dann gibt es eine gegen Unendlich wachsende Indexfolge (ν), für die

[1]) Mittlerweile habe ich bewiesen, daß die Folge $f_n(z)$ immer konvergiert. Man vergleiche bezüglich dieses Satzes und anderer Resultate: Comptes Rendus 21. Dez. 1925, 18. Jan. 1926 und 7. Apr. 1926. Auch Herr Denjoy hat einen einfachen Beweis gegeben, Comptes Rendus 25. Jan. 1926.

$f_\nu(\alpha) \to \beta$. Da alle Funktionen der Folge f_n gleichmäßig beschränkt sind, gibt es bei gegebenem $\varepsilon > 0$ einen Kreis γ mit Radius $< \varepsilon$ um β, so daß für jedes Punktepaar z, z' innerhalb γ und für jedes n die Ungleichung

$$|f_n(z) - f_n(z')| < \varepsilon \tag{1}$$

zutrifft.

Es seien $f_\nu(\alpha)$ und $f_{\nu'}(\alpha)$ zwei Punkte der Folge $f_\nu(\alpha)$ innerhalb γ, und es sei $\nu' > \nu$. Dann ist

$$|f_{\nu'-\nu}\{f_\nu(\alpha)\} - f_\nu(\alpha)| = |f_{\nu'}(\alpha) - f_\nu(\alpha)| < 2\varepsilon. \tag{2}$$

Wegen (1) ist

$$|f_{\nu'-\nu}(\beta) - f_{\nu'-\nu}\{f_\nu(\alpha)\}| < \varepsilon, \tag{3}$$

auch ist

$$|f_\nu(\alpha) - \beta| < \varepsilon. \tag{4}$$

Aus (2), (3) und (4) folgt:

$$|f_{\nu'-\nu}(\beta) - \beta| < 4\varepsilon.$$

Da nun für jedes n: $f_n(\beta) \neq \beta$, und ε beliebig ist, ist β Häufungsstelle der Punktmenge $f_n(\beta)$, mit anderen Worten: es gibt eine gegen Unendlich wachsende Indexfolge (μ), wofür $f_\mu(\beta) \to \beta$. Wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Funktionen enthält diese Folge eine Teilfolge (ϱ), wofür $f_\varrho(z)$ gleichmäßig in jedem Kreis $|z| < r < 1$ gegen eine im Einheitskreise reguläre Funktion $\varphi(z)$ konvergiert. Da $f_\varrho(\beta) \to \beta$, hat man auch $f_\varrho\{f(\beta)\} = f\{f_\varrho(\beta)\} \to f(\beta)$, und desgleichen:

$$f_\varrho\{f_k(\beta)\} = f_k\{f_\varrho(\beta)\} \to f_k(\beta) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

folglich ist $\varphi(z) = z$ in der unendlichen Punktmenge $f_k(\beta)$, $k = 1, 2, \ldots$, welche sich in β häuft, also fällt die Funktion $\varphi(z)$ völlig mit z zusammen, also überall $f_\varrho(z) \to z$.

Die Funktion $f(z)$ kann nicht in zwei verschiedenen Punkten z und z' denselben Wert annehmen. Denn $f_\varrho(z)$ und $f_\varrho(z')$ würden übereinstimmen, und wegen $f_\varrho(z) \to z$ und $f_\varrho(z') \to z'$ wäre $z = z'$.

Endlich behaupte ich, daß $f(z)$ jeden Wert annimmt, dessen Absolutwert kleiner als Eins ist. Ist nämlich α ein solcher Wert, so sei Γ ein innerhalb $|z| = 1$ liegender Kreis mit Mittelpunkt α. Wäre überall $f(z) \neq \alpha$, so wäre auch überall $f_\varrho(z) \neq \alpha$; wegen der gleichmäßigen Konvergenz $f_\varrho(z) \to z$ und $f_\varrho'(z) \to 1$ auf Γ hätte man

$$\int_\Gamma \frac{f_\varrho'(z)\,dz}{f_\varrho(z) - \alpha} \to \int_\Gamma \frac{dz}{z - \alpha} = 2\pi i.$$

Hieraus würde aber hervorgehen, daß es ein ϱ gibt, wofür die Gleichung $(z) = \alpha$ eine Wurzel innerhalb Γ besitzt. Da nun bewiesen ist, daß das nere des Einheitskreises durch die Funktion $f(z)$ eineindeutig auf das Innere s Einheitskreises abgebildet wird, ist $f(z)$ linear.

Ist also $f(z)$ nicht linear, so kann die Punktmenge $f_n(\alpha)$ sich für kein im Innern des Einheitskreises häufen, folglich $|f_n(\alpha)| \to 1$ für jedes α.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 12. Dezember 1925.)

Singuläre Erscheinungen bei Strahlenkongruenzen und Strahlenkomplexen.

Von

Karl Mayrhofer in Wien.

1. Kongruenzen.

In einem kartesischen Koordinatensystem X_1, X_2, X_3 sei eine Gerade durch den Richtungsvektor $\mathfrak{a}(a_1, a_2, a_3)$ und den Momentvektor $\bar{\mathfrak{a}}(\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3)$ bestimmt, wobei $\mathfrak{a}$ die Länge eins habe. Bedeutet $\mathfrak{A}$ den Studyschen dualen Bildvektor der Geraden, so läßt sich eine Strahlenkongruenz in der Gestalt

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u^1, u^2) = \mathfrak{a}(u^1, u^2) + \varepsilon\, \bar{\mathfrak{a}}(u^1, u^2) \tag{1}$$

darstellen[1]); darin seien die u^i reelle Parameter und $\mathfrak{a}$, $\bar{\mathfrak{a}}$ reelle, eindeutige Funktionen davon, die in der Umgebung der betrachteten Stelle $(u_0^1, u_0^2$ stetig und wenigstens einmal differenzierbar sein sollen. Bezüglich der „dualen Fundamentalform" der Kongruenz (1)

$$d\mathfrak{A}^2 = \sum_{i,k=1}^{2} \mathfrak{A}_{u^i} \mathfrak{A}_{u^k}\, du^i\, du^k, \tag{2}$$

die eine duale Zusammenfassung jener beiden von E. Kummer und K. Zindler eingeführten quadratischen Differentialformen ist, von denen G. Sannia gezeigt hat, daß sie das Analogon zur ersten und zweiten Fundamentalform der Flächentheorie sind, hat man solche Strahlen der Kongruenz als *singulär* zu betrachten, an denen der Ausdruck

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{u^1}^2 & \mathfrak{a}_{u^1}\, \mathfrak{a}_{u^2} \\ \mathfrak{a}_{u^1}\, \mathfrak{a}_{u^2} & \mathfrak{a}_{u^2}^2 \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}_{u^1} \times \mathfrak{a}_{u^2})^2 \tag{3}$$

verschwindet. Das tritt ein, wenn die Richtung unseres Strahles wenigstens in einer der hindurchgehenden Parameterflächen stationär ist oder wenn die Parameterflächen an der betreffenden Stelle eine gemeinsame

[1]) Vgl. W. Blaschke, Differentialgeometrie 1 (1921), § 103, § 106.

ntralebene besitzen; letzteres entspricht ja dem Berühren der Parameter-
ien im sphärischen Bilde. *Wir fragen, ob diese von der Lage des Koordi-
tensystems unabhängige Erscheinung durch eine geeignete Parameter-
derung beseitigt werden kann oder ob derlei Stellen geometrisch aus-
zeichnet sein können.* Im ersten Falle soll der Strahl *unwesentlich
ngulär*, im letzten *wesentlich singulär* heißen.

Wir betrachten eine hinreichend kleine abgeschlossene Umgebung von
u_0^1, u_0^2) und setzen voraus, daß in ihr keine Kongruenzstrahlen gleicher
ichtung auftreten; ferner dürfen wir ohne Einschränkung der Allgemein-
it annehmen, das sphärische Bild unserer Umgebung liege etwa auf der
beren" Hälfte der Einheitskugel. Durch die Gleichungen

$$a_1 = a_1(u^1, u^2), \qquad a_2 = a_2(u^1, u^2)$$

ird dann eine stetige und umkehrbar eindeutige Abbildung der Umgebung
n (u_0^1, u_0^2) in der u^1u^2-Ebene auf die X_1X_2-Ebene vermittelt, von der
an leicht zeigt, daß sie topologisch ist: es entspricht daher einer gewöhn-
chen Umgebung von (u_0^1, u_0^2) ein gewisses *Gebiet* der X_1X_2-Ebene.
ehmen wir also als neue Parameter u_*^1, u_*^2 die Komponenten a_1, a_2
lber, so erscheint $\mathfrak{a}^*$ in der Gestalt

4) $$a_1^* = u_*^1, \qquad a_2^* = u_*^2, \qquad a_3^* = \left|\sqrt{1-(u_*^1)^2-(u_*^2)^2}\right|,$$

obei (u_*^1, u_*^2) ein beliebiger Punkt unseres Gebietes in der X_1X_2-Ebene
in kann. Da in dieser Darstellung unsere Stelle sicher nicht singulär
t, gilt:

*Eine Stelle der Kongruenz kann nur dann wesentlich singulär sein,
enn in jeder noch so kleinen Umgebung parallele Kongruenzstrahlen
uftreten.*

Bevor wir zur Untersuchung des nächsten Falles übergehen, beweisen
ir folgenden *Hilfssatz*:

Es sei $f(x, y)$ eine in einem abgeschlossenen Gebiete stetige Funk-
on von x, y mit stetigem Differentialquotienten

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f_1(x, y);$$

s gibt dann zu einem beliebig klein gewählten ε eine positive Zahl δ
erart, daß

5) $$\left|\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x} - f_1(x,y)\right| < \varepsilon$$

leibt, wenn nur

$$0 < |\Delta x| < \delta$$

t, *für jedes beliebige* (x, y) *unseres Gebietes.*

Ist nämlich (x, y) eine bestimmte, beliebig im Gebiete gewählte Stell so gilt nach dem Mittelwertsatz

$$\frac{f(x+\Delta x, y)-f(x, y)}{\Delta x}=f_1(x+\vartheta \Delta x, y) \qquad (0<\vartheta<1$$

da aber $f_1(x, y)$ in unserem Gebiete auch gleichmäßig stetig sein mu so kann

$$|f_1(x+\Delta x, y)-f_1(x, y)|<\varepsilon$$

gemacht werden, für

$$0<|\Delta x|<\delta$$

und zwar für alle Stellen (x, y) des Gebietes zugleich; es besteht dahe für alle Stellen des Gebietes erst recht die Beziehung

$$|f_1(x+\vartheta \Delta x, y)-f_1(x, y)|<\varepsilon,$$

die mit (5) äquivalent ist.

Von den Stellen, die wesentlich singulär sein können, wollen wir nu solche untersuchen, bei denen durch (u_0^1, u_0^2) ein Zylinder hindurchgeht dessen Erzeugende insgesamt zur Kongruenz gehören. Über diesen Zylin der sei vorausgesetzt, daß u^2 stetig ein Intervall um u_0^2 herum einfach beschreibt, wenn sich die Erzeugende über den Zylinder hinbewegt, und daß u^1 in diesem Intervalle eine eindeutige, stetige Funktion von u^2 ist Über $\mathfrak{a}(u^1, u^2)$ setzen wir noch voraus, daß die ersten partiellen Diffe rentialquotienten stetig seien und daß

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1=u_0^1 \\ u^2=u_0^2}} \neq 0 \tag{6}$$

sei.

Wir betrachten eine durch (u_0^1, u_0^2) hindurchgehende Fläche der Kongruenz

$$\mathfrak{a}=\mathfrak{a}(t), \quad \bar{\mathfrak{a}}=\bar{\mathfrak{a}}(t) \qquad (t_0-h<t<t_0+h,\ h>0), \tag{7}$$

wo $\mathfrak{a}, \bar{\mathfrak{a}}$ eindeutige, stetige, differenzierbare Funktionen des Parameters t seien und t_0 zu (u_0^1, u_0^2) gehöre; dabei soll man eine beliebige Fläche (7) dadurch erhalten, daß in (1) für u^1, u^2 gewisse eindeutige, stetige Funktionen von t eingesetzt werden. Hat die Fläche (7) in jeder Nähe von (u_0^1, u_0^2) mit dem Zylinder eine Erzeugende gemeinsam, so muß

$$\left[\frac{d\mathfrak{a}(t)}{dt}\right]_{t=t_0}=0 \tag{8}$$

sein. Hat jedoch hinreichend nahe an (u_0^1, u_0^2) die Fläche (7) keine zur Geraden (u_0^1, u_0^2) parallele Erzeugende, so gilt folgendes: Wählt man $|\Delta t|$ klein genug, so gibt es eine gewisse Erzeugende $(u_{\Delta t}^1, u_{\Delta t}^2)$ des Zylinders, die auf der durch die Gerade $(t_0+\Delta t)$ gehenden u^1-Fläche liegt, derart,

ß das Inkrement Δu^1 von der Stelle $(u^1_{\Delta t}, u^2_{\Delta t})$ bis zur Stelle $(t_0 + \Delta t)$
e verschwindet. Es besteht daher für jedes hinreichend kleine $|\Delta t|$ eine
ziehung

$$\frac{\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t) - \mathfrak{a}(u^1_{\Delta t}, u^2_{\Delta t})}{\Delta u^1} = \varkappa \frac{\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t) - \mathfrak{a}(t_0)}{\Delta t},$$

orin $\varkappa$ ein von Δt abhängiger skalarer Faktor ist. Ferner kann man bei
nreichend kleinem $|\Delta t|$ wegen der getroffenen Voraussetzungen und unter
erücksichtigung des auf Vektoren übertragenen Hilfssatzes erreichen, daß

$$\left| \frac{\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t) - \mathfrak{a}(u^1_{\Delta t}, u^2_{\Delta t})}{\Delta u^1} - \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1 = u^1_{\Delta t} \\ u^2 = u^2_{\Delta t}}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eibt, wenn Δt nach Null konvergiert und ε beliebig klein gewählt wurde.
egen der Stetigkeit von

$$\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}$$

nn man schließlich erreichen, möglicherweise erst durch eine weitere
nschränkung für Δt, daß

$$\left| \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1 = u^1_{\Delta t} \\ u^2 = u^2_{\Delta t}}} - \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1 = u^1_0 \\ u^2 = u^2_0}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

eibt. Aus den Beziehungen (9), (10), (11) folgern wir, daß

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left[\varkappa(\Delta t) \frac{\mathfrak{a}(t_0 + \Delta t) - \mathfrak{a}(t_0)}{\Delta t}\right] = \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1 = u^1_0 \\ u^2 = u^2_0}}$$

. Da der zweite Faktor auf der linken Seite dieser Gleichung voraus-
tzungsgemäß einen endlichen Grenzwert hat und das Glied auf der rechten
ite nicht Null ist, folgt aus (12) entweder die Gleichung (8) oder

$$\left[\frac{d\mathfrak{a}(t)}{dt}\right]_{t=t_0} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta t \to 0} \varkappa(\Delta t)} \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1 = u^1_0 \\ u^2 = u^2_0}}$$

it

$$\lim_{\Delta t \to 0} \varkappa(\Delta t) \neq 0.$$

us diesen Entwicklungen entnimmt man noch, daß die Annahme einer
äche (7), die in jeder Nähe von (u^1_0, u^2_0) Erzeugende hat, die zu (u^1_0, u^2_0)
rallel sind, jedoch nicht dem Zylinder angehören, mit der Voraus-
tzung (6) im Widerspruch steht.

Es sind also die Tangentenvektoren der sphärischen Bilder aller
rch die betrachtete Stelle gehenden Flächen dort linear abhängig, woraus
Hinblicke auf den Ausdruck (3) folgt:

Kongruenzstrahlen von der zuletzt beschriebenen Art sind wesentlich singulär.

Ein einfaches *Beispiel* zur entwickelten Theorie der wesentlich singulären Fälle findet man an Hand der Darstellung der reellen Einheitskugel in geographischen Koordinaten. Bedeutet u^1 die Poldistanz vom Nordpol $(0, 0, 1)$ und u^2 die geographische Länge, so wird die Einheitskugel durch

$$a_1 = \sin u^1 \cos u^2, \quad a_2 = \sin u^1 \sin u^2, \quad a_3 = \cos u^1 \tag{14}$$

dargestellt. Wir betrachten eine Kongruenz (1), für die $\mathfrak{a}(u^1, u^2)$ die Gestalt (14) hat, während $\bar{\mathfrak{a}}(u^1, u^2)$ gemäß unseren Voraussetzungen irgendwie gewählt sei. Wenn für die u^i

$$-u_0^i < u^i < u_0^i \qquad (u_0^i > 0), \quad (i = 1, 2)$$

gilt, so wird der Nordpol der Kugel Bild eines Zylinders der Kongruenz, während außer den Zylindererzeugenden keine parallelen Kongruenzstrahlen auftreten. Ist eine Kongruenzfläche durch

$$u^i = u^i(t) \qquad (i = 1, 2)$$

bestimmt, wo $u^i(t)$ eindeutige, stetige, differenzierbare Funktionen seien, so findet man in Übereinstimmung mit der allgemeinen Theorie, je nachdem

$$\left[\frac{du^1(t)}{dt}\right]_{t=t_0}$$

verschwindet oder nicht (vgl. (8) und (13))

$$\left[\frac{d\mathfrak{a}(t)}{dt}\right]_{t=t_0} = 0 \quad \text{oder} \quad \left[\frac{du^1(t)}{dt}\right]_{t=t_0} \cdot \left[\frac{\partial \mathfrak{a}(u^1, u^2)}{\partial u^1}\right]_{\substack{u^1=0 \\ u^2=0}}.$$

Schließlich betrachten wir noch die *Fortschreitungsrichtungen* $du^1 : du^2$ von (u_0^1, u_0^2) aus, die durch solche Kongruenzflächen bestimmt sind, für die die Gleichung (8) nicht zutrifft. Das Koordinatensystem liege so, daß die X_3-Achse mit (u_0^1, u_0^2) zusammenfällt und die gemeinsame Asymptotenebene der Fortschreitungsrichtungen zur $X_1 X_3$-Ebene wird; als Parameter seien die Bogenlängen der sphärischen Bilder der u^1-, bzw. u^2-Flächen gewählt. Bezeichnet man noch für eine Fortschreitungsrichtung $du^1 : du^2$ den Verteilungsparameter mit p, den Vektor vom Koordinatenursprung zum Zentralpunkt mit $\mathfrak{z}(0, 0, r)$ und den Winkel der Asymptotenebene mit der $X_1 X_3$-Ebene mit α, so findet man bei entsprechender Orientierung der X_1-Achse

$$\alpha = 0, \tag{15}$$

$$r(\bar{a}_{1_{u^1}} - \bar{a}_{1_{u^2}}) - p(\bar{a}_{2_{u^1}} - \bar{a}_{2_{u^2}}) = \bar{a}_{1_{u^1}} \bar{a}_{2_{u^2}} - \bar{a}_{2_{u^1}} \bar{a}_{1_{u^2}}. \tag{16}$$

Ist $\bar{a}_{1_{u^1}} - \bar{a}_{1_{u^2}} \neq 0$, so läßt sich (16) durch eine geeignete Verschiebung

s Koordinatensystems längs der X_3-Achse unter Änderung der Bedeutung
n r auf die Gestalt

7) $$c_1 r + c_2 p = 0$$

ingen, worin

$$c_i = \bar{a}_{i_{u^1}} - \bar{a}_{i_{u^2}} \qquad (i = 1, 2)$$

. Die Gleichungen (15) und (16), bzw. (17) treten für die vorliegen-
n singulären Strahlen an Stelle der Formeln von Hamilton und
annheim.

Als triviale Fälle von Kongruenzen mit nur wesentlich singulären
rahlen seien solche mit unendlich ferner Brennlinie und die Parallel-
rahlenbündel angeführt.

2. Komplexe.

Ein Strahlenkomplex sei durch das duale Bild

8) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(u^1, u^2, u^3) = \mathfrak{a}(u^1, u^2, u^3) + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}}(u^1, u^2, u^3)$$

geben; hinsichtlich seiner dualen Fundamentalform

9) $$d\mathfrak{A}^2 = \sum_{i,k=1}^{3} \mathfrak{A}_{u^i} \mathfrak{A}_{u^k} du^i du^k$$

nd solche Stellen als singulär aufzufassen, an denen wenigstens einer von
en Ausdrücken

20) $$D_l = \begin{vmatrix} \mathfrak{a}_{u^i}^2 & \mathfrak{a}_{u^i} \mathfrak{a}_{u^k} \\ \mathfrak{a}_{u^i} \mathfrak{a}_{u^k} & \mathfrak{a}_{u^k}^2 \end{vmatrix} = (\mathfrak{a}_{u^i} \times \mathfrak{a}_{u^k})^2 \qquad \begin{matrix} (i, k = 1, 2;\ 2, 3;\ 1, 3), \\ (l = 3;\ 1;\ 2) \end{matrix}$$

erschwindet[2]). Trifft dies nicht für alle drei zu, so kann man immer
arametertransformationen angeben, welche die Singularität beseitigen;
lche Singularitäten sind also unwesentlich. Ist an der betrachteten
elle nur

$$D_1 = 0,$$

eignet sich hierfür die Transformation

21) $$u^1 = u_*^1 + u_*^2, \qquad u^2 = u_*^2, \qquad u^3 = u_*^3,$$

t dagegen

$$D_1 = 0, \qquad D_2 = 0,$$

ne daß D_3 verschwindet, so wird die Singularität durch

22) $$u^1 = u_*^1 + u_*^3, \qquad u^2 = u_*^2 + u_*^3, \qquad u^3 = u_*^3$$

[2]) Vgl. K. Mayrhofer, Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in
ien. Mathem.-naturw. Klasse, Abteilung IIa, 134. Band (1925), S. 215 ff.

aufgehoben. Erst wenn alle drei Ausdrücke (20) Null sind, kann der Strahl wesentlich singulär sein.

Wir nehmen an, der Komplex liege in der besondern Form

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{a}(u^1, u^2) + \varepsilon \bar{\mathfrak{a}}(u^1, u^2, u^3) \tag{23}$$

vor, so daß D_1 und D_2 immer Null sind. Unter Bezugnahme auf (22) gilt, daß eine Stelle wesentlich singulär ist oder nicht, je nachdem man das Verschwinden von D_3 durch eine Parameteränderung beseitigen kann oder nicht. Aus den Untersuchungen über die Kongruenzen ergibt sich unmittelbar für eine Stelle (u_0^1, u_0^2, u_0^3) eines Komplexes, wenn für die Koordinatenkongruenz

$$u^3 = u_0^3 \tag{24}$$

jeweils die bei den Kongruenzen angegebenen Voraussetzungen zutreffen, folgendes:

Eine Stelle (u_0^1, u_0^2, u_0^3) kann nur dann wesentlich singulär sein, wenn in jeder noch so kleinen Umgebung aus (24) parallele Komplexstrahlen auftreten. Geht insbesondere durch (u_0^1, u_0^2, u_0^3) ein in (24) liegender Zylinder hindurch, so ist die Stelle wesentlich singulär; es gibt dann ein dem Komplex angehörendes Parallelstrahlenbündel.

Als *Beispiel* dient ein Komplex, bei dem $\mathfrak{a}(u^1, u^2)$ wiederum die Gestalt (14) hat. Schließlich tritt ähnlich wie bei den Kongruenzen die Beziehung (15) an Stelle der Formel von Koenigs.

Als trivialer Fall eines Komplexes mit nur wesentlich singulären Strahlen sei der Komplex der Treffgeraden einer unendlich fernen Kurve angeführt.

(Eingegangen am 14. Januar 1926.)

Beweis eines Satzes von Arzelà.

Von

F. Hausdorff in Bonn.

Wir betrachten reelle Funktionen $f = f(x)$, die in einem festen ntervall $[a, b]$ (d. h. für $a \leqq x \leqq b$) definiert und *beschränkt* sind. Die usdrücke Integral und integrabel sind im Riemannschen Sinne gemeint. $f = \int_a^b f dx$ sei das Integral von f, wenn es existiert, ebenso $\underline{J} f$ das ntere und $\bar{J} f$ das obere Riemann-Darbouxsche Integral. Über die ertauschbarkeit von Limes und Integral hat C. Arzelà[1]) schon vor vierzig ahren den folgenden Satz bewiesen:

I. *Wenn die gleichmäßig beschränkten, integrablen Funktionen f_n ach der integrablen Funktion f konvergieren, so konvergiert Jf_n nach Jf.*

Sein Beweis beruht auf einem Lemma über Folgen von Intervallummen[2]). Einen Sonderfall von I, der Annahme stetiger Funktionen f_n nd f entsprechend, hat W. F. Osgood[3]) neu entdeckt. Im folgenden möchte ich einen kurzen und natürlichen, auch für eine elementare Vorsung geeigneten Beweis von I mitteilen, der auf einer Ungleichung für Darbouxsche Integrale beruht und den allgemeinen Fall nicht, wie das Arzel sche Lemma, auf Treppenfunktionen, sondern auf die bequemer u handhabenden stetigen Funktionen zurückführt.

Das untere Integral $\underline{J} f$ ist definitionsgemäß die obere Grenze der „Untersummen" oder der Integrale aller Treppenfunktionen $t \leqq f$; es ist

---

[1]) Rend. Acc. Linc. (4) 1 (1885), S. 537; Mem. Ist. Bologna (5) 8 (1899), . 723—725.

[2]) Spätere Beweise dieses Lemmas bei F. Hartogs, Schwarz-Festschrift (1914), . 55; L. Bieberbach, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 155—157; vgl. auch E. Landau, Math. Zeitschrift 2 (1918), S. 350—351.

[3]) American Journal of Math. 19 (1896), S. 175—182. Ein vereinfachter Beweis es Osgoodschen Satzes bei F. Riesz, Jahresbericht d. Deutschen Math.-Vereinigung 6 (1918), S. 274—278.

aber auch die obere Grenze der Integrale aller stetigen Funktionen $g \leqq f$. Denn wenn eine Treppenfunktion t an der Stelle ξ einen Sprung von $t(\xi-0)=\lambda_1$ zu $t(\xi+0)=\lambda_2$ macht, so ersetze man sie in einem hinlänglich kleinen Intervall $[\xi-h, \xi+h]$ durch eine stetige Funktion g mit $g(\xi-h)=\lambda_1$, $g(\xi+h)=\lambda_2$, $g(\xi)=\min[\lambda_1, \lambda_2]$, die in $[\xi-h, \xi]$ und $[\xi, \xi+h]$ linear verläuft. Durch diese „Abschleifung" der Sprünge erhält man eine stetige Funktion $g \leqq t$, deren Integral $Jg > Jt-\varepsilon$ gemacht werden kann.

Zu zwei Funktionen f_1, f_2 bilden wir $f=\min[f_1, f_2]$, $F=\max[f_1, f_2]$; dann ist

$$(1) \qquad \underline{J}f+\underline{J}F \geqq \underline{J}f_1+\underline{J}f_2, \qquad \bar{J}f+\bar{J}F \leqq \bar{J}f_1+\bar{J}f_2.$$

Denn sind $g_1 \leqq f_1$, $g_2 \leqq f_2$ stetige Funktionen, also auch $g=\min[g_1, g_2] \leqq f$, $G=\max[g_1, g_2] \leqq F$, so ist

$$\underline{J}f+\underline{J}F \geqq Jg+JG = Jg_1+Jg_2;$$

nimmt man rechts die obere Grenze, so erhält man die erste Ungleichung (1). (Man kann den Beweis auch mittels der Untersummen führen: sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda, \Lambda$ die unteren Grenzen von f_1, f_2, f, F in einem Intervall, so ist $\lambda=\min[\lambda_1, \lambda_2]$, $\Lambda \geqq \max[\lambda_1, \lambda_2]$, $\lambda+\Lambda \geqq \lambda_1+\lambda_2$.)

II. *Wenn die Funktionen φ_n abnehmend $(\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots)$ nach 0 konvergieren, so konvergiert $\underline{J}\varphi_n$ nach 0.*

Dies ist bekanntlich für stetige Funktionen φ_n richtig, da die Konvergenz gleichmäßig ist. (Satz von Dini. Ist $\delta_n=\max \varphi_n=\varphi_n(x_n)$, $\delta_1 \geqq \delta_2 \geqq \ldots$, $\delta_n \to \delta \geqq 0$, so haben die x_n eine konvergente Teilfolge; indem wir uns auf diese beschränken, sei $x_n \to x$. Für $m<n$ ist $\delta \leqq \delta_n=\varphi_n(x_n) \leqq \varphi_m(x_n)$, für $n \to \infty$ $\delta \leqq \varphi_m(x)$, für $m \to \infty$ $\delta \leqq 0$, also $\delta=0$.) Im allgemeinen Falle bestimmen wir eine Folge stetiger Funktionen $g_n \leqq \varphi_n$ mit $Jg_n > \underline{J}\varphi_n-\varepsilon$; es ist zu zeigen, daß man $g_1 \geqq g_2 \geqq \ldots$ annehmen kann. Wenn g_{n-1} bereits bestimmt ist, sei $\varphi=\min[\varphi_n, g_{n-1}]$, $\Phi=\max[\varphi_n, g_{n-1}] \leqq \varphi_{n-1}$; dann ist nach (1)

$$\underline{J}\varphi+\underline{J}\varphi_{n-1} \geqq \underline{J}\varphi+\underline{J}\Phi \geqq \underline{J}\varphi_n+Jg_{n-1} > \underline{J}\varphi_n+\underline{J}\varphi_{n-1}-\varepsilon,$$

$$\underline{J}\varphi > \underline{J}\varphi_n-\varepsilon$$

und man kann eine stetige Funktion $g_n \leqq \varphi$ mit $Jg_n > \underline{J}\varphi_n-\varepsilon$ bestimmen, wobei zugleich $g_n \leqq \varphi_n$ und $g_n \leqq g_{n-1}$ ist. — Die Funktionen g_n können ferner durch $\max[g_n, 0]$ ersetzt, also $\geqq 0$ angenommen werden. Sie konvergieren dann abnehmend nach 0, also $\lim Jg_n=0$, $\lim \underline{J}\varphi_n \leqq \varepsilon$, d. h. $\lim \underline{J}\varphi_n=0$.

Nunmehr ist I, worin $f=0$ angenommen werden kann, so zu beweisen: es sei $\varphi_n=\sup[f_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots]$ (sup = Supremum = obere

enze). Diese Funktionen konvergieren abnehmend nach 0; nach II ist o $\lim \underline{J}\varphi_n = 0$ und, wegen $f_n \leqq \varphi_n$, $\overline{\lim} J f_n \leqq 0$. Vertauschung von f_n it $-f_n$ gibt $\underline{\lim}\ J f_n \geqq 0$, d. h. $\lim J f_n = 0$.

Die Sätze I, II lassen sich mit Hilfe der bekannten, ebenso wie (1) beweisenden Formeln ($f = f_1 + f_2$)

$$\underline{J}f_1 + \underline{J}f_2 \leqq \underline{J}f \leqq \underline{J}f_1 + \bar{J}f_2 \leqq \bar{J}f \leqq \bar{J}f_1 + \bar{J}f_2$$

cht verallgemeinern. Aus II wird:

III. *Wenn die Funktionen φ_n abnehmend ($\varphi_1 \geqq \varphi_2 \geqq \ldots$) nach φ nvergieren, so ist*

$$\underline{J}\varphi \leqq \lim \underline{J}\varphi_n \leqq \bar{J}\varphi.$$

Die erste Hälfte dieser Ungleichung ist selbstverständlich, die zweite lgt aus $\underline{J}\varphi_n \leqq \underline{J}(\varphi_n - \varphi) + \bar{J}\varphi$ wegen $\underline{J}(\varphi_n - \varphi) \to 0$.

Als Verallgemeinerung von I erhalten wir:

IV. *Wenn die Funktionen f_n gleichmäßig beschränkt sind, so gilt für $= \underline{\lim} f_n$, $\bar{f} = \overline{\lim} f_n$:*

$$\overline{\lim}\, \underline{J} f_n \leqq \bar{J}\bar{f}, \qquad \underline{\lim}\, \bar{J} f_n \geqq \underline{J}\underline{f}.$$

enn wird wieder $\varphi_n = \sup [f_n, f_{n+1}, \ldots]$ gesetzt, so konvergiert φ_n abhmend nach $\bar{f}$, woraus $\lim \underline{J}\varphi_n \leqq \bar{J}\bar{f}$ und wegen $f_n \leqq \varphi_n$ die erste älfte der Behauptung folgt.

Wenn die f_n die charakteristischen Funktionen der Mengen X_n sind l. h. $f_n = 1$ in X_n, $f_n = 0$ im Komplement $[a, b] - X_n$), so sind $\underline{f}, \bar{f}$ die arakteristischen Funktionen der Mengen $\underline{X} = \underline{\mathrm{Lim}}\, X_n$, $\overline{X} = \overline{\mathrm{Lim}}\, X_n$, eren Punkte fast allen resp. unendlich vielen Mengen X_n angehören. us (4) folgt dann

$$\overline{\lim}\, \underline{i}\, X_n \leqq \bar{i}\, \overline{X}, \qquad \underline{\lim}\, \bar{i}\, X_n \geqq \underline{i}\, \underline{X},$$

o $\underline{i}$ und $\bar{i}$ den inneren und äußeren Peano-Jordanschen Inhalt beeuten. Ein Spezialfall der ersten Formel ist das Arzelàsche Lemma.

(Eingegangen am 26. Februar 1926.)

Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern.

(Erste Abhandlung.)

Von

G. Szegö in Königsberg und A. Walfisz in Wiesbaden.

Im folgenden sei $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Zahlkörper k-ten Grades, r_1 die Anzahl der zu $\mathfrak{K}$ konjugierten reellen Körper, r_2 die halbe Anzahl der imaginären, m eine positive ganze Zahl, $mk = \varkappa$, $mr_1 = \varrho_1$, $mr_2 = \varrho_2$; $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ bezeichne die zu $\mathfrak{K}$ gehörige Dedekindsche Zetafunktion, $Z(s) = \zeta_{\mathfrak{K}}^m(s)$,[1]

$$Z(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(\nu)}{\nu^s}^{2} \qquad (s = \sigma + it,\ \sigma > 1),$$

$$\sum_{\nu \leqq x} F(\nu) = H(x)^{3} \qquad (x > 0);$$

schließlich sei $R(x)$ die Residuensumme von

$$Z(s)\frac{x^s}{s}$$

für $s = 0$ und $s = 1$.

Es ist dann bekanntlich für $x \to \infty$

$$H(x) \sim R(x).$$

Wir setzen ferner

$$H(x) - R(x) = \mathsf{P}(x)$$

---

[1]) $\zeta_{\mathfrak{K}}^m(s) = (\zeta_{\mathfrak{K}}(s))^m$, und ebenso in allen analogen Fällen.

[2]) Für sämtliche Eigenschaften von $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$, die im folgenden benutzt werden, wie: der meromorphe Charakter, gleichmäßige Abschätzungen in vertikalen Streifen, Funktionalgleichung usw., verweisen wir auf die systematische Darstellung bei E. Landau, Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale [Leipzig und Berlin: B. G. Teubner, 1918], vgl §§ 10–13.

[3]) Falls die untere Summationsgrenze nicht explizit bezeichnet wird, ist sie stets Eins.

nd stellen uns die Aufgabe, $P(x)$ nach der Ω-Richtung hin abzu-
hätzen [4]).

In dieser Hinsicht folgt aus einem allgemeinen Satze von E. Landau [5])

$$P(x) = \Omega_R\left(x^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right), \qquad P(x) = \Omega_L\left(x^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\right).$$

n den beiden wichtigsten Spezialfällen: $k = 1$ (Piltzsches Teilerproblem)
nd $m = 1$ (Idealfunktion eines beliebigen algebraischen Zahlkörpers) waren
ndessen diese Abschätzungen bereits vorher durch G. H. Hardy bzw.
Valfisz bekannt [6]).

Für $k = 1$, $m = 2$ (Dirichletsches Teilerproblem) gilt ferner nach
. H. Hardy [7])

.) $$P(x) = \Omega_R(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x \log\log x),$$

esgleichen für $k = 2$, $m = 1$, $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}(i)$ (Idealfunktion des Gaußschen
örpers, vgl. [10])

2) $$P(x) = \Omega_L(x^{\frac{1}{4}} \log^{\frac{1}{4}} x).$$

Wir wollen in der vorliegenden Abhandlung einen Satz beweisen, der
1) und (2) als Spezialfälle umfaßt. Hierbei wird ϱ_1 auf sechs wohl-
estimmte Restklassen (mod 8) eingeschränkt. Es gilt nämlich der

Hauptsatz. 1. *Für* $\varrho_1 \equiv 2$ *oder* 3 *oder* 4 (mod 8) *ist*

$$P(x) = \Omega_R\left((x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}\right);$$

---

[4]) Wenn $\varphi(x) > 0$ ist, so haben bekanntlich die Symbole

$$f(x) = \Omega(\varphi(x)), \quad f(x) = \Omega_R(\varphi(x)), \quad f(x) = \Omega_L(\varphi(x)) \qquad (x \to \infty)$$

zw. die folgende Bedeutung:

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{|f(x)|}{\varphi(x)} > 0, \quad \limsup_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} > 0, \quad \liminf_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\varphi(x)} < 0.$$

[5]) E. Landau, Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen (Vierte
bhandlung) [Göttinger Nachrichten 1924, S. 137–150].

[6]) Für das Piltzsche Teilerproblem vgl. G. H. Hardy, On Dirichlet's divisor
roblem [Proceedings of the London Mathematical Society (2) **15** (1916), S. 1–25];
ir die Idealfunktion eines imaginär-quadratischen Körpers: G. H. Hardy, On the
xpression of a number as the sum of two squares [Quarterly Journal **46** (1915),
. 263–283]; für die Idealfunktion eines beliebigen Zahlkörpers: A. Walfisz, Über
ie summatorischen Funktionen einiger Dirichletscher Reihen, Inauguraldissertation
Göttingen: W. Fr. Kaestner, 1922], Satz I.

[7]) Vgl. die erste in der vorigen Fußnote angegebene Abhandlung, S. 23–25, wo
ine Beweisskizze für (1) gegeben wird; die Abschätzung (2) kann auf analoge Weise
bgeleitet werden.

2. *für* $\varrho_1 \equiv 6$ *oder* 7 *oder* $8 \pmod 8$ *ist*

$$P(x) = \Omega_L\left((x\log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}(\log\log x)^{m-1}\right).^{8)}$$

Beim Beweise verwenden wir eine Methode, die kürzlich von Szegö[9]) für das „Kreis-Kugelproblem" geschaffen worden ist und zugleich eine neue Begründung von (2) liefert[10]). Ein wesentlicher Schritt bei dieser Methode, angewendet auf unsere Aufgabe, besteht in der asymptotischen Auswertung des „Borelschen Mittelwertes"

$$(M) \qquad \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^n P\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du$$

für $n \to \infty$ und geeignet mit n variables $\xi > 0$.

Bei dem erwähnten Spezialfall des Kreisproblems (analoges gilt übrigens auch bei drei- und mehrdimensionalen Kugeln) läßt sich dieser Mittelwert mit Hilfe der sog. Laguerreschen Polynome $L_n^{(1)}(x)$ ausdrücken, für welche nach Le Roy die Darstellung

$$(3) \qquad e^{-x}x^{\frac{1}{2}}L_n^{(1)}(x) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}}J_1(2\sqrt{xu})\,du$$

(J_1 die Besselsche Funktion von der Ordnung 1) gilt[11]). In dem von uns behandelten allgemeineren Falle tritt an Stelle von $J_1(x)$ eine Verallgemeinerung $J_{\varrho_1,\varrho_2}(x)$ der Besselschen Funktionen, die von Walfisz[12])

[8]) [Zusatz während der Korrektur.] Es ist uns inzwischen durch eine Abänderung des in § 4 angewandten Verfahrens gelungen, nicht nur die beiden hier nicht behandelten Fälle $\varrho_1 \equiv 1$ und $5 \pmod 8$ aufzunehmen, sondern in allen diesen Fällen wesentlich mehr zu zeigen, als hier geschieht. Dies soll in einer zweiten Abhandlung ausgeführt werden.

[9]) G. Szegö, Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. I.: Entwicklungssätze [Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 87–115]; Beiträge zur Theorie der Laguerreschen Polynome. II.: Zahlentheoretische Anwendungen [Math. Zeitschr. 25 (1926), S. 388–404]. Diese beiden Arbeiten zitieren wir kurz mit Szegö, I und Szegö, II.

[10]) Bedeutet $A(x)$ die Anzahl der Gitterpunkte im abgeschlossenen Kreis $u^2+v^2 \leqq x$ und $H_0(x)$ die auf den Gaußschen Körper $\Re(i)$ und $m=1$ spezialisierte Funktion $H(x)$, so gilt bekanntlich

$$A(x) = 4H_0(x) + 1.$$

$H_0(x)$ stellt die Gitterpunktanzahl im Kreisquadranten

$$u > 0, \quad v \geqq 0, \quad u^2+v^2 \leqq x$$

dar.

[11]) Vgl. Szegö, I, S. 94, (6).

[12]) A. Walfisz, Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern [Math. Zeitschr. 22 (1925), S. 153–188], S. 153, (1. 5). Wir zitieren diese Arbeit kurz mit Walfisz, P. T.

bei Betrachtung der expliziten Reihendarstellung von $P(x)$ eingeführt worden ist. $J_{\varrho_1,\varrho_2}(x)$ besitzt für $x \to \infty$ eine ähnliche semikonvergente Entwicklung, wie sie für die Besselschen Funktionen wohlbekannt ist. Mit Hilfe dieser Entwicklung kann das verallgemeinerte Integral (3), und von da aus auch der Mittelwert (M), asymptotisch ausgewertet werden. Zum Schluß wenden wir dann den von Dirichlet stammenden Spezialfall des bekannten Kroneckerschen Approximationssatzes an[13]).

§ 1 enthält Hilfssätze über die Funktionen $J_{\varrho_1,\varrho_2}(x)$ und $F(v)$. In § 2 wird der Mittelwert (M) umgeformt, in § 3 asymptotisch ausgewertet. Sodann folgt in § 4 der Beweis des Hauptsatzes.

In der Folge bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{k}$ geeignete positive, nur von $\mathfrak{K}$ und m abhängige Zahlen, deren Präzisierung unerheblich ist.

§ 1.

Hilfssätze über die Funktionen $J_{\varrho_1,\varrho_2}(x)$ und $F(v)$.

1. Es ist bekannt (vgl. etwa a. a. O. [2]), S. 80), daß für $t \to \infty$, gleichmäßig im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$,

$$|\Gamma(s)| \sim c\, e^{-\frac{\pi}{2}|t|}\, |t|^{\sigma-\frac{1}{2}} \tag{4}$$

gilt, wo $c > 0$ eine absolute Konstante ist. Es werde zur Abkürzung

$$G(s) = \frac{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(1-s)}{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(s)} \tag{5}$$

gesetzt. Aus (4) folgt dann für $t \to \infty$, gleichmäßig im Streifen $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$,

$$G(s) = O\left(|t|^{\varkappa\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}\right). \tag{6}$$

Für $w > 0$ ist nach Definition (Walfisz, P. T., S. 153, (1. 5))

$$J_{\varrho_1,\varrho_2}(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\left(\frac{w}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}, \quad \tau = \varkappa 2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}}. \tag{7}$$

Dieses Integral ist wegen (6) absolut konvergent und stellt eine für $w > 0$ stetige Funktion dar. Man hat für $w > 0$

$$|J_{\varrho_1,\varrho_2}(w)| \leqq \frac{1}{2\pi}\left(\frac{w}{\tau}\right)^{\frac{3}{4}\varkappa-1}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}\left|\frac{G(s)}{s}\right| dt = \mathfrak{k}\, w^{\frac{3}{4}\varkappa-1}. \tag{8}$$

---

[13]) Wir werden den Leser an geeigneter Stelle [vgl. Fußnote [20])] darauf aufmerksam machen, warum unser Verfahren für $\varrho_1 \equiv 1$ oder $5 \pmod 8$ versagt.

Hilfssatz 1. *Für* $w \to \infty$ *und ganzes* $g \geqq 0$ *wird, mit gewissen reellen Konstanten* $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$,

$$(9) \qquad J_{\varrho_1,\varrho_2}(w) = -\mathfrak{k} w^{-\frac{x-3}{2}} \cos\left(w + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) + \sum_{\nu=1}^{g} w^{\frac{x-3}{2}-\nu}(a_\nu \cos w + b_\nu \sin w) + O\left(w^{\frac{x-3}{2}-g-1}\right).$$

Dies ist, wenn man vom $\mathfrak{k}$-Wert absieht, identisch mit dem Hilfssatz 1 von Walfisz, P. T., S. 154.

2. Wir führen jetzt für jedes natürliche n die Funktion

$$M_{n,\varrho_1,\varrho_2}(x) = M_n(x)$$

mittels

$$(10) \qquad M_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^{n^\gamma} e^{-u} u^{n+\frac{1}{2}} J_{\varrho_1,\varrho_2}(2\sqrt{ux})\,du$$

ein; das Integral hat wegen (8) gewiß einen Sinn[14]).

Hilfssatz 2. *Es sei* $0 < \gamma < 1$, $0 < \delta < \frac{1}{3}$, $h > \frac{3\delta}{2}$;[15])

$$n^{-\gamma} \leqq x \leqq n^\delta.$$

Dann gilt für $n \to \infty$

$$(11) \qquad M_n(x) = -\mathfrak{k} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{x-3}{4}} n^{\frac{x-1}{4}} \cos\left(2\sqrt{nx} + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) + R_n,$$

$$R_n = x^{\frac{x-3}{4}} O\left(n^{\frac{x-3}{4}+h}\right) + x^{\frac{x-5}{4}} O\left(n^{\frac{x-3}{4}}\right).$$

Selbstverständlich kann hier die x-Ungleichung durch die allgemeinere

$$c_1 n^{-\gamma} \leqq x \leqq c_2 n^\delta$$

ersetzt werden; $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ fest.

Der Beweis geht, mit Hilfe von Hilfssatz 1, fast wörtlich, wie der von Formel (9′) bei Szegö, I, S. 99–102. Wir dürfen uns daher kurz fassen.

Wir wählen ein festes a mit $0 < a < 1 - \gamma$. Aus (8) folgt dann

$$\frac{1}{n!}\int_0^{n^\gamma} e^{-u} u^{n+\frac{1}{2}} J_{\varrho_1,\varrho_2}(2\sqrt{ux})\,du = O(e^{-an\log n}).$$

---

[14]) Setzt man

$$M_n(x) = e^{-x} x^{\frac{1}{2}} L_n(x),$$

so ist $L_n(x)$ eine Verallgemeinerung des durch (3) gegebenen Laguerreschen Polynoms $L_n^{(1)}(x)$.

[15]) Wir werden später $\gamma = \mathfrak{k}$, $\delta = \mathfrak{k}$, $h = \mathfrak{k}$ setzen.

In das zweite Teilstück des Integrals (10) setzen wir (9) mit $g = 0$ ein. Es ergibt sich

$$-\mathfrak{k}\frac{x^{\frac{\varkappa-3}{4}}}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^{n+\frac{\varkappa-1}{4}}\cos\left(2\sqrt{ux}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)du$$

$$+\frac{x^{\frac{\varkappa-5}{4}}}{n!}O\int_0^\infty e^{-u}u^{n+\frac{\varkappa-3}{4}}du+\frac{x^{\frac{\varkappa-3}{4}}}{n!}O\int_0^{n^\Delta}e^{-u}u^{n+\frac{\varkappa-1}{4}}du$$

$$=-\mathfrak{k}\frac{x^{\frac{\varkappa-3}{4}}}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^{n+\frac{\varkappa-1}{4}}\cos\left(2\sqrt{ux}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)du$$

$$+x^{\frac{\varkappa-5}{4}}O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}}\right)+O(e^{-an\log n}).$$

Das letzte Integral wird wörtlich wie bei Szegö behandelt. Man findet (nach Weglassung von $-\mathfrak{k}x^{\frac{\varkappa-3}{4}}$)

$$\frac{n^{n+\frac{\varkappa-1}{4}+1}e^{-n}}{n!}\int_0^\infty(e^{1-u}u)^n u^{\frac{\varkappa-1}{4}}\cos\left(2\sqrt{unx}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)du$$

$$=\frac{n^{n+\frac{1}{2}+\frac{\varkappa+1}{4}}e^{-n}}{n!}\left\{e^{-\frac{x}{2}}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\cos\left(2\sqrt{nx}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)+O(n^{-1+h})\right\}$$

$$=n^{\frac{\varkappa+1}{4}}\left\{e^{-\frac{x}{2}}n^{-\frac{1}{2}}\cos\left(2\sqrt{nx}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)+O(n^{-1+h})\right\}.$$

Damit ist aber Hilfssatz 2 bewiesen.

3. Hilfssatz 3. *Es sei* $\Delta > 0$. *Dann ist für* $x > n^\Delta$, $n \to \infty$

$$M_n(x) = O(x^{-N}),$$

wobei N *eine beliebige feste positive Zahl bedeutet* [16].

Beweis. Aus (8) folgt

$$\left|\frac{1}{n!}\int_0^{x^{-1}}e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}}J_{\varrho_1,\varrho_2}(2\sqrt{ux})\,du\right| \leqq \frac{\mathfrak{k}}{n!}\int_0^{x^{-1}}u^{n+\frac{1}{2}}(ux)^{\frac{3}{4}\varkappa-\frac{1}{2}}du$$

$$\leqq \frac{\mathfrak{k}}{n!}x^{-(n+\frac{3}{2})} = O(x^{-N}).$$

Beim entsprechenden Integral $x^{-1} \leqq u < \infty$ kann man, da alsdann $ux \geqq 1$ ist, Hilfssatz 1 anwenden. Es folgt, in leicht abgeänderter Schreibweise, sobald n oberhalb einer geeigneten, von N abhängigen Schranke liegt,

[16] Wir werden später $\Delta = \mathfrak{k}$, $N = \mathfrak{k}$ setzen.

$$(12)\qquad \frac{1}{n!}\int_{x^{-1}}^{\infty} e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}}J_{\varrho_1,\varrho_2}(2\sqrt{ux})\,du$$

$$=\sum_{\nu=0}^{g}\frac{1}{n!}\int_{x^{-1}}^{\infty} e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}}(2\sqrt{ux})^{\frac{\varkappa-3}{2}-\nu}(a_\nu\cos 2\sqrt{ux}+b_\nu\sin 2\sqrt{ux})\,du$$

$$+O\frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}}(ux)^{\frac{\varkappa-3}{4}-\frac{g+1}{2}}\,du.$$

Der in (12) hinter dem O-Zeichen stehende Ausdruck ist für geeignet großes $g=g(N)$

$$=\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa+1}{4}-\frac{g}{2}\right)}{n!}x^{\frac{\varkappa-3}{4}-\frac{g+1}{2}}=O(x^{-N}).$$

Sammelt man die bisherigen Resultate und beachtet die Definition (10) von $M_n(x)$, so folgt, mit abgeänderten a_ν, b_ν,

$$M_n(x)=\sum_{\nu=0}^{g}\frac{1}{n!}x^{\frac{\varkappa-3}{4}-\frac{\nu}{2}}\int_{x^{-1}}^{\infty} e^{-u}u^{n+\frac{\varkappa-1}{4}-\frac{\nu}{2}}(a_\nu\cos 2\sqrt{ux}+b_\nu\sin 2\sqrt{ux})\,du$$

$$+O(x^{-N}).$$

Es genügt daher, unter den bisherigen Voraussetzungen,

$$\frac{1}{n!}\int_{x^{-1}}^{\infty} e^{-u}u^{n+\beta}e^{2i\sqrt{ux}}\,du=O(x^{-N}),$$

oder was dasselbe ist,

$$\frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^{n+\beta}e^{2i\sqrt{ux}}\,du=O(x^{-N})$$

zu beweisen; hierbei ist β fest. Wir zeigen, daß bei *kontinuierlich* ins Unendliche wachsenden n und X

$$(13)\qquad \frac{1}{\Gamma(n+1)}\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}e^{iX\sqrt{u}}\,du=O(X^{-N})$$

gilt, wo N eine beliebige feste positive Zahl ist.

Der fragliche Ausdruck kann in der Form

$$\frac{2}{\Gamma(n+1)}\int_{0}^{\infty} e^{-u^2}u^{2n}e^{iXu}\,du$$

geschrieben werden. Da der Integrand in dem Halbstreifen

$$\Re u\geqq 0,\quad 0\leqq\Im u\leqq 1$$

ür $u \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert, so kann der Integrationsweg nach dem Cauchyschen Satze) durch den folgenden ersetzt werden: die geradlinige Strecke von 0 bis i und die Halbgerade, welche in der rechten Halbebene parallel zur reellen Achse von i nach ∞ führt.

Der zweite Teil ist dem Betrage nach kleiner als

$$\frac{2e^{-X}}{\Gamma(n+1)} \int_0^\infty |e^{-(u+i)^2}(u+i)^{2n}|\, du < \tfrac{1}{4} e^{-X},$$

la ja

$$\int_0^\infty e^{-u^2}(u^2+1)^n\, du = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-u}(u+1)^n u^{-\frac{1}{2}}\, du$$

$$= \frac{e}{2}\int_1^\infty e^{-u} u^n (u-1)^{-\frac{1}{2}}\, du = O(\Gamma(n+1)).$$

Der erste Teil ist dem Betrage nach gleich

$$\frac{2}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 e^{u^2} u^{2n} e^{-Xu}\, du < \frac{2e}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 e^{-Xu} u^{2n}\, du.$$

Die Funktion $e^{-Xu}u^{2n}$ wächst für $u \leqq u_0 = 2nX^{-1}$ und nimmt für $u \geqq u_0$ ab. Wir unterscheiden nun zwei Fälle:

a) $X \leqq 2n$, d. h. $u_0 \geqq 1$. Dann ist

$$\frac{2e}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 e^{-Xu} u^{2n}\, du < \frac{2e}{\Gamma(n+1)} e^{-X} < \tfrac{1}{4} e^{-X}.$$

b) $X \geqq 2n$, d. h. $u_0 \leqq 1$. Dann ist

$$\frac{2e}{\Gamma(n+1)} \int_0^1 e^{-Xu} u^{2n}\, du < \frac{2e}{\Gamma(n+1)} \left(\frac{2n}{eX}\right)^{2n} < \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{X}\right)^{2n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

$$< \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{X}\right)^{2n}\left(\frac{X}{2e}\right)^n = \tfrac{1}{4}\left(\frac{2}{eX}\right)^n < \frac{1}{X^n},$$

woraus die Behauptung (13) folgt.

4. Wir erwähnen noch eine andere Integraldarstellung von $M_n(x)$, die im folgenden benutzt wird.

Setzt man in der Definition (10) von $M_n(x)$ an Stelle von $J_{\varrho_1,\varrho_2}(2\sqrt{ux})$ seine Integralform (7) ein und vertauscht sodann die beiden Integrationen (dies ist wegen der absoluten Konvergenz erlaubt), so folgt

$$(14)\qquad M_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\left(\frac{2\sqrt{x}}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}\,\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^{n+\frac{1}{2}+\frac{\varkappa s-1}{2}}\,du$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}.$$

Infolge von (4) und (6) (da ferner $G(0)=0$ ist), kann hier die Integrationsgerade in $\sigma = -\frac{1}{\varkappa}$ (sogar in $\sigma=\sigma_0$, $\sigma_0 > -\frac{2(n+1)}{\varkappa}$) verschoben werden. Es ergibt sich also aus (14)

$$(15)\qquad M_n(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{\varkappa}-i\infty}^{-\frac{1}{\varkappa}+i\infty} G(s)\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\left(\frac{2\sqrt{x}}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}.$$

5. Hilfssatz 4. *Für $0<\beta<1$ und $y\to+\infty$ wird*

$$\sum_{\nu\leqq y}\frac{F(\nu)}{\nu^\beta} \sim \mathfrak{k}\, y^{1-\beta}\log^{m-1} y,$$

$$\sum_{\nu\leqq y}\frac{F(\nu)}{\nu} = O(\log^m y).$$

Der Beweis folgt unmittelbar aus

$$(16)\qquad H(x)\sim R(x)\sim \mathfrak{k}\, x\log^{m-1}x,$$

indem man partielle Summation anwendet.

Schließlich sei bemerkt, daß für jedes $\eta>0$

$$(17)\qquad F(\nu) = O(\nu^\eta)$$

gilt (Walfisz, P. T., S. 176, (9. 2)).

§ 2.

Umformung des Mittelwertes (M).

Bei festem $\lambda>0$ wird

$$\int_0^\infty e^{-u}H\left(\lambda u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du = \int_0^\infty e^{-u}\sum_{\nu\leqq\lambda u^{\frac{\varkappa}{2}}}F(\nu)\,du = \sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\int_{\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}^\infty e^{-u}\,du$$

$$(18)\qquad = \sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\,\exp\left\{-\left(\frac{\nu}{\lambda}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}.$$

Zur weiteren Behandlung dieses Ausdrucks benutzen wir die bekannte
ahen-Mellinsche Integraldarstellung der Exponentialfunktion:

$$e^{-x} = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-s}\,\Gamma(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varkappa}{2}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} x^{-\frac{\varkappa s}{2}}\,\Gamma\left(\frac{\varkappa s}{2}\right) ds$$

$$(x>0,\ c>0).$$

s folgt, indem man im zweiten Integral $c=2$ setzt,

$$\int_0^\infty e^{-u}\,H\left(\lambda u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varkappa}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\int_{2-i\infty}^{2+i\infty}\left(\frac{\lambda}{\nu}\right)^{s}\Gamma\left(\frac{\varkappa s}{2}\right) ds.$$

Hier ist wegen der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\nu^{-2}$ sowie wegen (4) die
ertauschung von Summation und Integration erlaubt:

$$\int_0^\infty e^{-u}\,H\left(\lambda u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varkappa}{2}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Z(s)\,\lambda^{s}\,\Gamma\left(\frac{\varkappa s}{2}\right) ds.$$

Wir ersetzen nun u durch $(1-z)u$ und λ durch $\xi(1-z)^{-\frac{\varkappa}{2}}$
$0<z<1,\ \xi>0$). Es folgt dann

$$19)\qquad \int_0^\infty e^{-(1-z)u}\,H\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{\varkappa}{2}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Z(s)\,\frac{\xi^{s}}{(1-z)^{\frac{\varkappa s}{2}+1}}\,\Gamma\left(\frac{\varkappa s}{2}\right) ds.$$

Die linke Seite von (19) konvergiert, wie eine einfache Abschätzung
ehrt, für komplexe z mit $|z|\leqq z_0<1$ absolut und gleichmäßig. Das-
elbe gilt wegen (4) für die rechte Seite, da doch für die genannten
Werte von z

$$\left|\frac{1}{(1-z)^{\frac{\varkappa s}{2}+1}}\right| \leqq \exp\left\{(\varkappa+1)\log\frac{1}{1-z_0}+\frac{\varkappa}{2}|t|\left|\Im\log\frac{1}{1-z}\right|\right\}$$

nd $\left|\Im\log\frac{1}{1-z}\right| \leqq \frac{\pi}{2}-\varepsilon(z_0)$ ist, wobei die positive Zahl $\varepsilon(z_0)$ nur von
$_0$ abhängt. Sie stellen demnach eine im Innern des Einheitskreises der
-Ebene reguläre analytische Funktion dar. Wir wollen diese Funktion beider-
eits nach Potenzen von z entwickeln und die entsprechenden Koeffizienten
ergleichen. Hierbei kann die Reihenfolge der Integration und Summation
uf beiden Seiten vertauscht werden. Auf der linken Seite folgt dies
zusammen mit der Konvergenz des Integrals für $0<z<1$) aus der
atsache, daß sämtliche Glieder der Potenzreihenentwicklung von

e^{zu} $(0<z<1)$ positiv sind. Auf der rechten Seite beachte man, da der n-te Koeffizient der Potenzreihe

$$\frac{1}{(1-z)^{\frac{\varkappa s}{2}+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+\frac{\varkappa s}{2}}{n} z^n$$

dem Betrage nach

$$\leqq z_1^{-n} \operatorname*{Max}_{|z|\leqq z_1}\left|\frac{1}{(1-z)^{\frac{\varkappa s}{2}+1}}\right|$$

$$\leqq z_1^{-n}\exp\left\{(\varkappa+1)\log\frac{1}{1-z_1}+\frac{\varkappa}{2}|t|\left(\frac{\pi}{2}-\varepsilon(z_1)\right)\right\}$$

ist, wobei man z_1 gemäß $z_0<z_1<1$ zu bestimmen hat. Es wird dahe

$$(20)\quad \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}u^n H\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du = \frac{1}{2\pi i}\frac{\varkappa}{2}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Z(s)\xi^s\binom{n+\frac{\varkappa s}{2}}{n}\Gamma\left(\frac{\varkappa s}{2}\right)ds$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{2-i\infty}^{2+i\infty} Z(s)\xi^s\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\frac{ds}{s}.$$

Anderseits gilt

$$(21)\quad \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}u^n R\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du = \text{Residuensumme von } \frac{Z(s)}{s}\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}u^n\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)$$

für $s=0$ und $s=1$ [17]),

$$= \text{Residuensumme von } Z(s)\xi^s\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\frac{1}{s}$$

für $s=0$ und $s=1$.

Es ist also, da der Integrand von (20) im Streifen

$$-\frac{1}{\varkappa}\leqq\sigma\leqq 2$$

---

[17]) Es ist nämlich

$$R(u)=\frac{1}{2\pi i}\oint Z(s)\frac{u^s}{s}ds \qquad (u>0$$

wobei die Integration z. B. längs des Kreises $\left|s-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{\varkappa}$ zu erstrecken ist. Set man dies in (21) ein, so konvergiert das Doppelintegral absolut, da

$$\int_0^{\infty} e^{-u}u^{n-\frac{1}{2}}du$$

konvergiert. Die Vertauschung der beiden Integrationen ist also erlaubt.

ir $t \to \infty$ gleichmäßig gegen 0 konvergiert,

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}\, u^n\, \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{\varkappa}-i\infty}^{-\frac{1}{\varkappa}+i\infty} Z(s)\,\xi^s\, \frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\,\frac{ds}{s}.$$

Wendet man jetzt auf $Z(s)$ die Heckesche Funktionalgleichung

$$Z(s) = A^{1-2s}\, G(s)\, Z(1-s) \quad (A \text{ positive Konstante})$$

n, so folgt, weil für $\sigma = -\frac{1}{\varkappa}$

$$Z(1-s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\,\nu^{s-1}$$

st,

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}\, u^n\, \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \frac{A}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{\varkappa}-i\infty}^{-\frac{1}{\varkappa}+i\infty} G(s)\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{F(\nu)}{\nu}\left(\frac{\xi\nu}{A^2}\right)^s \frac{ds}{s}.$$

Hier kann wegen (4) und (6) die Reihenfolge der Integration und Summation vertauscht werden. Man erhält

$$\mathfrak{k}\,\xi^{\frac{1}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(\nu)}{\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{-\frac{1}{\varkappa}-i\infty}^{-\frac{1}{\varkappa}+i\infty} G(s)\,\frac{\Gamma\left(n+\frac{\varkappa s}{2}+1\right)}{n!}\left\{\mathfrak{k}\,(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}\right\}^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s},$$

also wegen (15) das Endresultat:

$$\frac{1}{n!}\int_0^{\infty} e^{-u}\, u^n\, \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = \mathfrak{k}\,\xi^{\frac{1}{\varkappa}} \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{F(\nu)}{\nu^{1-\frac{1}{\varkappa}}}\, M_n\left\{\mathfrak{k}\,(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}. \tag{22}$$

§ 3.

Asymptotische Auswertung des Mittelwertes (M).

Wir wollen jetzt durch Anwendung der Hilfssätze 2, 3 und 4 für die rechte Seite von (22), d. h. für den Mittelwert (M), einen asymptotischen Ausdruck aufstellen, der auf $n \to \infty$ Bezug hat. Hierbei lassen wir ξ auch mit n variieren, jedoch so, daß

$$c\,n^{-\gamma} < \xi < \xi_0 \qquad (0 < \gamma < 1,\ c > 0,\ \xi_0 > 0 \text{ fest})$$

bleibt[18]).

[18]) Wir werden später (§ 4) $\xi = \frac{1}{\log n}$ setzen.

Es sei, in den Bezeichnungen von Hilfssatz 2,

$$0 < \delta < \frac{1}{3}, \qquad h > \frac{3\delta}{2}.$$

Falls dann in (22)

$$\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}} \leqq n^{\delta}$$

ist, so hat man nach (11)

$$(23) \qquad \xi^{\frac{1}{\varkappa}} \sum_{\nu}^{1-\frac{1}{\varkappa}} F(\nu)\, M_n\left\{\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$= -\mathfrak{k}\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n^{\frac{\varkappa-1}{4}} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left(\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} n^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$

$$+ \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} F(\nu) \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}+h}\right) + \xi^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} F(\nu) \nu^{-\frac{\varkappa+3}{2\varkappa}} O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}}\right).$$

Falls dagegen

$$\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}} > n^{\delta}$$

ist, so hat man nach Hilfssatz 3 und (17)

$$(24) \qquad \xi^{\frac{1}{\varkappa}} \sum_{\nu}^{1-\frac{1}{\varkappa}} F(\nu)\, M_n\left\{\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = O\left\{(\xi\nu)^{-N}\right\},$$

wobei N (hier und im folgenden) eine beliebig große feste positive Zahl bedeutet.

Ehe wir (23) und (24) in (22) einsetzen, seien einige Hilfsformeln abgeleitet.

Wir setzen

$$y = \mathfrak{k}\xi^{-1} n^{\frac{\varkappa}{2}\delta}.$$

Dann folgt aus unseren Voraussetzungen, für $n \to \infty$,

$$y \to \infty, \quad \xi y \to \infty, \quad \log y = O(\log n), \quad y^{-N} = O\left(n^{-\frac{\varkappa}{2}\delta N}\right),$$

$$y \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = O \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = O \exp\left\{-\mathfrak{k} n^{\delta}\right\} = O(n^{-N}).$$

Mithin wird

$$\sum_{\nu>y} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} = O \sum_{\nu>y} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$= O \int_{y}^{\infty} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du + O \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$= O\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\xi^{2}y^{2}\int_{y}^{\infty}\frac{du}{\xi^{2}u^{2}} + O\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$= O\left(y\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi y)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\right)$$

$$= O(n^{-N}). \tag{25}$$

Ferner ergibt Hilfssatz 4 (es ist $\varkappa \geqq 2$)

$$\sum_{\nu \leqq y} F(\nu)\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} = O\left(y^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}y\right) = \xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}O\left(n^{\frac{\varkappa-1}{4}\delta}\log^{m-1}n\right) \tag{26}$$

und

$$\sum_{\nu \leqq y} F(\nu)\nu^{-\frac{\varkappa+3}{2\varkappa}} = O(\log^{m}y) + O\left(y^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}}\log^{m-1}y\right)$$

$$= O(\log^{m}n) + \xi^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}}O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}\delta}\log^{m-1}n\right). \tag{27}$$ [19])

Schließlich liefert eine primitive Abschätzung

$$\sum_{\nu > y}(\xi\nu)^{-N} = O\int_{y}^{\infty}(\xi u)^{-N}\,du + O\{(\xi y)^{-N}\} = O(1). \tag{28}$$

Setzt man nunmehr (23), (24) in (22) ein und beachtet (25) bis (28), so folgt bei passenden $\delta = \mathfrak{k}$, $h = \mathfrak{k}$, $N = \mathfrak{k}$

$$\frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} e^{-n}u^{n}\mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du$$

$$= -\mathfrak{k}\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n^{\frac{\varkappa-1}{4}}\sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left(\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}n^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho_{1}+1}{4}\pi\right) + R_{n},$$

wobei der Rest

$$R_{n} = O(n^{-N}) + O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}+\frac{\varkappa-1}{4}\delta+h}\log^{m-1}n\right) + \xi^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}}O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}}\log^{m}n\right)$$

$$+ O\left(n^{\frac{\varkappa-3}{4}+\frac{\varkappa-3}{4}\delta}\log^{m-1}n\right) + O(1) = O\left(n^{\frac{\varkappa-2}{4}}\right).$$

Zusammenfassend haben wir also

$$\frac{1}{n!}\int_{0}^{\infty} e^{-u}u^{n}\mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du \tag{29}$$

$$= -\mathfrak{k}\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n^{\frac{\varkappa-1}{4}}\sum_{\nu=1}^{\varkappa}{}'F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left(\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}n^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho_{1}+1}{4}\pi\right)$$

$$+ O\left(n^{\frac{\varkappa-2}{4}}\right),$$

womit die gewünschte Abschätzung gewonnen ist.

---

[19]) Für $\varkappa = 2$ ist $\nu^{-\frac{\varkappa+3}{2\varkappa}} \leqq \nu^{-1}$ zu beachten.

§ 4.

Beweis des Hauptsatzes.

1. Wir nehmen an, daß für ein geeignetes $K_1 > 0$ und alle großen x die Ungleichung

$$\pm P(x) < K_1 (x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1} \tag{30}$$

erfüllt ist, wobei das obere Zeichen links dem Falle 1 und das untere dem Falle 2 des Hauptsatzes entspricht (diese Festsetzung sei auch in der Folge beibehalten).

Unser Ziel lautet dann:

$$K_1 > \mathfrak{k}. \tag{31}$$

Es sei

$$\xi = \xi(n) = \frac{K_2}{\log n}, \tag{32}$$

wobei über $K_2 = \mathfrak{k} \geqq 12$ noch geeignet verfügt wird. Alle folgenden Ungleichungen in n brauchen nur dann erfüllt zu sein, wenn n oberhalb einer geeigneten, von $\mathfrak{R}$, m, K_1 und K_2 abhängigen Schranke liegt.

Für $n \to \infty$ gilt

$$I_n = \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^n \left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) \left(\log\left|\log\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)\right|\right)^{m-1} du$$

$$\sim \mathfrak{k} \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n^{\frac{\varkappa-1}{4}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1},$$

wie man sofort nachweisen kann. Zu diesem Zwecke schreiben wir in dem fraglichen Integral nu für u und setzen es in die Form

$$\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \frac{n^{n+\frac{\varkappa-1}{4}+1} e^{-n}}{n!} \int_0^\infty (e^{1-u} u)^n u^{\frac{\varkappa-1}{4}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \left(\xi n^{\frac{\varkappa}{2}} u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) \cdot \left(\log\left|\log\left(\xi n^{\frac{\varkappa}{2}} u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)\right|\right)^{m-1} du$$

Dieser Ausdruck wird dann offensichtlich

$$\sim \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \left(\xi n^{\frac{\varkappa}{2}}\right) \left(\log\log\left(\xi n^{\frac{\varkappa}{2}}\right)\right)^{m-1} \frac{n^{n+\frac{\varkappa-1}{4}+1} e^{-n}}{n!} \int_0^\infty (e^{1-u} u)^n u^{\frac{\varkappa-1}{4}} du$$

$$\sim \mathfrak{k} \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1} \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^{n+\frac{\varkappa-1}{4}} du.$$

Aus (30) folgt nun

$$\pm \frac{1}{n!} \int_0^\infty e^{-u} u^n P\left(\xi u^{\frac{2}{\varkappa}}\right) du < O(1) + K_1 I_n$$

$$\sim \mathfrak{k} K_1 \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n^{\frac{\varkappa-1}{4}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1}.$$

Ein Vergleich mit (29) ergibt also

$$(33)\quad \mp \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left(\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} n^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$
$$< \mathfrak{k} K_1 \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1}.$$

2. Wir wollen weiter zeigen, daß (33) auch für stetig wachsendes n gilt. Hierzu genügt es nachzuweisen, daß die (gliedweise vornehmbare) Ableitung der linken Seite nach n

$$= o(\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1})$$

wird. Diese Ableitung ist gleich

$$(34)\quad \left[O\left(\xi^{\frac{2}{\varkappa}-1}|\xi'(n)|\right) + O\left(\xi^{\frac{1}{\varkappa}-1}|\xi'(n)| n^{\frac{1}{2}}\right) + O\left(\xi^{\frac{1}{\varkappa}} n^{-\frac{1}{2}}\right)\right] \cdot$$
$$\cdot \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}}.$$

Wegen

$$\xi'(n) = O\left(\frac{1}{n\log^2 n}\right)$$

ist der Ausdruck in der eckigen Klammer von (34) gleich $O(\xi^2 n^{-\frac{1}{2}})$, während die daneben stehende Summe

$$= O\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = O\int_0^{\infty} u \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du = O(\xi^{-2}).$$

Zusammenfassend wird also der Ausdruck (34) gleich $O(n^{-\frac{1}{2}})$, womit die Gültigkeit von (33) für kontinuierlich wachsendes n gezeigt ist.

3. Wir wenden jetzt, ausgehend von (33), den folgenden *Dirichletschen Approximationssatz* an:

„Es seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ reell, $q > 0$ ganzzahlig, $\mu > 0$. Dann gibt es im Intervall

$$\mu \leqq v \leqq q^l \mu$$

ein v, so daß mit gewissen ganzzahligen y_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, l$

$$|v\beta_\nu - y_\nu| < \frac{1}{q}$$

ist."

Bei der Anwendung dieses Satzes setzen wir

$$q = 16;\ \mu = \text{ganze Zahl};\ l = \mu;\ \beta_\nu = \frac{\mathfrak{k}}{2\pi}\nu^{\frac{1}{\varkappa}},$$

wo $\mathfrak{k}$ dieselbe Bedeutung wie in den cos-Ausdrücken von (33) besitzt. Es ist dann, mit einem geeigneten θ, $|\theta| < 1$,

$$(35)\quad \mp\cos\left(\mathfrak{k} v\nu^{\frac{1}{\varkappa}}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)=\mp\cos\left(\frac{2\pi\theta}{16}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)>\cos\frac{3\pi}{8}>\frac{1}{4}\quad{}^{20})$$

$$(\nu=1,2,\ldots,\mu),$$

wobei v im Intervall

$$(36)\qquad \mu\leqq v\leqq 16^{\mu}\mu$$

gelegen ist.

Wir setzen

$$(37)\qquad v=v(n)=\xi^{\frac{1}{\varkappa}}n^{\frac{1}{2}}$$

und verabreden, daß alle folgenden Beziehungen nur dann zu gelten brauchen, wenn μ oberhalb einer geeigneten, von $\mathfrak{R}$, m, K_1 und K_2 abhängigen Schranke liegt. Wir dürfen dann annehmen, daß v eine monotone mit n wachsende Funktion ist, so daß den eben ermittelten Werten v die (36) erfüllen, jedesmal ein wohlbestimmtes n entspricht. Man sieht sofort, daß die entsprechenden n-Werte mit μ über alle Grenzen wachsen.

Aus (32), (36) und (37) folgt für $\mu\to\infty$

$$\mu\log 16\sim\mu\log 16+\log\mu\geqq\frac{1}{2}\log n+\frac{1}{\varkappa}\log\xi\sim\frac{1}{2}\log n=\frac{K_2}{2\xi},$$

d. h.

$$\liminf_{\mu\to\infty}\mu\xi\geqq\frac{K_2}{2\log 16}>\frac{K_2}{6}.$$

Wir dürfen also

$$(38)\qquad \mu\xi>\frac{K_2}{6}\geqq 2$$

annehmen.

Aus (33) und (35) schließen wir, daß für geeignete beliebig große Werte von n die Ungleichung

$$(39)\quad \sum_{\nu=1}^{\mu}F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}-4\sum_{\nu=\mu+1}^{\infty}F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}$$

$$<\mathfrak{k}K_1\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n(\log\log n)^{m-1}$$

gilt, wobei μ der Ungleichung (38) genügt.

4. Wir wollen jetzt die linke Seite von (39) nach unten abschätzen. Diese wird, wegen (38), nicht vergrößert, wenn wir μ durch

$$\left[\frac{K_2}{6\xi}\right]=\left[\frac{\log n}{6}\right]$$

ersetzen; der Einfachheit halber habe μ hinfort diese Bedeutung.

---

[20]) Für den Fall $\varrho_1\equiv 1$ oder 5 (mod 8) liefert der Dirichletsche Satz keine analoge Ungleichung, weil dann $\cos\frac{\varrho_1+1}{4}\pi=0$ ist.

Wir führen weiter für $u > 0$ die beiden Funktionen

$$\sum_{\nu \leqq u} F(\nu)\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} = f(u), \quad \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = \chi(u)$$

ein. Dann wird nach Hilfssatz 4 für $u \to \infty$

$$f(u) \sim \mathfrak{k} u^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1} u,$$

d. h. $(f(0) = 0)$

$$\sum_{\nu=1}^{\mu} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} = \sum_{\nu=1}^{\mu} (f(\nu) - f(\nu-1))\chi(\nu)$$

$$\geqq \sum_{\nu=1}^{\mu} f(\nu)(\chi(\nu) - \chi(\nu+1)) = -\int_{1}^{\mu+1} f(u)\chi'(u)\,du \geqq -\int_{\frac{1}{\xi}}^{\mu} f(u)\chi'(u)\,du$$

$$\geqq \mathfrak{k}\int_{\frac{1}{\xi}}^{\mu} u^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \xi^{\frac{2}{\varkappa}} u^{\frac{2}{\varkappa}-1}\,du$$

$$= \mathfrak{k}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi} \int_{1}^{\mu\xi} u^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \exp\left\{-\mathfrak{k}u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du$$

$$\geqq \mathfrak{k}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi}$$

$$(40) \quad \geqq \mathfrak{k}K_2^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1}.$$

Auf analoge Weise schätzen wir die zweite Summe links in (39) nach oben ab. Hier ist

$$\sum_{\nu=\mu+1}^{x} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} = \sum_{\nu=\mu+1}^{x} (f(\nu) - f(\nu-1))\chi(\nu)$$

$$\leqq \sum_{\nu=\mu+1}^{\infty} f(\nu)(\chi(\nu) - \chi(\nu+1)) \leqq -\int_{\mu}^{x} f(u)\chi'(u)\,du$$

$$(41) \quad \leqq \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}} \int_{\mu}^{x} u^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \log^{m-1} u \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du = \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}} \int_{\mu}^{\mu^2} + \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}} \int_{\mu^2}^{x};$$

das erste Glied der letzten Summe wird nun

$$\leqq \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}} \log^{m-1}\mu \int_{\mu}^{\infty} u^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du$$

$$= \mathfrak{k}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\mu \int_{\mu\xi}^{\infty} u^{-\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \exp\left\{-\mathfrak{k}u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} du$$

$$\leqq \mathfrak{k}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\mu \exp\left\{-\mathfrak{k}(\mu\xi)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}$$

$$\leqq \mathfrak{k}K_2^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \exp\left\{-\mathfrak{k}K_2^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n (\log\log n)^{m-1}, \tag{42}$$

während das zweite ist

$$\leqq \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}-1} \int_{\mu^2}^{\infty} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} d\xi u$$

$$\leqq \mathfrak{k}\xi^{\frac{2}{\varkappa}-1} \exp\left\{-\mathfrak{k}(\xi\mu^2)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} = O\left(\log n \exp\left\{-\mathfrak{k}\log^{\frac{2}{\varkappa}} n\right\}\right)$$

$$= o(1). \tag{43}$$

Aus (39) bis (43) folgt

$$\mathfrak{k}K_2^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} - \mathfrak{k}K_2^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \exp\left\{-\mathfrak{k}K_2^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} < \mathfrak{k}K_1.$$

Hierin fällt die linke Seite $> \mathfrak{k}$ aus, sobald geeignet $K_2 = \mathfrak{k}$ gesetzt wird. Damit ist (31) bewiesen.

Berlin und Wiesbaden, März 1926.

(Eingegangen am 2. März 1926.)

Über konforme Verallgemeinerungen der Bertrandschen Kurven.

Von

T. Takasu in Sendai, Japan.

Neuerdings habe ich, indem ich ein System von mit einer Kugelschar konforminvariant verbundenen Kugeln als bewegliche nichteuklidische Absoluten betrachtet habe, die Frenetschen und die dualistischen Frenetschen Formeln konform verallgemeinert[1]). Nun möchte ich die sogenannten Bertrandschen Kurven auf zwei Weisen konform verallgemeinern. Die entsprechende Theorie für die Laguerresche Geometrie kann analog behandelt werden.

Im folgenden wollen wir die Abkürzung „K-" an Stelle von „konform" benutzen.

§ 1.

K-verallgemeinerte Frenetsche Formeln.

1. Das erste System von konform-verallgemeinerten Frenetschen Formeln. Sind $\xi = \xi(\sigma)$, $(\xi\xi = 1, d\sigma^2 = d\xi\, d\xi)$ [2]) die pentasphärischen Koordinaten des Elementes einer allgemeinen Kugelschar im konformen Raume und $u(s)$ $(uu = 0,\ ds^2 = du\, du)$ die von einem von den beiden Rückkehrkanten davon, so sind die genannten Formeln[3]) wie folgt gegeben:

[1]) T. Takasu, Über kugelgeometrische Verallgemeinerungen der N. E. Differentialgeometrie, I. The Science Reports of the Tôhoku Imperial Univ. (1926). Diese Theorie ist als eine Ergänzung zur Thomsenschen anzusehen. Vgl. G. Thomsen, Über konforme Geometrie, II, Abhandl. aus dem math. Sem. d. Hamburgischen Univ. **4** (1925), S. 117.

[2]) $\xi\xi$ = die Summe von den Quadraten von den Komponenten usw.

[3]) Takasu, ebenda.

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{du}{ds}=t, \\ \dfrac{dt}{ds}=\dfrac{z}{R}-\mu^2 u+\mu i X, \\ \dfrac{d\xi}{ds}=\dfrac{z}{T}, \\ \dfrac{dz}{ds}=-\dfrac{\xi}{T}-\dfrac{t}{R}, \\ \dfrac{dX}{ds}=-i\dfrac{d\mu}{ds}u-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{ds}X, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{d\xi}{d\sigma}=z, \\ \dfrac{dz}{d\sigma}=\dfrac{t}{P}-\xi, \\ \dfrac{du}{d\sigma}=\dfrac{t}{\tau}, \\ \dfrac{dt}{d\sigma}=-\dfrac{\mu^2}{\tau}u-\dfrac{1}{t}z+i\dfrac{\mu}{\tau}X, \\ \dfrac{dX}{d\sigma}=-i\dfrac{d\mu}{d\sigma}u-\dfrac{1}{\mu}\dfrac{d\mu}{d\sigma}X, \end{cases}$$

wo

$$(2)\quad \begin{cases} R^{-1}=\left(\dfrac{d^2u}{ds^2}\dfrac{d^2\bar{u}}{ds^2}-\mu^2\right)^{\frac{1}{2}}=-\dfrac{\tau}{P} \\ \quad =\text{K-Krümmung}, \\ T^{-1}=\dfrac{d\sigma}{ds} \\ \quad =\text{K-Torsion}, \end{cases} \qquad \begin{cases} P^{-1}=\left(\dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2}\dfrac{d^2\bar{\xi}}{d\sigma^2}-1\right)^{\frac{1}{2}}=-\dfrac{T}{R}=\cot \\ \quad =\text{K-Dualkrümmung}, \\ \tau^{-1}=\dfrac{ds}{d\sigma} \\ \quad =\text{K-Dualtorsion}, \end{cases}$$

$\mu=$ K-Raumkrümmung,

Kugel $\xi=$ K-Schmiegkugel*,

„ $t=$ K-Normalkugel*,

„ $z=$ K-rektifizierende Kugel*,

$s=$ K-Bogenlänge, $\sigma=$ K-Windungswinkel,

$$(3)\quad \text{Kugel } X=\frac{1}{2i}(\mu u-\bar{\mu}\bar{u})=P_3\left\|\xi\frac{d\xi}{d\sigma}\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\frac{d^3\xi}{d\sigma^3}\right\|$$
$$=\text{K-Absolute* (beweglich)},$$

$$(4)\quad \begin{cases} P_3^2=\left(\left\|\xi\dfrac{d\xi}{d\sigma}\dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2}\dfrac{d^3\xi}{d\sigma^3}\right\|\right)^2\left(\left\|\xi\dfrac{d\xi}{d\sigma}\right\|\right)^2\left(\left\|\xi\dfrac{d\xi}{d\sigma}\dfrac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right\|\right)^{-2}, \\ u\bar{u}=\text{konst.}=2k^2,\ \mu\bar{\mu}=k^{-2}, \\ \mu=k^{-1}e^{iS},\ dS^2=dXdX, \end{cases}$$

$$(5)\quad \text{Kugel } U=\frac{1}{2}(\mu u+\bar{\mu}\bar{u})=|tz\xi X|$$
$$=\text{K-Absolutpolare* von } u,$$

$$(6)\quad dUdU=\mu^2 ds^2+dS^2,$$

Kreis $\xi z=$ K-Tangente*,

„ $zt=$ K-Binormale*,

„ $t\xi=$ K-Hauptnormale*,

„ $tU=$ K-Dualtangente*,

„ $zU=$ K-Dualhauptnormale*,

„ $\xi U=$ K-Dualbinormale*

ind. *Die mit Sternen * bezeichneten Figuren sind mit der Kugelschar conforminvariant verbunden.*

Durch die Adjungierung von der Kugel $X = (0, 0, 0, 0, 1)$ entstehen die *nichteuklidischen Formeln* (dabei geht μ in k^{-1} über) und durch die Adjungierung von dem Punkt $X = (0, 0, 0, 1, i)$ entstehen die *euklidischen* (daher geht μ in 0 über). *Ebenso für die folgenden Schließungssätze.*

2. Das zweite System von konform-verallgemeinerten Frenetschen Formeln. An Stelle vom Grundvektor u kann man auch die Kugel U aufnehmen. Dadurch gehen die Formeln (1) in die folgenden über:

$$7) \quad \begin{cases} \frac{dU}{d\hat{s}} = t + \frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}} X, \\ \frac{dt}{d\hat{s}} = \frac{z}{\mu R} - U, \\ \frac{d\xi}{d\hat{s}} = \frac{z}{\mu T}, \\ \frac{dz}{d\hat{s}} = -\frac{\xi}{\mu T} - \frac{t}{\mu R}, \\ \frac{dX}{d\hat{s}} = -\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}} U, \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{d\xi}{d\sigma} = z, \\ \frac{dz}{d\sigma} = \frac{t}{P} - \xi, \\ \frac{dU}{d\sigma} = \frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\sigma} X + \frac{\mu}{\tau} t, \\ \frac{dt}{d\sigma} = -\frac{\mu}{\tau} U - \frac{z}{P}, \\ \frac{dX}{d\sigma} = -\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\sigma} U. \end{cases}$$

wo

$$d\hat{s} = \mu\, ds.$$

§ 2.

K-Verallgemeinerungen der Bertrandschen Kurven.

3. Im nichteuklidischen Raume sind zwei Kurven $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ Bertrandsche Kurven genannt, wenn $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ die Hauptnormalenfläche, also auch die Dualhauptnormalenfläche (d. h. die absolutpolare Fläche der Hauptnormalenfläche) gemeinschaftlich haben.

Im konformen Raume aber ist die Gemeinschaft von der Hauptnormalenfläche (K-Dualhauptnormalenfläche) von zwei Kugelscharen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ im allgemeinen nicht eine notwendige Folge aus der Gemeinschaft von der K-Dualhauptnormalenfläche (K-Hauptnormalenfläche), da die zwei K-Absoluten X, X^* von $\mathfrak{K}$ bzw. $\mathfrak{K}^*$ im allgemeinen verschieden sind. Also kann man die Bertrandschen Kurven auf zwei Weisen konform verallgemeinern:

I. *durch die Gemeinschaft von K-Hauptnormalenflächen*;

II. *durch die Gemeinschaft von K-Dualhauptnormalenflächen.*

Im folgenden werde ich diese zwei Fälle zueinander parallel entwickeln.

4. Satz 1. *Haben zwei Kugelscharen $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$ gemeinschaftlich*

K-Hauptnormalen, | *K-Dualhauptnormalen,*

so stehen die entsprechenden Kugeln

ξ *und* ξ^* | U *und* U^*

unter konstantem Winkel.

Beweis. Wir wollen den Bezeichnungen von § 1 folgen und c Größen für die Kugelschar $\mathfrak{K}^*$ von den von $\mathfrak{K}$ durch die Sterne * unte scheiden. Wenn also $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{K}^*$

K-Hauptnormale | K-Dualhauptnormale

gemeinschaftlich besitzen, so können wir etwa

(8) $\xi^* = t\sin\lambda + \xi\cos\lambda$, | $U^* = z\sin l + U\cos l$,

(9) $t^* = t\cos\lambda - \xi\sin\lambda$, | $z^* = z\cos l - U\sin l$

setzen. Indem wir (8) differenzieren und aus (1) und (9) einsetzen, e halten wir

(10) $z^* = \frac{d\xi^*}{d\sigma^*}$

$= \left[\sin\lambda\left(-\frac{z}{P} - \frac{\mu}{\tau}u + i\frac{\mu}{\tau}X\right)\right.$

$\left. + z\cos\lambda + (t\cos\lambda - \xi\sin\lambda)\frac{d\lambda}{d\sigma}\right]\frac{d\sigma}{d\sigma^*}$,

| $t^* + \frac{i}{\mu^*}\frac{d\mu^*}{d\hat{s}^*}X^* = \frac{dU^*}{d\hat{s}^*}$

$= \left[\sin l\left(-\frac{t}{R} - \frac{\xi}{T}\right)\right.$

$\left. + \cos l\left(t + \frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}X\right)\right.$

$\left. + (z\cos l - U\sin l)\frac{dl}{d\hat{s}}\right]\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*}$

woraus folgt, daß

(11) $0 = (\xi z^*) = \frac{d}{d\sigma^*}\cos\lambda$, | $0 = \frac{i}{\mu^*}\frac{d\mu^*}{d\hat{s}^*}(UX^*) + (Ut^*)$

$= \frac{d}{d\hat{s}^*}\cos l$,

d. h.

(12) $\lambda =$ konst., | $l =$ konst.,

w. z. b.

5. Satz 2. *Wenn die*

K-Hauptnormalen, | *K-Dualhauptnormalen*

einer Kugelschar $\mathfrak{K}$ zugleich die

K-Hauptnormalen | *K-Dualhauptnormalen*

einer zweiten Kugelschar $\mathfrak{K}^*$ sind, so muß zwischen der

K-Dualkrümmung P^{-1}, | *K-Krümmung R^{-1},*

der K-Dualtorsion τ^{-1} und | *der K-Torsion T^{-1} und*

...er K-Raumkrümmung μ der ersten $(\mathfrak{K})$ die folgende Relation bestehen:

13) $$c_1\left(\cos\lambda - \frac{1}{P}\sin\lambda\right) - \frac{1}{2}\sin\lambda\left(\mu^2 c_2 + \frac{c_3}{k^2}\right)\frac{1}{\tau} = 0,$$

$$k_1\left(\cos l - \frac{1}{\mu R}\sin l\right) - \sin l\,\frac{k_2}{T} + \cos l\,\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}\,C = 0,$$

...o

λ, c_1, c_2, c_3 und k | *l, k_1, k_2 und C*

...ewisse Konstanten sind.

Beweis. (10) wird

14) $$z^* = \left[z\cos\lambda - \sin\lambda\left(\frac{z}{P} + \frac{\mu^2}{\tau}u - \frac{i\mu}{\tau}X\right)\right]\frac{d\sigma}{d\sigma^*}.$$

$$t^* = \left[\left(t + \frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}X\right)\cos l - \sin l \times \left(\frac{t}{\mu R} + \frac{\xi}{\mu T}\right)\right]\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*}.$$

15) $$zz^* = [\cos\lambda - P^{-1}\sin\lambda]\frac{d\sigma}{d\sigma^*} + 0$$

$$tt^* = [\cos l - (\mu R)^{1-}\cdot\sin l]\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*} + 0$$

im allgemeinen

16) $$0 = u^*z^* = \left[(u^*z)\left(\cos\lambda - \frac{1}{P}\sin\lambda\right) - \frac{\mu^2}{\tau}\sin\lambda\,(u^*u) + \frac{i\mu}{\tau}\sin\lambda\,(u^*X)\right]\frac{d\sigma}{d\sigma^*},$$

$$\frac{d}{d\sigma}(u^*z) = \frac{ds^*}{d\sigma}(t^*z) + \left(u^*, \frac{t}{P} - \xi\right),$$

$$t^*z = 0, \quad u^*t = 0, \quad u^*\xi = 0,$$

$$0 = \xi^*t^* = \left[(\xi^*t)\left(\cos l - \frac{1}{\mu R}\sin l\right) - \frac{1}{\mu T}\sin l\,(\xi^*\xi) + \frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}\cos l\,(\xi^*X)\right]\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*},$$

$$\frac{d}{d\hat{s}}(\xi^*t) = (z^*t)\frac{d\sigma^*}{d\hat{s}} + \left(\xi^*, \frac{z}{\mu R} - U\right),$$

$$z^*t = 0, \quad \xi^*z = 0, \quad \xi^*U = 0,$$

17) $$u^*z = \text{konst.} = c_1.$$

$$\frac{d}{ds}(uu^*) = (tu^*) + (ut^*)\frac{ds^*}{ds} = 0.$$

$$\xi^*t = \text{konst.} = k_1.$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\xi\xi^*) = (z\xi^*) + (\xi t^*)\frac{d\sigma^*}{d\sigma} = 0.$$

18) $$uu^* = \text{konst.} = c_2.$$

$$\frac{d}{ds}(u^*\bar{u}) = \frac{ds^*}{ds}(t^*\bar{u}) + \frac{d\bar{s}}{ds}(u^*t) = 0,$$

$$\xi\xi^* = \text{konst.} = k_2.$$

$$\frac{d}{d\sigma}(\xi^*X) = \frac{d\sigma^*}{d\sigma}(z^*X) + \left(\xi^*, -\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\sigma}U\right) = 0,$$

19) $$u^*\bar{u} = \text{konst.} = c_3.$$

20) $$u^*X = \frac{1}{2i\mu}\left(\mu^2 c_2 - \frac{c_3}{k^2}\right).$$

$$\xi^*X = \text{konst.} = C.$$

16) geht also in (13) über.

Satz 3. *Die Beziehung* (13) *kann auch durch die folgende ersetzt werden:*

(21) $c_1\left(\frac{1}{T}\cos\lambda+\frac{1}{R}\sin\lambda\right)$
$-\frac{1}{2}\sin\lambda\left(\mu^2 c_2+\frac{c_3}{k^2}\right)=0.$

$k_1\left(\frac{1}{\tau}\cos l+\frac{1}{P}\sin l\right)$
$-\sin l\cdot k_2+\cos l\,\frac{i}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}C\frac{1}{\tau}=0.$

In der Tat gelten

$P^{-1}=-TR^{-1},\quad \tau^{-1}=T.$ | $R^{-1}=-\tau P^{-1},\quad T^{-1}=\tau.$

NB. *Die Beziehungen* (17), (18), (19) *und* (20) *sind auch merkwürdig*

6. Satz 4. *Besteht zwischen der*

K-Krümmung (R^{-1}) *und K-Torsion* (T^{-1}) | *K-Dualkrümmung* (P^{-1}) *und K-Dualtorsion* (τ^{-1})

einer Kugelschar $\mathfrak{K}$ *eine Relation von der Gestalt*

(22) $\frac{A}{T}+\frac{B}{R}+(C\mu^2+D)=0,$ | $\frac{\alpha}{\tau}+\frac{\beta}{P}+\gamma+\frac{\delta}{\mu}\frac{d\mu}{d\hat{s}}\frac{1}{\tau}=0,$

wo

A, B, C, D | $\alpha, \beta, \gamma, \delta$

Konstante sind, so gibt es eine zweite Kugelschar $\mathfrak{K}^*$, *die mit* $\mathfrak{K}$ *die*

K-Hauptnormalen | *K-Dualhauptnormalen*

gemeinschaftlich hat und zu $\mathfrak{K}$ *in der folgenden Beziehung steht:*

$\tan(\xi\xi^*)=\tan\lambda=B:A,$
$u^*z:-\frac{1}{2}(uu^*):-\frac{1}{2k^2}(u^*\bar{u})$
$=B:C:D.$

$\tan(UU^*)=\tan l=\beta:\alpha,$
$\xi^*t:-\xi\xi^*:i\cot l\cdot(\xi^*X)$
$=\beta:\gamma:\delta.$

7. Satz 5. *Das Produkt der Torsionen (also auch der Dualtorsionen) zweier Kugelscharen von gemeinsamer Fläche der*

K-Hauptnormalen in den K-Schmiegkugeln ξ *derselben K-Hauptnormalen* | *K-Dualhauptnormalen in den K-Polarschmiegkugel* U *derselben K-Dualhauptnormalen*

hat für den Verlauf der Kugelscharen den folgenden Wert:

(23) $(TT^*)^{-1}=-\frac{1}{c_1 c_1^*}\sin^2\lambda=\tau\tau^*.$ | $(\tau\tau^*)^{-1}=-\frac{1}{k_1 k_1^*\mu\mu^*}\sin^2 l=TT^*$

Beweis. Aus (14) folgt:

$uz^*=\left[\left(\cos\lambda-\frac{1}{P}\sin\lambda\right)(uz)\right.$
$\left.+\frac{\mu i}{\tau}\sin\lambda(uX)\right]\frac{d\sigma}{d\sigma^*},$

$\xi t^*=-\frac{1}{\mu T}\sin l\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*},$

d. h.

(24) $-\frac{1}{\tau}\sin\lambda\frac{d\sigma}{d\sigma^*}=uz^*=\text{konst.},$
$=c_1^*$

$-\frac{1}{\mu T}\sin l\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*}=\text{konst.},$
$=k_1^*$

anz wie (17). Ebenso erhalten wir

5) $\frac{1}{\tau^*}\sin\lambda\frac{d\sigma^*}{d\sigma}=c_1.$ | $\frac{1}{\mu^* T^*}\sin l\frac{d\hat{s}^*}{d\hat{s}}=k_1.$

us (24) und (25) folgt (23).

8. Satz 6. *Die entsprechenden*

-rektifizierenden | *K-normalen*

benen stehen unter konstantem Winkel.

Beweis.

$\frac{d}{d\sigma^*}(zz^*)=\frac{d\sigma}{d\sigma^*}\left(z^*,\frac{t}{P}-\xi\right)$ | $\frac{d}{d\hat{s}^*}(tt^*)=\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*}\left(t^*,\frac{z}{\mu R}-U\right)$

$+\left(z,\frac{t^*}{P^*}-\xi^*\right)=0,$ | $+\left(t,\frac{z^*}{\mu^* R^*}-U\right)=0,$

daß

6) $zz^*=\text{konst.}=\cos l.$ | $tt^*=\text{konst.}=\cos\lambda.$

9. Satz 7. *Die entsprechenden*

-Axialkugeln[4]) (η,η^*) *der K-Dual-* | *K-Absolutpolaren* (ζ,ζ^*) *der K-Krüm-*

krümmungen und die entsprechen- | *mungszentren und die entsprechen-*

den K-Schmiegkugeln (ξ,ξ^*) | *den K-Absolutpolaren* (U,U^*) *von* (u,u^*)

on $\mathfrak{K}$ *und* $\mathfrak{K}^*$ *bilden ein konstantes Doppelverhältnis*:

$\cos^2 l.$ | $\cos^2\lambda.$

Beweis. Aus (14) haben wir

26) $zz^*=\cos l$ | $tt^*=\cos\lambda$

$=(\cos\lambda-P^{-1}\sin\lambda)\frac{d\sigma}{d\sigma^*}.$ | $=\left(\cos l-\frac{1}{\mu R}\sin l\right)\frac{d\hat{s}}{d\hat{s}^*}.$

benso

27) $z^*z=\cos l$ | $t^*t=\cos\lambda$

$=(\cos\lambda+P^{*-1}\sin\lambda)\frac{d\sigma^*}{d\sigma},$ | $=\left(\cos l+\frac{1}{\mu^* R^*}\sin l\right)\frac{d\hat{s}^*}{d\hat{s}},$

daß

28) $\cos^2 l=(\cos\lambda-P^{-1}\sin\lambda)$ | $\cos^2\lambda=\left(\cos l-\frac{1}{\mu R}\sin l\right)$

$\times(\cos\lambda+P^{*-1}\sin\lambda).$ | $\times\left(\cos l+\frac{1}{\mu^* R^*}\sin l\right).$

29) $\eta=\xi\cos\varrho+t\sin\varrho,$ | $\zeta=U\cos r+z\sin r.$

30) $\eta^*=\xi^*\cos\varrho^*+t^*\sin\varrho^*.$ | $\zeta^*=U^*\cos r^*+z^*\sin r^*.$

[4]) In der Bewegungsgeometrie entspricht dieser die Ebene der ganzen Krümmung nach Salkowski), d. h. „the axial plane of angu'ar curvature“ (das dualistische egenstück vom Krümmungszentrum) (nach Takasu).

Nach (8) und (9) wird (30):

(31) $\eta^* = (\cos\varrho^* \sin\lambda + \sin\varrho^* \cos\lambda)\, t + (\cos\varrho^* \cos\lambda - \sin\varrho^* \sin\lambda)\, \xi.$ | $\zeta^* = (\cos r^* \sin l + \sin r^* \cos l)\, z + (\cos r^* \cos l - \sin r^* \sin l)\, U$

Also nach (28) gilt:

(32) D.V. $(\eta\eta^*, \xi\xi^*) = \cos^2\lambda(1 - \tan\lambda \cot\varrho) \times (1 + \tan\lambda \cot\varrho^*) = \cos^2 l.$ | D.V. $(\zeta\zeta^*, UU^*) = \cos^2 l(1 - \tan l \cot r) \times (1 + \tan l \cot r^*) = \cos^2\lambda.$

10. Satz 8. *Für die Kugelschar* $\mathfrak{K}^*$ *gelten:*

(33) $c_1^*\left(\cos\lambda + \frac{1}{P^*}\sin\lambda\right) + \frac{1}{2}\sin\lambda\left(\mu^{*2} c_2^* + \frac{c_3^*}{k^2}\right)\frac{1}{\tau^*} = 0.$ | $k_1^*\left(\cos l + \frac{1}{\mu^* R^*}\sin l\right) + \sin l \frac{k_3^{**}}{\mu^* T} + \cos l \frac{i}{\mu^*}\frac{d\mu^*}{d\hat{s}^*} C^* = 0.$

(34) $c_1^*\left(\frac{1}{T^*}\cos\lambda - \frac{1}{R^*}\sin\lambda\right) + \frac{1}{2}\sin\lambda\left(\mu^{*2} c_2^* + \frac{c_3^*}{k^2}\right) = 0.$ | $k_1^*\left(\frac{1}{\tau^*}\cos l - \frac{1}{P^*}\sin l\right) + k_3^* \sin l + \cos l \frac{i}{\mu^*}\frac{d\mu^*}{d\hat{s}^*}\frac{C^*}{\tau^*} = 0.$

NB. *Die Beziehungen* (13), (23) *und* (33) *ermöglichen uns*

P^* *und* R^* | R^* *und* P^*

mittels

P, μ, μ^* *bzw.* R, μ, μ^* | R, μ, μ^* *bzw.* P, μ, μ^*

allein darzustellen.

Hamburg, 15. Dezember 1926.

(Eingegangen am 8. März 1926.)

Beweis für die Invarianz des ebenen Gebiets.

Von

Artur Winternitz in Prag.

Der erste Beweis für den Satz, daß das umkehrbar eindeutige und tetige Abbild eines ebenen Gebiets in der Ebene wiederum ein Gebiet st, stammt von Jürgens (1879). Dieser ging darauf aus, den durch 'antors mengentheoretische Publikationen ins Schwanken gekommenen)imensionsbegriff zu retten. Er zeigte, daß aus der ebenen Gebiets- nvarianz leicht die Unmöglichkeit der eineindeutig-stetigen Abbildung ines dreidimensionalen Würfels in der Ebene gefolgert werden kann Spezialfall der Invarianz der Dimensionenzahl). Neue Zusammenhänge röffneten sich nach Jordans Beweis des nach ihm benannten Kurven- atzes (1887). Die Literatur ist in Rosenthals Enzyklopädieartikel[1]) usammengestellt.

Einen besonde. 3 einfachen Beweis für den erwähnten Spezialfall des atzes von der Invarianz der Dimensionenzahl veröffentlichte ich 1918 n meiner Arbeit über den Jordanschen Kurvensatz[2]). Er beruht auf em unten wiedergegebenen, in jener Arbeit bewiesenen, *topologischen chnittpunktssatz*. Es fragte sich nun, ob auch die Invarianz des ebenen ebiets auf einfache Weise mit demselben Hilfsmittel bewiesen werden ann, eine Frage, die mir namentlich von Herrn Köbe nahegelegt wurde. ies ist mir nun gelungen. Die Absicht ist dabei, zunächst nur größere infachheit und Durchsichtigkeit gegenüber den bisherigen Beweisen zu rzielen, ohne auf die Brouwer-Weylsche Kontinuumkritik Rücksicht

[1]) Enzykl. d. math. Wiss. II. C 9a, S. 954. Vgl. auch v. Kerékjártós Buch: orlesungen über Topologie I (Berlin: Julius Springer 1923). Siehe auch Jürgens, eutsche Math. Ver. Bd. 7, S. 50—55.

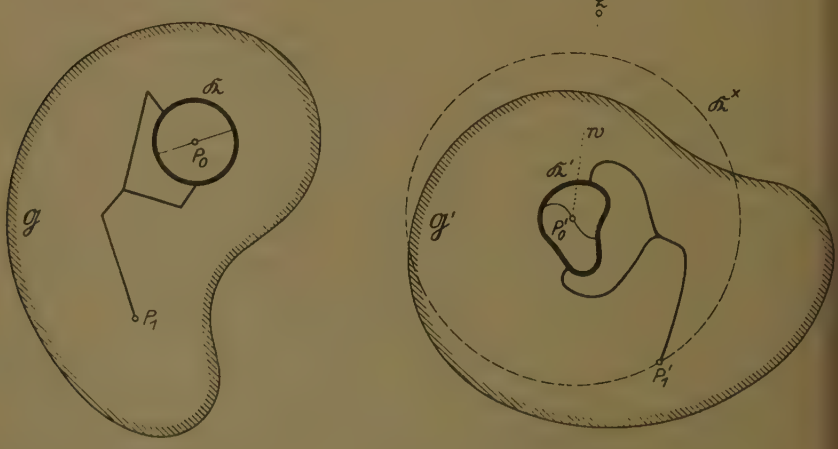
[2]) „Über den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs", lath. Zeitschr. 1, S. 329—346 (Juni 1918). Der topologische Schnittpunktssatz tritt IV 3 auf.

zu nehmen. Doch gehe ich hierauf und auf die Forderungen, welche
Anwendung auf die Wirklichkeit stellt, in anderem Zusammenhange e

Vorbemerkungen. Schauplatz der folgenden Betrachtungen
durchwegs die *Ebene*. Ich unterscheide zwischen „*Weg*“ und „*Jordan*
bogen“. Ersterer ist nur stetiges, letzterer auch eineindeutiges Abbild
Strecke. „*Jordankurve*“ heißt jedes eineindeutige und stetige Abbild
Kreislinie. Unter einem „*Steg*“ an eine solche, $\mathfrak{J}$, verstehe ich einen W
der zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{J}$ verbindet, sonst aber keinen Pun
mit $\mathfrak{J}$ gemein hat. Zwei Punktmengen ohne gemeinsamen Punkt heiß
„*fremd*“. Eine Punktmenge die nur aus „*inneren*“ Punkten besteht, hei
„*offen*“ (nach Carathéodory), ist sie überdies zusammenhängend, so nen
ich sie ein „*Gebiet*“. Steht fest, daß jeder Verbindungsweg (-kontinuum) d
beiden Punkt P_0 und P_1 die abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{M}$ treffen mu
so sagen wir: $\mathfrak{M}$ „*trennt*“ P_0 und P_1; dabei wird vorausgesetzt, daß
weder P_0 noch P_1 enthält.

Den Jordanschen Kurvensatz setze ich hier (in I und II) nicht vo
aus, statt dessen benutze ich den folgenden Satz, für den ich einen v
jenem unabhängigen Beweis unten mitteile.

Topologischer Schnittpunktssatz. *Lassen sich durch zwei nic*
auf der Jordankurve $\mathfrak{J}$ *gelegene Punkte* P_0 *und* P_1 *zwei fremde Steg*
an $\mathfrak{J}$ *derart legen, daß die Endpunkte des einen und die des ande*
Paare auf ihr bilden, die sich gegenseitig trennen: so trennt $\mathfrak{J}$ P_0 *und* P
Die Anordnung der Punkte auf $\mathfrak{J}$ wird dabei nach der Lage der Origina
punkte auf dem Kreise, dessen Abbild sie ist, beurteilt.



I. Eine umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung führe das eben
Gebiet $\mathfrak{G}$ in die ebene Punktmenge $\mathfrak{G}'$ über. Wir zeigen zunächst: *Da*

Bild $\mathfrak{K}'$ eines hinreichend kleinen Kreises $\mathfrak{K}$ um den Gebietspunkt P_0 trennt den Bildpunkt P_0' vom Unendlichen. Oder: ein Weg w (etwa eine Strecke) von P_0' nach einem anderen Punkt Q wird von $\mathfrak{K}'$ geschnitten. Sei P_1 ein von P_0 verschiedener Punkt des Gebiets $\mathfrak{G}$, dann hat sein Bildpunkt P_1' einen positiven Abstand ϱ von P_0'. Wir wollen P_1 so nahe bei P_0 annehmen, daß $\varrho < P_0'Q$ ausfällt. Gleichfalls wegen der Stetigkeit der Abbildung kann man nun in $\mathfrak{G}$ einen P_1 ausschließenden Kreis $\mathfrak{K}$ um P_0 so annehmen, daß sein Bild $\mathfrak{K}'$ ganz ins Innere des Kreises $\mathfrak{K}^*$ vom Radius ϱ um P_0' als Mittelpunkt fällt. Q liegt außerhalb $\mathfrak{K}^*$. Die Peripherie dieses Kreises verbindet P_1' mit w.

Jetzt können wir durch P_0 und P_1 zwei fremde Stege an den Kreis $\mathfrak{K}$ innerhalb des Gebiets $\mathfrak{G}$ so legen, daß ihre Endpunkte Paare auf $\mathfrak{K}$ bilden, die sich gegenseitig trennen. Ihre Bilder sind dann zwei fremde Stege an die Jordankurve $\mathfrak{K}'$, auf welche wir unseren *Schnittpunktssatz* anwenden können, da ihre Endpunkte auch getrennte Paare auf $\mathfrak{K}'$ bilden müssen. $\mathfrak{K}'$ trennt also P_0' von P_1'. w und die Peripherie $\mathfrak{K}^*$ zusammen stellen eine Verbindung zwischen P_0' und P_1' her, welche somit mit $\mathfrak{K}'$ zusammenstoßen muß. Die Kreislinie $\mathfrak{K}^*$ ist zu $\mathfrak{K}'$ fremd, also muß w mit $\mathfrak{K}'$ zusammentreffen.

II. Jetzt können wir schon beweisen, daß eine Kreisscheibe um P_0' ganz zu $\mathfrak{G}'$ gehört, und zwar jedenfalls ein Kreis $\bar{\mathfrak{K}}$ mit dem Mittelpunkt P_0', dessen Radius kleiner als der Abstand des Punktes P_0' von $\mathfrak{K}'$ ist. Betrachten wir nämlich irgendeinen abgeschlossenen Radius $P_0'R$ dieses Kreises und suchen auf ihm den (von P_0' aus gezählt) letzten Punkt P_1', welchen er mit dem Abbild der in I. bestimmten abgeschlossenen Kreis*scheibe* $\mathfrak{K}$ gemein hat. Da *nur* Punkte der Kurve $\mathfrak{K}'$ Punkten der Kreis*linie* $\mathfrak{K}$ entsprechen, ist P_1' Bild eines innerhalb $\mathfrak{K}$ gelegenen Punktes P_1. Ich behaupte: P_1' fällt mit R zusammen. Anderenfalls lieferte nämlich nach I. ein hinreichend kleiner, um P_1 gelegter Kreis eine Bildkurve, welche P_1' von R trennte, also die Strecke PR in einem Punkte P' träfe. Sein Original P gehörte zur Scheibe $\mathfrak{K}$; P' läge auf $P_0'R$ hinter P_1', was der Definition von P_1' widerspricht. Es gehört also der ganze Radius $P_0'R$ zu $\mathfrak{G}'$ und dasselbe gilt von jedem anderen Radius des Kreises $\bar{\mathfrak{K}}$. P_0' ist innerer Punkt von $\mathfrak{G}'$. Jeder Punkt von $\mathfrak{G}'$ hat diese Eigenschaft: $\mathfrak{G}'$ ist eine offene Menge. Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist immer zusammenhängend, daher ist $\mathfrak{G}'$ auch zusammenhängend: $\mathfrak{G}'$ ist ein Gebiet.

Wir haben also bewiesen: *Das umkehrbar eindeutige und stetige Abbild eines Gebiets ist stets ein Gebiet.*

III. Ebenso wie mit dem Radius $P_0'R$ des Kreises $\bar{\mathfrak{K}}$ kann man mit jedem abgeschlossenen Weg verfahren, der von P_0' ausgeht und $\mathfrak{K}'$ nicht

erreicht. Alle auf solche Weise von P_0' aus erreichbaren Punkte sin also Bilder von Punkten innerhalb $\mathfrak{K}$. *Nimmt man jetzt noch* jenen Te des *Jordanschen Satzes hinzu,* welcher besagt, daß je zwei durch $\mathfrak{K}'$ vor Unendlichen getrennte Punkte miteinander ohne Begegung von $\mathfrak{K}'$ verbunde werden können[3]), so sieht man, daß das ganze Innere von $\mathfrak{K}'$ zu $\mathfrak{G}$ gehört. In Verbindung mit I. lehrt das: das Innere von $\mathfrak{K}$ und das Inner von $\mathfrak{K}'$ sind eineindeutig aufeinander bezogen. Darüber hinaus gilt noc folgender Satz:

Wirkt die umkehrbar eindeutige und stetige Abbildung auf den ab geschlossenen Bereich $\mathfrak{B}$, der aus der Jordankurve $\mathfrak{J}$ und allen inner halb gelegenen (vom Unendlichen getrennten) *Punkten besteht, und geh dabei $\mathfrak{J}$ in die Jordankurve $\mathfrak{J}'$ über, so entsprechen einander dabei auc die Innengebiete.*

Zunächst ergibt sich nämlich, daß das Abbild des Innengebiets von $\mathfrak{J}$ eine Seite von $\mathfrak{J}'$ ausfüllt. Diese muß dann die innere sein; denn das stetige Abbild des abgeschlossenen und beschränkten Bereichs $\mathfrak{B}$ ist ja jedenfalls wieder beschränkt.

(Eingegangen am 11. Dezember 1925.)

Nachtrag.

Der Beweis für den topologischen Schnittpunktssatz kann durch Zurückführung auf den ausschließlich von Streckenzügen handelnden Spezialfall geführt werden. Dazu bedienen wir uns der folgenden Bemerkung: Führen in einem Gebiet von einem Punkte aus zwei Wege nach zwei fremden abgeschlossenen Punktmengen, so kann man sie zunächst durch eingeschriebene Streckenzüge ersetzen, welche dasselbe leisten. Diese haben einen letzten gemeinsamen Punkt. Man kann dann einen *einfachen*

---

[3]) Mein in Anmerkung [2]) zitierter Beweis für den Jordanschen Satz läßt eine bemerkenswerte Vereinfachung zu, wenn man auf den Satz von Jordanbogen verzichtet. Man kann dann III_4 unmittelbar an III_1 anschließen, indem die Strecke PQ die Rolle des Weges w_B übernimmt. (In IV_4 ein nahe dem gegebenen Teilbogen verlaufender Streckenzug.)

Zu jener Arbeit sei noch bemerkt: In II_1 ist zur Ausscheidung von Fall 4 der zunächst entstehende Zug von Quadraten (durch direkten Übergang) zu vereinfachen, so oft ein Quadrat sich an ein bereits durchlaufenes anlehnt, bis das nicht mehr vorkommt.

In III_1 am Schluß soll es statt Schnittpunktszahlen Durchsetzungszahlen heißen. $\mathfrak{P}$ durchsetzt $\mathfrak{Q}$, so oft $\mathfrak{Q}$ $\mathfrak{P}$ durchsetzt. (Man kann übrigens mittels der Mündungsverlegung (I) einfache Schnittpunkte erzielen.)

Weg bis zu ihm und zwei *einfache* Wege von ihm aus zu den beiden Enden hin herausheben (Vereinfachung der Gabel).

Wir denken uns nun die Jordankurve $\mathfrak{J}$ in vier Teilbogen zerlegt, von denen jeder je einen Stegendpunkt im Inneren enthält. Ein angenommener, $\mathfrak{J}$ nicht treffender Verbindungsweg zwischen P_0 und P_1 hätte einen Abstand $> 2\delta\,(>0)$ von $\mathfrak{J}$, ebenso je zwei nicht benachbarte Teilbogen von $\mathfrak{J}$ und auch die beiden Stege voneinander.

Um die behauptete Zurückführung zu erreichen, ersetzen wir erstens die hypothetische Verbindung der Stege durch einen eingeschriebenen Streckenzug, dessen Seiten $< \delta$ sind. Zweitens suchen wir auf diesem Streckenzug einen Punkt, der von beiden Stegen mindestens um δ entfernt ist, und vereinfachen die beiden Gabeln, welche von ihm aus zu getrennten Teilbogen von $\mathfrak{J}$ führen, innerhalb des Gebiets, welches jedesmal durch die Einhaltung eines Abstands $> \delta$ von den anderen Teilbogen und dem anderen Steg gegeben ist. Drittens vereinfachen wir die vier Gabeln, welche von einem der eben gefundenen Gabelungspunkte beginnend, unter Benutzung je eines Teilbogens zu zwei getrennten Teilbogen von $\mathfrak{J}$ bzw. deren Ersatz führen, unter Wahrung des Abstands $> \delta$ von dem nichtanstoßenden Teilbogen bzw. Steg. Nun sind alle Kurvenbögen durch Streckenzüge ersetzt. Zwischen denjenigen Teilen der Figur, die einander nicht begegnen durften, findet auch nach der Modifikation keine Begegnung statt. Aus der angenommenen Ungültigkeit des allgemeinen Satzes würde also die Ungültigkeit des auf Polygone bezüglichen Spezialfalls folgen. Letzteren kann man aber mit Hilfe von Kapitel I und IV (spezialisiert) meiner in Anmerkung [2]) zitierten Arbeit sofort als gültig erweisen. (II und III sind für diesen Zweck nicht erforderlich.)

(Eingegangen am 10. April 1926.)

Über die Zetafunktion und die Hadamardsche Theori der ganzen Funktionen.

Von

Edmund Landau in Göttingen.

§ 1.

Herr Ananda-Rau[1]) gab den ersten von der Hadamardsche Theorie der ganzen Funktionen freien Beweis des Hadamardschen Satze

$$(1) \qquad (s-1)\zeta(s) = e^{H(s)} \prod_{\varrho} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\frac{s}{\varrho}},$$

wo ϱ alle Wurzeln von $\zeta(s)$ durchläuft und $H(s)$ eine **lineare** Funktion ist.

Wie er einleitend bemerkt, folgt (1) mit **ganzem** $H(s)$ unmittelbar daraus, daß

1. $(s-1)\zeta(s)$ nach Riemann ganz ist;

2. $\zeta(s)$ der Riemannschen Funktionalgleichung genügt (so daß alle nicht negativ-geraden $\varrho = \beta + \gamma i$ dem Streifen $0 \leqq \sigma \leqq 1$ angehören);

3. ich 1913 direkt bewiesen hatte: Die Anzahl der ϱ mit $T \leqq t \leqq T+1$ ist $< c_1 \log T$ für $T \geqq 2$ (so daß $\sum_{\varrho} \frac{1}{|\varrho|^2}$ konvergiert); $c_1, \ldots, c_{19}$ bezeichnen absolute positive Konstanten.

Es handelt sich also nur um den Nachweis, daß die ganze Funktion $H(s)$ linear ist, d. h. daß die ganze Funktion

$$f(s) = \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1} - \sum_{\varrho} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

$$= \frac{\zeta'}{\zeta}(s) + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)\,n} - \sum_{\gamma \gtrless 0} \left(\frac{1}{s-\varrho} + \frac{1}{\varrho}\right)$$

konstant ist.

[1]) *The infinite product for* $(s-1)\zeta(s)$ [Diese Zeitschrift **20** (1924), S. 156–164].

Herr Ananda-Rau beweist dies, allerdings zu kompliziert, durch das Studium des Integrals

$$\int \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{ds}{s(s-x)}.$$

Ich mache es jetzt ganz direkt ohne Integration.

Offenbar genügt es zu zeigen, daß auf dem Rande des Quadrats $-z \leqq \sigma \leqq z$, $-z \leqq t \leqq z$, wo $z \geqq 7$ ungerade ist,

$$|f(s)| < c_2 \log^2 z \tag{2}$$

ist (sogar $o(z)$ rechts würde genügen); denn dann ist nach Cauchy für $n > 0$

$$\left|\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\right| < c_2 \frac{\log^2 z}{z^n},$$

also

$$f^{(n)}(0) = 0.$$

Aus Symmetriegründen braucht (2) nur für die Randpunkte mit $t \geqq 0$ bewiesen zu werden. Hierbei benutze ich den auch von Herrn Ananda-Rau herangezogenen (aus der Funktionalgleichung leicht herleitbaren) Hilfssatz (aus § 83 meines *Handbuchs*):

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s)\right| < c_3 \log|s| \tag{3}$$

für $\sigma = -z$, für $t \geqq 1$, $\sigma \leqq -1$ und für $\sigma \geqq 2$.

Hilfssatz 1[2]). *Für* $-1 \leqq \sigma \leqq 2$, $t \geqq 6$ *ist*

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{|\gamma - t| \leqq 4} \frac{1}{s-\varrho}\right| < c_4 \log t.$$

---

[2]) Dieser Hilfssatz ist alt (vgl. S. 372 des *Handbuchs*), aber jetzt mit geringeren Mitteln zu beweisen. Er führt ohne weiteres zu

$$\lim_{T=\infty} \int_{-1+Ti}^{2+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{ds}{s(s-x)} = 0 \tag{4}$$

bei festem x und wurzelfreiem T, worauf es bei der Ananda-Rauschen Beweisanordnung allein ankommt, da alles andere dort mühelos geht. (Herr Ananda-Rau beweist (4) nur für gewisse, nicht zu rasch ins Unendliche wachsende T-Folgen direkt — was genügt; aber er muß auch hierfür ein unnötiges Lemma (S. 158—161) entwickeln; er hat nämlich nicht beachtet, daß ich seit 1911 bei solchen Integralen den Weg halbkreisförmig deformiere, so daß T ruhig beliebig nahe am nächsten γ liegen kann.)

In der Tat ist nach Hilfssatz 1 für wurzelfrei wachsendes T

$$\int_{-1+Ti}^{2+Ti} \frac{\zeta'}{\zeta}(s)\frac{ds}{s(s-x)} = O\left(\frac{\log T}{T^2}\right) + \sum_{|\gamma - T| \leqq 4} \int_{-1+Ti}^{2+Ti} \frac{1}{s-\varrho}\frac{ds}{s(s-x)},$$

(Fortsetzung der Fußnote [2]) auf der nächsten Seite.)

Beweis. Es sei $T \geqq 6$. Es seien $\varrho_1, \ldots, \varrho_N$ die Wurzeln von $\zeta($(im Rechteck $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $T-4 \leqq t \leqq T+4$, also $0 \leqq N < c_5 \log T$ Dann ist

$$\frac{\zeta(s)}{\prod_{\nu=1}^{N}(s-\varrho_\nu)} = g(s)$$

im Rechteck $-2 \leqq \sigma \leqq 6$, $T-5 \leqq t \leqq T+5$ regulär. Auf seinem Ran ist $|s-\varrho_\nu| \geqq 1$, also

$$|g(s)| \leqq |\zeta(s)| < T^{c_6}.$$

Wird $s_0 = 2+Ti$ gesetzt, so ist daher im Kreise $|s-s_0| \leqq 4$

$$|g(s)| < T^{c_6};$$

ferner ist, wegen $|s_0-\varrho_\nu| \leqq \sqrt{20}$,

$$|g(s_0)| \geqq \frac{|\zeta(s_0)|}{5^N} > T^{-c_7}.$$

Da $g(s)$ für $|s-s_0| \leqq 4$ nicht verschwindet, ist dort

$g(s) = e^{h(s)}$, $h(s)$ regulär, $\Re h(s) < c_6 \log T$, $\Re h(s_0) > -c_7 \log T$

Nach der Carathéodoryschen Ungleichung ist also für $|s-s_0| \leqq 3$ folglich gewiß auf der Strecke $-1+Ti$ bis $2+Ti$,

$$\left|\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{|\gamma-T|\leqq 4}\frac{1}{s-\varrho}\right| = \left|\frac{g'}{g}(s)\right| = |h'(s)| < c_4 \log T.$$

Hilfssatz 2. *Für* $\omega \geqq 7$, $0 \leqq t \leqq \omega$ *ist*

$$\sum_{\frac{\omega}{2}<\gamma<4\omega} \frac{1}{1+|t-\gamma|} < c_8 \log^2 \omega.$$

Beweis. Der Strecke $t \pm n$ bis $t \pm (n+1)$, wo $n \geqq 0$ ganz und $\leqq 4\omega$ ist, gehören höchstens $c_9 \log \omega$ Werte von γ an. Daher ist unsere Summe

$$< 2c_9 \log \omega + 2 \sum_{n=1}^{[4\omega]} \frac{c_9 \log \omega}{n} < c_8 \log^2 \omega.$$

Hilfssatz 3. *Es sei* $z \geqq 7$ *und ungerade. s liege auf dem Streckenzug von* $-z$ *über* $-z+zi$, $z+zi$ *nach* z. *Es durchlaufe* ϱ *alle Wurzeln*

---

und jedes der $O(\log T)$ Integrale rechts ist, gleichmäßig in ϱ, $O\left(\frac{1}{T^2}\right)$, wie sich durch Integrieren über einen der beiden Halbkreise mit der Strecke als Durchmesser wegen $|s-\varrho| \geqq 1$ ergibt.

n $0 \leqq \sigma \leqq 1$; *falls jedoch* s *zwischen* $-1+zi$ *und* $2+zi$ *liegt, ollen die* ϱ *mit* $|\gamma - z| \leqq 4$ *fortgelassen werden. Dann ist*

$$\sum_{\varrho} \left| \frac{1}{(s-\varrho)\varrho} \right| < c_{10} \frac{\log^2 z}{z}.$$

Beweis. Für $\gamma > 0$ ist $|s-\varrho| \leqq |s-\bar{\varrho}|$. Daher genügt es, die ϱ nit $\gamma > 0$ zu betrachten. Wegen $z \leqq |s| < 2z$, $\gamma \leqq |\varrho| < 1+\gamma$ ist

$$\sum_{0<\gamma \leqq \frac{z}{2}} \left| \frac{1}{(s-\varrho)\varrho} \right| \leqq \frac{c_{11}}{z} \sum_{0<\gamma \leqq \frac{z}{2}} \frac{1}{\gamma} < \frac{c_{12}}{z} \sum_{n=2}^{z} \frac{\log n}{n} < c_{13} \frac{\log^2 z}{z},$$

$$\sum_{\gamma \geqq 4z} \left| \frac{1}{(s-\varrho)\varrho} \right| \leqq 2 \sum_{\gamma \geqq 4z} \frac{1}{\gamma^2} < c_{14} \sum_{n=4z}^{\infty} \frac{\log n}{n^2} < c_{15} \frac{\log z}{z};$$

uf der Strecke $-1+zi$ bis $2+zi$ ist $|\gamma - z| > 4$, also

$$|s-\varrho| \geqq |t-\gamma| > \frac{1+|t-\gamma|}{2};$$

onst ist auf unserem Wege $|s-\varrho| \geqq \sqrt{1+(t-\gamma)^2} > \frac{1+|t-\gamma|}{2}$; jeden- alls ist also nach Hilfssatz 2

$$\sum_{\frac{z}{2}<\gamma<4z} \left| \frac{1}{(s-\varrho)\varrho} \right| \leqq \frac{4}{z} \sum_{\frac{z}{2}<\gamma<4z} \frac{1}{1+|t-\gamma|} < 4 c_8 \frac{\log^2 z}{z}.$$

Hilfssatz 4. *Auf unserem Streckenzug ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s+2n|\, n} < c_{16} \frac{\log z}{z}.$$

Beweis.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|s+2n|\, n} \leqq \frac{2}{z} \sum_{0<n \leqq \frac{z}{4}} \frac{1}{n} + \frac{4}{z} \sum_{\frac{z}{4}<n<2z} \frac{1}{|s+2n|} + \sum_{n \geqq 2z} \frac{1}{n^2} < c_{16} \frac{\log z}{z},$$

da oben und rechts $|s+2n| \geqq z$, links $|s+2n| \geqq |-z+2n|$ ist.

Beweis von (2) (also von (1)). Auf der Strecke $-1+zi$ bis $2+zi$ st nach den Hilfssätzen 1, 3 und 4

$$|f(s)| = \left| \left(\frac{\zeta'}{\zeta}(s) - \sum_{|\gamma-t| \leqq 4} \frac{1}{s-\varrho} \right) - \sum_{|\gamma-t| \leqq 4} \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{s-1} + \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(s+2n)\, n} \right.$$

$$\left. - s \sum_{|\gamma-t|>4} \frac{1}{(s-\varrho)\varrho} \right| < c_4 \log z + c_{17} \frac{\log z}{z} + \frac{1}{z} + c_{16} \log z + 2 c_{10} \log^2 z$$

$$< c_{18} \log^2 z;$$

auf dem Rest des Streckenzuges von $-z$ über $-z+zi$, $z+zi$ nach ist nach (3) und den Hilfssätzen 3, 4

$$|f(s)| < c_3 \log(2z) + \frac{1}{z-1} + c_{16} \log z + 2c_{10} \log^2 z < c_{19} \log^2 z.$$

§ 2.

Man denke ja nicht, daß es für das Gelingen des obigen Beweises wesentlich war, daß die ϱ sich nur nach drei Richtungen ins Unendliche erstrecken können. Im Gegenteil führt die Beweismethode des Hilfssatzes 1 sofort zu einem so einfachen Beweis des Hauptsatzes der Hadamardschen Theorie der ganzen Funktionen, daß ich nunmehr den einfachsten Beweis von (1) darin sehe, erst jenen Hauptsatz zu beweisen (der hier nur für $\lambda < 2$ nötig wäre), und dann, wie üblich, zu zeigen, daß seine Voraussetzung erfüllt ist. Der Hadamardsche **Hauptsatz** lautet:

Es sei $f(s)$ ganz und $O(e^{|s|^\lambda})$, $\lambda \geqq 0$. Dann ist das Geschlecht von $f(s)$ endlich, und zwar $\leqq [\lambda]$.

Beweis. Es darf $f(0) = 1$ angenommen werden. In $|s| \leqq r$ liegen nur $O(r^\lambda)$ Wurzeln (z. B. nach dem Jacobi-Jensenschen Satz). $\sum_\varrho \frac{1}{|\varrho|^k}$ mit $k = [\lambda] + 1$ ist also endlich oder konvergent. Daher ist

$$f(s) = e^{H(s)} \prod_\varrho \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right) e^{\sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{h}\left(\frac{s}{\varrho}\right)^h}, \quad H(s) \text{ ganz},$$

$$H^{(k)}(s) = \left(\frac{f'}{f}(s)\right)^{(k-1)} + (k-1)! \sum_\varrho \frac{1}{(\varrho - s)^k}.$$

Für $|s| = 2r$ ist, weil $\left|1 - \frac{s}{\varrho}\right| \geqq 1$ für $|\varrho| \leqq r$ ist,

$$\frac{f(s)}{\prod_{|\varrho| \leqq r} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)} = O(e^{(2r)^\lambda});$$

für $|s| \leqq r$ ist daher

$$\frac{f(s)}{\prod_{|\varrho| \leqq r} \left(1 - \frac{s}{\varrho}\right)} = e^{h(s)}, \quad h(s) (= h(s; r)) \text{ regulär}, \quad h(0) = 0, \quad \Re h(s) < O(r^\lambda).$$

Wegen der bekannten Ungleichung

$$|h^{(k)}(s)| \leqq \frac{2k!\, r}{(r - |s|)^{k+1}} \left(\operatorname*{Max}_{|s| \leqq r} \Re h(s) - \Re h(0)\right) \quad \text{für} \quad |s| < r$$

halte ich für $|s| = \frac{r}{2}$

$$H^{(k)}(s) = \left| h^{(k)}(s) + (k-1)! \sum_{|\varrho|>r} \frac{1}{(\varrho - s)^k} \right|$$

$$\leqq O(r^{\lambda - k}) + (k-1)! \sum_{|\varrho|>r} \frac{1}{\left|\frac{\varrho}{2}\right|^k} = o(1);$$

aher ist identisch

$$H^{(k)}(s) = 0.$$

Göttingen, den 18. Juli 1926.

(Eingegangen am 20. Juli 1926.)

Berichtigung zu der Abhandlung: „Untersuchung de Krümmung allgemeiner metrischer Räume auf Grun des in ihnen herrschenden Parallelismus".

Von

L. Berwald in Prag.

Infolge eines Schreibversehens, das beim Lesen der Korrekturen un bemerkt geblieben ist, sind die Gleichungen (74), (75) der Abhandlun (Math. Zeitschrift **25**, S. 40—73) unrichtig ausgefallen. Sie sind zu er setzen durch:

$$\delta^2 s = \varepsilon^2 \int_{s_0}^{s} (v'^2 - \mathfrak{K} v^2)\, ds, \tag{74}$$

$$v'' + \mathfrak{K} v = 0, \tag{75}$$

d. h. es ist beidemal der *Bogen* s des allgemeinen Raumes als Paramete zu nehmen.

(Eingegangen am 18. Juli 1926.)

Berichtigung.

In der Abhandlung: „A projective theory of affinely connected mani folds" von T. Y. Thomas (Math. Zeitschrift **25**, S. 723—733) ist die Formel (15) auf S. 727 durch

$${}^*\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu\nu} = \frac{1}{N} P\left(\frac{\partial\, {}^*\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\mu}}{\partial x^{\nu}} - {}^*\Gamma^{\iota}_{\sigma\beta\gamma\ldots\mu}\, {}^*\Gamma^{\sigma}_{\alpha\nu} - \ldots - {}^*\Gamma^{\iota}_{\alpha\beta\gamma\ldots\sigma}\, {}^*\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}\right)$$

zu ersetzen.

Die durch eine polare Korrelation in sich selbst überführbaren Regelflächen zweiter Ordnung.

Von

Stanislaus Jolles in Berlin.

Nach einem Hauptsatze meiner Abhandlung: Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz (Journ. f. d. reine und angew. Math. 134 (1908)) sind für eine einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung ∞^2 einen Bündel $F^2(\pi)$ bildende einscharig in C_1^1 enthaltene Flächen zweiter Ordnung autopolar. Dies Ergebnis wird hier zunächst noch einmal, und zwar recht einfach, abgeleitet, und damit eine genauere Untersuchung des Bündels $F^2(\pi)$ verknüpft. Auf der Theorie dieses Bündels fußt dann die Bestimmung aller Strahlenflächen zweiter Ordnung, die für eine Regelfläche zweiter Ordnung oder für eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung mit reellem polaren Raume autopolar sind. Die Beweise erstrecken sich nur auf hyperbolische und elliptische lineare Stahlenkongruenzen. Gestützt auf sie sind die analogen Sätze für parabolische lineare Strahlenkongruenzen unschwer abzuleiten.

1. Eine lineare Strahlenkongruenz C_1^1 wird durch zwei Arten[1]) polarer Korrelationen in sich selbst übergeführt. Während in den polaren Räumen der einen Art — den primären polaren Räumen der linearen Strahlenkongruenz — je zwei durch C_1^1 einander zugeordnete Punkte und Ebenen konjugiert sind, ist das in den polaren Räumen der andern Art — den sekundären polaren Räumen der linearen Strahlenkongruenz — nicht der Fall.

Zwei windschiefe Strahlen a, b einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1 werden nun mit einem dritten zu ihnen windschiefen Kongruenzstrahle x durch eine Regelschar zweiter Ordnung $\mathfrak{x}^2$ von C_1^1 verbunden. Sind — was nunmehr vorausgesetzt werde — a, b reziproke Polaren in einem

[1]) Jolles, Primäre und sekundäre polare Räume einer linearen Strahlenkongruenz, Journ. f. d. reine u. angew. Math. 134 (1908), Einleitung.

primären polaren Raume Π der Kongruenz, so enthält[2]) die Regelschar $\mathfrak{X}^1$ auch die Polare y von x in Π. Die Regelschar $\mathfrak{X}^2$ ist somit durch di Korrelation π von Π in sich selbst überführbar oder kurz für π „auto transformabel". Das gleiche gilt für alle in C_1^1 gelegenen und durch a, gehenden Regelscharen zweiter Ordnung sowie für deren Träger, und dies bilden einen Büschel[3]) einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnung Einen zweiten Büschel von Flächen zweiter Ordnung, die einscharig in C enthalten und für π autotransformabel sind, bilden die Inzidenzfläche primärer polarer Räume von C_1^1, die zwei andere in Π reziprok polar Kongruenzstrahlen c, d enthalten. Sind a, b, c, d windschief, so haben di zwei F^2-Büschel die durch die vier Strahlen a, b, c, d gehende Fläch zweiter Ordnung gemein und liegen in einem F^2-Bündel $F^2(\pi)$, desse Elemente Inzidenzflächen primärer polarer Räume von C_1^1 sind[4]). Jede der zwei Büschel sendet eine Fläche durch einen gegebenen Strahl x von C_1^1 Beide Flächen enthalten die Polare y von x in Π, und die durch x, gehenden einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilde folglich einen Büschel des F^2-Bündels $F^2(\pi)$. Fallen die Strahlen x, nacheinander mit allen in Π reziprok polaren Kongruenzstrahlen zusammen so ergeben sich auf diese Weise alle reellen Flächen des Bündels $F^2(\pi$ für π autotransformabel.

Der F^2-Bündel $F^2(\pi)$ kann aus reellen oder aus reellen und imaginären Flächen (mit reellen polaren Räumen) bestehen. Es fragt sich, ob diese imaginären Flächen, d. h. die sie repräsentierenden polaren Räume auch für die Korrelation π von Π autotransformabel sind.

Jeder Büschel des F^2-Bündels $F^2(\pi)$, in dem imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen liegen, und dessen Flächen zwei reelle Kongruenzstrahlen zu gemeinsamen reziproken Polaren haben, enthält ∞^1 reelle Flächen. Diese sind, wie soeben dargetan wurde, für π autotransformabel. Nun wird der polare Raum jeder Fläche eines F^2-Büschels und diese selbst durch eine polare Korrelation in sich selbst übergeführt, wenn die polare Korrelation mindestens drei Flächen des Büschels und deren polare Räume in sich selbst überführt. Folglich wird jede Fläche des F^2-Bündels $F^2(\pi)$, gleichgültig ob sie reell oder imaginär ist, durch π in sich selbst verwandelt[5]).

In einem Büschel einscharig in einer linearen Kongruenz enthaltenen Flächen zweiter Ordnung, in dem außer reellen Flächen imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen liegen, zerfallen zwei Flächen in ein Paar (reelle oder konjugiert imaginäre) Ebenen. Die Doppelpunktsgeraden der Ebenenpaare sind reelle Kongruenzstrahlen[6]). Sie gehen, wenn jede Fläche des

[2]) A. a. O. Nr. 8. [3]) A. a. O. Nr. 1. [4]) A. a. O. Nr. 4.
[5]) A. a. O. Nr. 9. [6]) A. a. O. Nr. 6.

Büschels durch π in sich selbst übergeführt wird, in sich selbst über nd liegen demnach auf der Inzidenzfläche P^2 des polaren Raumes Π. Dieser polare Raum hat somit, sobald der Bündel $F^2(\pi)$ außer reellen Flächen imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen enthält, eine reelle nzidenzfläche. —

Der F^2-Bündel $F^2(\pi)$ umfaßt nun die Inzidenzflächen aller für die Korrelation π des primären polaren Raumes Π autotransformabelen primären polaren Räume der linearen Strahlenkongruenz C_1^1.

Ist nämlich D^2 zunächst eine reelle in C_1^1 einscharig enthaltene für π autotransformabele Fläche zweiter Ordnung, die nicht im F^2-Bündel $F^2(\pi)$ enthalten ist, so liegen auf D^2 unendlich viele Paare in Π reziprok polarer Kongruenzstrahlen. Durch jedes dieser Strahlenpaare geht ein Büschel des F^2-Bündels $F^2(\pi)$ und sonst keine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche. Folglich kann D^2 nicht außerhalb des F^2-Bündels liegen.

Ist ferner D^2 die imaginäre Inzidenzfläche eines reellen primären polaren Raumes Δ von C_1^1, so ist C_1^1 elliptisch. Ein jeder durch Δ gehende Büschel reeller primären polaren Räume von C_1^1 enthält dann zwei ausgeartete polare Räume, deren Inzidenzflächen aus konjugiert imaginären Ebenen bestehen. Die Doppelpunktsgeraden dieser zwei zerfallenen Flächen zweiter Ordnung sind die beiden allen polaren Räumen des Büschels gemeinsamen reellen reziprok polaren Kongruenzstrahlen[6]). Weitere primäre polare Räume von C_1^1, in denen diese zwei Kongruenzstrahlen reziprok polar sind, gibt es nicht. Ein durch D^2 und eine Fläche E^2 des F^2-Bündels $F^2(\pi)$ gehender F^2-Büschel, der die Inzidenzfläche P^2 von Π nicht enthält, wird also durch die Korrelation π von Π so in sich selbst übergeführt, daß nicht nur die polaren Räume der Flächen D^2, E^2 in sich selbst verwandelt werden, sondern auch die der beiden in Ebenenpaare zerfallenen Flächen. Folglich sind mehr als zwei und demnach die polaren Räume aller Flächen des F^2-Büschels für π autotransformabel. ∞^1 Flächen des F^2-Büschels sind aber reell und liegen, da sie durch π in sich selbst transformiert werden, wie soeben bewiesen wurde, im F^2-Bündel $F^2(\pi)$. Somit liegen in ihm alle Flächen des Büschels, insbesondere D^2. Kurz:

Die Inzidenzflächen aller primären polaren Räume einer linearen Strahlenkongruenz C_1^1, die für die Korrelation π eines primären polaren Raumes Π von C_1^1 autotransformabel sind, bilden einen F^2-Bündel $F^2(\pi)$. Zwei für π autotransformabele primäre polare Räume von C_1^1 werden durch einen Büschel solcher primären polaren Räume der Kongruenz verbunden. Durch je zwei in Π reziprok polare Kongruenzstrahlen geht ein Büschel von einscharig in C_1^1 enthaltenen für π autotransformabelen Flächen zweiter Ordnung, und jede einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung,

auf der zwei in Π reziprok polare Kongruenzstrahlen liegen, ist für autotransformabel.

Alle einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung bilden ei F^2-Gebüsch[7]), und drei Bündel eines F^2-Gebüsches haben eine Fläch gemein. Bestimmen wir demnach für drei nicht in einem Büschel ge legene Flächen eines Bündels einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweite Ordnung die drei Bündel, die bzw. von den für diese Flächen autotrans formabelen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung gebilde werden, so gilt:

Jeder Bündel einscharig in C_1^1 enthaltener Flächen zweiter Ordnun bestimmt eine einscharig in C_1^1 enthaltene Fläche zweiter Ordnung, fü die seine Flächen autopolar sind[8]).

Diese Fläche kann eine reelle Fläche sein oder eine imaginäre mi reellem polaren Raume.

2. Jede einscharig in einer linearen Strahlenkongruenz enthalten zerfallene Fläche zweiter Ordnung geht durch zwei aus Kongruenzstrahle bestehende Strahlenbüschel erster Ordnung mit einem gemeinsamen Strahle der Doppelpunktsgerade der Fläche. Bei einer hyperbolischen Kongruen sind die beiden durch einen reellen Kongruenzstrahl gehenden Strahlenbüsche reell, bei einer elliptischen konjugiert imaginär. Im ersteren Falle sind die Träger der beiden Strahlenbüschel die zwei reellen, im letzteren Falle die zwei konjugiert imaginären den Kongruenzstrahl mit den beiden Leit geraden u, v von C_1^1 verbindenden Ebenen. Ein imaginärer Kongruenz strahl ist bei einer hyperbolischen wie bei einer elliptischen linearer Strahlenkongruenz die imaginäre Doppelpunktsgerade einer in zwei imagi näre Strahlenbüschel zerfallenen einscharig in der Kongruenz enthaltenen Fläche zweiter Ordnung.

Die auf der (reellen oder imaginären) Inzidenzfläche P^2 eines pri mären polaren Raumes Π von C_1^1 gelegenen Kongruenzstrahlen sind hier nach die Doppelpunktsgeraden (1.) der in C_1^1 enthaltenen für die Kor relation π von Π autotransformabelen zerfallenen Flächen des F^2-Bündels $F^2(\pi)$. Oder:

Die Doppelpunktsgeraden aller zerfallenen Flächen zweiter Ordnung in einem Bündel $F^2(\pi)$ bilden die in C_1^1 enthaltene Regelschar derjenigen (reellen oder imaginären) Fläche zweiter Ordnung P^2, für welche die Flächen von $F^2(\pi)$ autopolar sind.

3. In dem Bündel $F^2(\pi)$ mögen imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen liegen. Dann enthalten seine F^2-Büschel, die durch reelle und

[7]) A. a. O. Nr. 5. [8]) A. a. O. Nr. 10.

derartige imaginäre Flächen gehen, je zwei zerfallene Flächen, deren Doppelpunktsgeraden zwei reelle[6]) auf der Inzidenzfläche P^2 von Π gelegene Kongruenzstrahlen sind (2.):

Von zwei einscharig in C_1^1 enthaltenen füreinander autopolaren Flächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen ist also mindestens eine reell.

Bei einer elliptischen linearen Strahlenkongruenz ist die Inzidenzfläche P^2 des primären polaren Raumes Π von C_1^1 reell, wenn der Bündel $F^2(\pi)$ durch imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen geht, hingegen imaginär, wenn alle Flächen des Bündels $F^2(\pi)$ reell sind. Im letzteren Falle teilt jede Fläche von $F^2(\pi)$ die in C_1^1 gelegene Regelschar jeder andern Fläche dieses Büschels so in zwei Teile, daß sie die Strahlen des einen Teiles von denen des andern trennt.

Ist die Inzidenzfläche P^2 von Π reell, so ist jede Fläche zweiter Ordnung, die zwei für P^2 reziprok polare Strahlen a, b von C_1^1 mit einem auf P^2 gelegenen Kongruenzstrahle r verbindet, eine einscharig in C_1^1 enthaltene für die Korrelation π von Π autotransformabele Fläche zweiter Ordnung. Sie enthält außer r den von r durch a, b harmonisch getrennten Strahl s von P^2 und die auf P^2 gelegenen (reellen oder konjugiert imaginären) Leitgeraden u, v von C_1^1. Durch jeden auf P^2 gelegenen Strahl von C_1^1 geht ein Büschel einscharig in der Kongruenz enthaltener für π autotransformabelen Flächen zweiter Ordnung, die einander in jenem Kongruenzstrahle berühren. In dem Büschel liegt eine durch diesen Kongruenzstrahl gehende einscharig in C_1^1 enthaltene zerfallene Fläche. Durch zwei auf P^2 gelegene Strahlen von C_1^1 geht eine und nur eine einscharig in C_1^1 enthaltene für π autotransformabele Fläche zweiter Ordnung.

4. Bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 sind zwei windschiefe Kongruenzstrahlen a, b, reziprok polar für eine einscharig in ihr enthaltene Fläche zweiter Ordnung P^2, die zusammengehörigen Involutionsachsen für eine hyperbolische Strahleninvolution unter den auf P^2 gelegenen Strahlen von H_1^1. Jedes reelle wie konjugiert imaginäre Strahlenpaar der Involution liegt auf je einer durch a, b gehenden einscharig in H_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung, und diese Flächen zweiter Ordnung bilden einen Büschel. ∞^1 seiner Flächen schneiden die Fläche P^2 in je zwei reellen, ∞^1 in je zwei konjugiert imaginären Strahlen von H_1^1. Nun sind die durch a, b gehenden einscharig in H_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung (1.) autopolar für die Fläche P^2, gleichgültig welche windschiefen für P^2 reziprok polaren Kongruenzstrahlen für a, b auch gewählt werden mögen. Somit besteht der Bündel $F^2(\pi)$ aller einscharig in H_1^1 enthaltenen und für P^2 autopolaren Flächen zweiter Ord-

nung aus ∞^2 Flächen, die P^2 in zwei reellen und ∞^2 Flächen, die P^2 in zwei konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen schneiden. Abgesehen von den beiden Kongruenzstrahlen hat P^2 mit jeder Fläche von $F^2(\pi)$ noch die beiden reellen Leitgeraden u, v von H_1^1 gemein.

Während bei einer hyperbolischen linearen Strahlenkongruenz H_1^1 alle reellen primären polaren Räume reelle Inzidenzflächen haben, sind bei einer elliptischen E_1^1 sowohl ∞^3 primäre polare Räume mit reellen und auch ∞^3 reelle primäre polare Räume mit imaginären Inzidenzflächen vorhanden. Für eine einscharig in E_1^1 enthaltene imaginäre Fläche zweiter Ordnung P^2 mit reellem polaren Raume Π besteht der Bündel $F^2(\pi)$ aller für die Korrelation π von Π autotransformabelen Flächen zweiter Ordnung aus reellen Flächen (**3.**). Sie schneiden die imaginäre Fläche P^2 außer in den konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von E_1^1 noch in zwei konjugiert imaginären Kongruenzstrahlen.

Für eine einscharig in E_1^1 enthaltene reelle Fläche zweiter Ordnung P^2 besteht (**3.**) der Bündel $F^2(\pi)$ aus ∞^2 reellen für P^2 autopolaren Flächen zweiter Ordnung und aus ∞^2 imaginären (mit reellen polaren Räumen). Zwei für P^2 reziprok polare Strahlen von E_1^1 sind durch P^2 voneinander getrennt. Somit schneidet jede reelle Fläche des Bündels $F^2(\pi)$ die Fläche P^2 außer in den konjugiert imaginären Leitgeraden u, v von E_1^1 noch in zwei reellen Kongruenzstrahlen. Zwei konjugiert imaginäre Kongruenzstrahlen von E_1^1 haben mit P^2 nur die in $F^2(\pi)$ gelegenen imaginären Flächen mit reellen polaren Räumen gemein. Sie allein von den Flächen von $F^2(\pi)$ schneiden also die Fläche P^2 in zwei Paaren konjugiert imaginärer Geraden.

5. Je zwei durch die lineare Kongruenz C_1^1 einander zugeordnete Strahlen einer einscharig in ihr enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2 sind gemeinsame reziproke Polaren[9]) aller für P^2 autopolaren primären polaren Räume von C_1^1. Somit schließen wir:

Die Flächen eines Bündels $F^2(\pi)$ haben ∞^1 gemeinsame reziproke Polaren. Je zwei dieser reziproken Polaren sind im geschart involutorischen Raume Σ_{ig} von C_1^1 einander zugeordnet. Ihre Gesamtheit bildet die in Σ_{ig} enthaltene involutorische Regelschar der einscharig in C_1^1 enthaltenen Fläche zweiter Ordnung P^2, die für alle Flächen des Bündels $F^2(\pi)$ autopolar ist.

6. Sind zwei Flächen zweiter Ordnung P^2, X^2 einscharig in C_1^1 enthalten, so liegen[10]) die Leitscharen der in C_1^1 enthaltenen Regelscharen in einer zweiten linearen Strahlenkongruenz K_1^1. Sie geht durch eine Regelschar jeder Fläche des P^2, X^2 verbindenden F^2-Büschels und ist so-

---

[9]) A. a. O. Nr. 11. [10]) A. a. O. Nr. 12.

nach auch gegeben, wenn eine oder jede von beiden Flächen die imaginäre Inzidenzfläche eines reellen polaren Raumes ist. Die Leitgeraden von K_1^1 sind die beiden (reellen oder konjugiert imaginären) P^2, X^2 gemeinsamen Strahlen von C_1^1. Jede der beiden Kongruenzen hat also zwei (reelle oder konjugiert imaginäre) Strahlen der anderen zu Leitgeraden.

Besonders einfach ist die lineare Strahlenkongruenz K_1^1 zu ermitteln, wenn die beiden Flächen P^2, X^2 füreinander autopolar sind. Eine von ihnen — etwa X^2 — ist dann sicher reell (3.), und K_1^1 geht folglich durch die nicht in C_1^1 enthaltene Regelschar von X^2 Ferner sind in diesem Falle je zwei auf X^2 gelegene für P^2 reziprok polare Strahlen von C_1^1 durch K_1^1 einander zugeordnet[9]). Man kennt also eine in K_1^1 enthaltene Regelschar zweiter Ordnung, deren Leitschar eine im geschart involutorischen Raume von K_1^1 enthaltene involutorische Regelschar trägt. Hierdurch ist aber der geschart involutorische Raum von K_1^1 und seine lineare Strahlenkongruenz K_1^1 bestimmt[11]).

7. Es seien zwei windschiefe Geraden a, b in einem polaren Raume Π reziprok polar. Seine Inzidenzfläche P^2 sei eine reelle Regelfläche zweiter Ordnung oder imaginär. Dann gibt es einen und nur einen durch P^2 gehenden F^2-Büschel, für dessen Flächen die Geraden a, b reziprok polar und je zwei mit a bzw. b inzidente konjugierte Ebenen von Π konjugiert sind. Der Büschel besteht entweder aus Regelflächen oder aus solchen und imaginären Flächen zweiter Ordnung mit reellen polaren Räumen. In beiden Fällen bilden die reziproken Polaren einer gegebenen Gerade r für die Flächen des F^2-Büschels eine a, b enthaltende Regelschar zweiter Ordnung. Sie geht nur dann durch r, wenn r auf einer Fläche des Büschels liegt.

In a, b schneiden einander[12]) zwei und nur zwei lineare Strahlenkongruenzen mit dem gemeinsamen primären polaren Raume Π. Jede von ihnen geht durch eine andere Regelschar jeder Fläche des soeben gefundenen F^2-Büschels, und jede sendet durch a, b einen Büschel einscharig in ihr enthaltener Flächen zweiter Ordnung. Da aber die gemeinsamen Strahlen a, b der zwei Kongruenzen in Π reziprok polar sind, so bestehen (1.) beide F^2-Büschel aus autotransformabelen Flächen für die Korrelation π von Π. Von allen durch a, b gehenden Flächen zweiter Ordnung schneiden nur die Flächen dieser F^2-Büschel die einscharig in beiden Kongruenzen enthaltenen Flächen zweiter Ordnung in Geraden. Somit sind sie nach den Überlegungen am Anfange dieser Nummer von

---

[11]) v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 1856, Nr. 104.

[12]) Jolles, Die für die Korrelation eines polaren Raumes invarianten linearen Komplexe und die aus ihnen gebildeten zwei Γ-Bündel, Math. Zeitschr. 3 (1919), Nr. 2.

allen durch a, b gehenden Flächen zweiter Ordnung allein für die Ko[r]relation π von Π autotransformabel. In anderen Worten:

Durch zwei windschiefe reziproke Polaren eines polaren Raumes [Π] gehen ∞^1 für die Korrelation π von Π autotransformabele Flächen zweiter Ordnung. Sie bilden zwei F^2-Büschel.

8. Durch eine Regelschar $\mathfrak{R}^2$ der (reellen oder imaginären) Inzidenzfläche P^2 eines polaren Raumes Π und durch einen nicht auf P^2 gelegenen Strahl a ist eine die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ und den Strahl a enthaltende lineare Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmt[13]). In jedem Strahle von C_1^1 schneiden einander ∞^1 in C_1^1 einscharig enthaltene für die Korrelation π von Π autotransformabele Flächen zweiter Ordnung (7.). Sie bilden einen F^2-Büschel in dem Bündel $F^2(\pi)$ aller für π autotransformabelen einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung. Beschreibt der Strahl a um einen mit ihm aber nicht mit P^2 inzidenten Punkt X einen Strahlenbündel und wird in jeder seiner Lagen die ihn und $\mathfrak{R}^2$ verbindende lineare Strahlenkongruenz C_1^1 bestimmt, so erhalten wir alle durch $\mathfrak{R}^2$ gehenden linearen Strahlenkongruenzen. Jeder Strahl des Raumes ist in einer von ihnen enthalten. Somit geht durch jeden Strahl ein F^2-Büschel, dessen Flächen für π autotransformabel sind und einscharig in einer $\mathfrak{R}^2$ enthaltenden linearen Kongruenz C_1^1 liegen. Ersetzen wir in vorstehender Untersuchung die Regelschar $\mathfrak{R}^2$ von P^2 durch ihre Leitschar $\mathfrak{L}^2$, so folgt analog: Durch jeden Strahl geht ein F^2-Büschel, dessen Flächen für π autotransformabel sind und einscharig in einer $\mathfrak{L}^2$ enthaltenden linearen Strahlenkongruenz K_1^1 liegen. Die beiden bzw. in C_1^1 und K_1^1 gelegenen F^2-Büschel umfassen alle durch den Strahl gehenden für π autotransformabelen Flächen zweiter Ordnung (7.). Jede mit der einen Regelschar in einer Kongruenz C_1^1 gelegene Fläche zweiter Ordnung liegt mit der andern in einer Kongruenz K_1^1 und umgekehrt (6.). Je nachdem die für die Korrelation π von Π autotransformabelen Regelflächen zweiter Ordnung als Flächen aufgefaßt werden, die einscharig in einer durch $\mathfrak{R}^2$ oder $\mathfrak{L}^2$ gehenden linearen Strahlenkongruenz liegen, können sie somit auf zwei Arten zu ∞^2 F^2-Bündeln $F^2(\pi)$ geordnet werden.

In ∞^2 Bündeln $F^2(\pi)$ liegen nur Regelflächen zweiter Ordnung, in ∞^2 außer Regelflächen zweiter Ordnung auch imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen, wenn P^2 eine Regelfläche ist (4.). Nur Regelflächen zweiter Ordnung liegen in allen Bündeln $F^2(\pi)$, wenn P^2 sich als imaginär erweist. Die in den ∞^2 F^2-Bündeln $F^2(\pi)$ enthaltenen Flächen sind die einzigen für die Korrelation π von Π autotransformabelen Regelflächen bzw. imaginären Flächen zweiter Ordnung (mit reellen po-

[13]) A. a. O. Nr. 2 und 3.

aren Räumen). Hiermit ist nunmehr ein einwurfsfreier Beweis des schon rüher[14]) ausgesprochenen Satzes erbracht:

Hat ein reeller polarer Raum II zur Inzidenzfläche P^2 eine Regelläche oder eine imaginäre Fläche zweiter Ordnung, so gibt es ∞^4 für eine Korrelation π autotransformabele Strahlenflächen zweiter Ordnung. Sie sind Regelflächen oder imaginäre Flächen mit reellen polaren Räumen und können auf zwei Arten zu ∞^2 F^2-Bündeln zusammengefaßt werden.

Schon in den vorstehenden Beweisen hat die Beziehung zwischen den einscharig in C_1^1 enthaltenen Flächen zweiter Ordnung und den durch sie bestimmten Bündeln $F^2(\pi)$ zu neuen wichtigen Sätzen für die Theorie der linearen Strahlenkongruenzen geführt. Ich gedenke demnächst darzutun, daß ein weiteres Verfolgen dieser Abhängigkeit noch viele andere wichtige Eigenschaften der linearen Strahlenkongruenz hervortreten läßt. Insbesondere wird die Fokaltheorie der linearen Strahlenkongruenzen die isolierte Stellung verlieren, die sie bisher inne hatte.

Berlin-Halensee, den 26. April 1925.

[14]) A. a. O. Nr. 4.

(Eingegangen am 27. April 1925.)

Ein Problem der Affingeometrie.

Von

W. van der Woude in Leiden.

Es sei

$$x_i = x_i(s) \qquad (i = 1, 2, 3$$

die Gleichung einer Kurve (K). Die Funktionen $x_i(s)$ seien analytisch; mit s soll der ausgezeichnete Parameter, die Affinlänge des Kurvenbogens, bezeichnet werden.

Man beweist dann sehr leicht den folgenden Satz. „Zieht man in dem veränderlichen Punkte $\mathfrak{x}$ der Kurve (K) die Affinnormale, so durchläuft der auf ihr gelegene Punkt $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + c\,\mathfrak{x}''$ (wo c eine Konstante ist), eine Kurve $(\bar{K})$, so daß (K) und $(\bar{K})$ in den korrespondierenden Punkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ parallele Tangenten haben."

Soweit ist die Analogie zu einem ähnlichen Satze aus der Orthogonalgeometrie vollkommen. Die Affinnormale im Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ fällt aber nicht mit der Affinnormale in $\mathfrak{x}$ zusammen; dies ist, wie man wieder ganz leicht beweist, nur dann längs der ganzen Kurve der Fall, wenn (K) ein Kegelschnitt ist. Im letzten Falle darf dann die Konstante c willkürlich gewählt werden.

Beiläufig sei bemerkt, daß, wenn $\mathfrak{x}$ festgehalten wird und $\bar{\mathfrak{x}}$ die Affinnormale in $\mathfrak{x}$ durchläuft (also c ein veränderlicher Parameter ist), die Affinnormale in $\mathfrak{x}$ eine Parabel umhüllt.

Wenn man jetzt eine Fläche (S) betrachtet und auf der Affinnormalen im Punkte $\mathfrak{x}$ von (S) den Punkt $\bar{\mathfrak{x}} = \mathfrak{x} + c\,\mathfrak{y}$ ins Auge faßt (wo c eine Konstante und $\mathfrak{y}$ den normierten Affinnormalenvektor darstellt), so sieht man wieder ganz leicht, daß $\bar{\mathfrak{x}}$ eine zu S „parallele" Fläche $(\bar{S})$ beschreibt, d. h. (S) und $(\bar{S})$ haben in den korrespondierenden Punkten $\mathfrak{x}$ und $\bar{\mathfrak{x}}$ parallele Tangentenebenen. Wird nun jedoch gefragt, in welchem Falle die Affinnormalen in korrespondierenden Punkten von (S) und $(\bar{S})$

usammenfallen, so ist die Antwort eine andere als man vielleicht er-arten würde.

Es zeigt sich nämlich folgendes: Nur wenn zwischen dem affinen Krümmungsmaß und der mittleren Affinkrümmung von (S) eine lineare Relation besteht, kann c so gewählt werden, daß die Affinnormalen in korrespondierenden Punkten zusammenfallen; zwischen den Krümmungen von (S) und $(\bar{S})$ bestehen dann ganz einfache Beziehungen (§ 5). Ist (S) eine Fläche zweiter Ordnung, so darf die Konstante c ganz willkürlich gewählt werden; diese Eigenschaft ist aber nicht charakteristisch für diese Flächen (§ 4).

Bei den folgenden Darstellungen wird ein bewegtes Achsensystem benutzt, weil die Berechnungen dann besonders einfach sind. Zwar muß man dann erst einige Grundformeln ableiten (§ 1). Auch ohne dieses Hilfsmittel verläuft fast die ganze Berechnung ziemlich einfach; es lohnt aber u. E. die Mühe, diese Formeln ein für allemal abzuleiten.

§ 1.

$O^+ X_1^+ X_2^+ X_3^+$ und $O X_1 X_2 X_3$ seien zwei Achsenkreuze, die wir respektive das feste (oder ruhende) und das bewegte nennen. Bei der Transformation

$$x_i^+ = \alpha_{1i} x_1 + \alpha_{2i} x_2 + \alpha_{3i} x_3 + a_i$$

sind α_{ik} solche Funktionen zweier Parameter u und v, daß stets die Determinante

$$\alpha \equiv |\alpha_{ik}| = 1$$

ist.

Sind stets x_i^+ und x_i die Koordinaten eines Punktes, der in bezug auf keines der beiden Achsenkreuze in Ruhe zu sein braucht, so ist

$$(1) \qquad \begin{aligned} dx_i^+ = &\Big(\frac{\partial a_i}{\partial u} + \sum_k \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial u} x_k + \sum_k \alpha_{ki} \frac{\partial x_k}{\partial u}\Big) du \\ &+ \Big(\frac{\partial a_i}{\partial v} + \sum_k \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial v} x_k + \sum_k \alpha_{ki} \frac{\partial x_k}{\partial v}\Big) dv. \end{aligned}$$

Wir stellen die Komponenten dieses infinitesimalen Vektors (Vektor der „absoluten" Verrückung) in bezug auf die bewegten Achsen durch δx_l dar. Dann ist

$$\delta x_l = \sum_i \mathsf{A}_{li}\, dx_i^+,$$

wenn mit A_{li} der Minor von α_{li} bezeichnet ist.

Also ist wegen (1)

$$(2) \qquad \delta x_l = \Big(\xi_l + \sum_k \Lambda_{kl} x_k + \frac{\partial x_l}{\partial u}\Big) du + \Big(\eta_l + \sum_k \mathsf{M}_{k\,l} x_k + \frac{\partial x_l}{\partial v}\Big) dv,$$

wo

$$(3)\quad \begin{cases} \xi_l = \sum_i A_{li} \frac{\partial a_i}{\partial u}, & \eta_l = \sum_i A_{li} \frac{\partial a_i}{\partial v}, \\ \Lambda_{kl} = \sum_i \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial u} A_{li}, & M_{kl} = \sum_i \frac{\partial \alpha_{ki}}{\partial v} A_{li}. \end{cases}$$

Zweitens bemerken wir noch folgendes. Denken wir uns einen Vektor $\mathfrak{y}$; es genügt, ihn als von nur einem Parameter u abhängig zu betrachten. Als den von $\mathfrak{y}$ „abgeleiteten Vektor" bezeichnen wir den Vektor, der in bezug auf die festen Achsen die Komponenten $\frac{dy_i^+}{du}$ hat. Schreiben wir für seine Komponenten in bezug auf die beweglichen Achsen $\frac{\delta y_l}{du}$, so ist

$$(4)\quad \frac{dy_l}{du} = \frac{dy_l}{du} + \sum_k \Lambda_{kl} y_k.$$

Der Beweis kann ganz auf dieselbe Weise geführt werden wie in der orthogonalen Kinematik für die analoge Formel

$$\frac{\delta v_x}{dt} = \frac{dv_x}{dt} + q v_z - r v_y.$$

Wir denken uns mit dem Ursprung O des bewegten Koordinatensystems eine Fläche

$$a_i = a_i(u, v)$$

beschrieben; OX_1, OX_2 und OX_3 fallen dabei stets mit den (reell angenommenen) Tangenten der Asymptotenlinien und mit der Affinnormale zusammen. Bekanntlich haben die beiden zu der Fläche gehörenden invarianten Differentialformen dann die Gestalt

$$\varphi = 2F du\, dv; \qquad \psi = A du^3 + D dv^3,$$

und es gilt weiter:

$$(5)\quad L \equiv (\mathfrak{a}_u, \mathfrak{a}_v, \mathfrak{a}_{uu}) = 0; \quad M \equiv (\mathfrak{a}_u, \mathfrak{a}_v, \mathfrak{a}_{uv}) = F^2; \quad N \equiv (\mathfrak{a}_u, \mathfrak{a}_v, \mathfrak{a}_{vv}) = 0.$$

Ist $\mathfrak{b}$ der Affinnormalenvektor, so hat man

$$(6)\quad b_i = \frac{1}{2} \Delta(a_i) = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 a_i}{\partial u \partial v},$$

während die Ableitungsgleichungen sich vereinfachen zu

$$(7)\quad \mathfrak{a}_{uu} = \frac{F_u}{F} \mathfrak{a}_u + \frac{A}{F} \mathfrak{a}_v; \quad \mathfrak{a}_{uv} = F\mathfrak{b}; \quad \mathfrak{a}_{vv} = \frac{D}{F} \mathfrak{a}_u + \frac{F_v}{F} \mathfrak{a}_v$$

und

$$(8)^1)\quad \mathfrak{b}_u = -H\mathfrak{a}_u + \frac{A_v}{F^2} \mathfrak{a}_v; \qquad \mathfrak{b}_v = \frac{D_u}{F^2} \mathfrak{a}_u - H\mathfrak{a}_v.$$

[1]) W. Blaschke, Differentialgeometrie II, S. 132. Berlin: Julius Springer 1923.

Mit H möge die mittlere Affinkrümmung und später mit K das affine Krümmungsmaß bezeichnet sein.

Die Transformationsformeln sehen dann so aus:

$$x_i^+ = \frac{\partial a_i}{\partial u} x_1 + \frac{\partial a_i}{\partial v} x_2 + \frac{1}{F} b_i x_3,$$

nd wir können die Größen $\xi, \eta, \Lambda, \mathsf{M}$ ohne Mühe mittels (5), (6), (7), 8) berechnen. Es ergeben sich dann folgende Werte:

$$9) \quad \begin{cases} \xi_1 = 1; & \xi_2 = 0; & \xi_3 = 0, \\ \Lambda_{11} = \frac{F_u}{F}; & \Lambda_{21} = 0; & \Lambda_{31} = -\frac{H}{F}. \\ \Lambda_{12} = \frac{A}{F}; & \Lambda_{22} = 0; & \Lambda_{32} = \frac{A_v}{F^3}, \\ \Lambda_{13} = 0; & \Lambda_{23} = F^2; & \Lambda_{33} = -\frac{F_u}{F}. \end{cases}$$

$$10) \quad \begin{cases} \eta_1 = 0; & \eta_2 = 1; & \eta_3 = 0, \\ \mathsf{M}_{11} = 0; & \mathsf{M}_{21} = \frac{D}{F}; & \mathsf{M}_{31} = \frac{D_u}{F^3}, \\ \mathsf{M}_{12} = 0; & \mathsf{M}_{22} = \frac{F_v}{F}; & \mathsf{M}_{32} = -\frac{H}{F}, \\ \mathsf{M}_{13} = F^2; & \mathsf{M}_{23} = 0; & \mathsf{M}_{33} = -\frac{F_v}{F}. \end{cases}$$

§ 2.

Der Punkt M falle nun mit dem Ursprunge des bewegten Koordinatensystems zusammen; $\overline{M}(0, 0, cF)$ sei ein Punkt der Affinnormale in M. Dann gilt wegen (2), (9), (10) für die Bewegung von $\overline{M}$:

$$(11) \quad \begin{cases} \delta \bar{x}_1 = (1 - cH)\,du + c\frac{D_u}{F^2}\,dv, \\ \delta \bar{x}_2 = c\frac{A_v}{F^2}\,du + (1 - cH)\,dv, \\ \delta \bar{x}_3 = F(c_u\,du + c_v\,dv). \end{cases}$$

Die Fläche $(\overline{S})$ sei der Ort des Punktes $\overline{M}$, wenn M die Fläche (S) beschreibt. Die Tangentenebenen in M und $\overline{M}$ sind dann und nur dann parallel, wenn c eine Konstante ist.

In diesem Falle vereinfachen sich die Formeln (11) zu

$$(12) \quad \begin{cases} \delta \bar{x}_1 = (1 - cH)\,du + c\frac{D_u}{F^2}\,dv, \\ \delta \bar{x}_2 = c\frac{A_v}{F^2}\,du + (1 - cH)\,dv, \\ \delta \bar{x}_3 = 0. \end{cases}$$

Wir fragen noch, in welcher Weise sich der Punkt M bewegen soll, damit die Tangenten in den korrespondierenden Punkten der Bahnen von M und $\overline{M}$ parallel sind? Für den Punkt $M(0, 0, 0)$ gilt

$$\delta x_1 = du, \qquad \delta x_2 = dv;$$

die Tangenten in M und $\overline{M}$ sind parallel, wenn

$$\frac{\delta \bar{x}_1}{\delta x_1} = \frac{\delta \bar{x}_2}{\delta x_2},$$

d. h. wenn

$$A_v du^2 - D_u dv^2 = 0.$$

Die Tangenten in den korrespondierenden Punkten der Bahnen von M und $\overline{M}$ sind dann und nur dann parallel, wenn M eine Krümmungslinie der Fläche S beschreibt.

Soweit besteht eine vollkommene Analogie mit den bekannten Sätzen der orthogonalen Differentialgeometrie.

§ 3.

Wir berechnen jetzt die invariante quadratische Differentialform der Fläche $(\overline{S})$. Die Größen $\bar{L}, \bar{M}, \bar{N}$ werden aus

$$\bar{L} = \left(\frac{\delta^2 \bar{\xi}}{\partial u^2}, \frac{\delta \bar{\xi}}{\partial u}, \frac{\delta \bar{\xi}}{\partial v}\right)$$

gefunden. Dazu sollen zuerst $\frac{\delta^2 \bar{x}_l}{\partial u^2}, \frac{\delta^2 \bar{x}_l}{\partial u \partial v}, \frac{\delta^2 \bar{x}_l}{\partial v^2}$ mittels der Formeln (4)

$$\frac{\delta^2 \bar{x}_l}{\partial u^2} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\delta \bar{x}_l}{\partial u} + \sum_k \Lambda_{kl} \frac{\delta \bar{x}_k}{\partial u}$$

berechnet werden. Wegen

$$\frac{\delta \bar{x}_3}{\partial u} = \frac{\delta \bar{x}_3}{\partial v} = 0$$

genügt es, $\frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial u^2}, \frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial u \partial v}, \frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial v^2}$ zu bestimmen.

Es zeigt sich dann:

$$\frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial u^2} = c A_v; \qquad \frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial u \partial v} = F^2 (1 - c H); \qquad \frac{\delta^2 \bar{x}_3}{\partial v^2} = c D_u,$$

$$\bar{L} = c A_v \Phi; \qquad \bar{M} = F^2 (1 - c H) \Phi; \qquad \bar{N} = c D_u \Phi,$$

wo

$$\Phi = (1 - c H)^2 - \frac{A_v D_u}{F^2}. \tag{13}$$

Weiter ist

$$\bar{L}\bar{N} - \bar{M}^2 = F^4 \Phi^3.$$

Bekanntlich ist aber

14) $$H^2 - \frac{A_v D_u}{F^4} = K;$$ [2])

ir können daher Φ auch durch

15) $$\Phi = c^2 K - 2cH + 1$$

arstellen. Die gesuchte quadratische Differentialform hat dann die Gestalt

16) $$\bar{\varphi} = \frac{1}{F}\{cA_v du^2 + 2F^2(1 - cH)\,du\,dv + cD_u dv^2\}|\Phi|^{\frac{1}{4}}.$$

§ 4.

Wir nehmen jetzt an, es bestehe eine lineare Beziehung zwischen K und H:

17) $$\alpha K + 2\beta H + \gamma = 0,$$

nd betrachten sukzessive die beiden möglichen Fälle $\alpha\gamma - \beta^2$ gleich Null nd $\alpha\gamma - \beta^2$ von Null verschieden

$$(\mathrm{I}) \qquad \alpha\gamma - \beta^2 \neq 0.$$

Wir betrachten nur den Fall, wo $\alpha\gamma - \beta^2$ eine negative Konstante st (der Fall, wo $\alpha\gamma - \beta^2$ eine positive Konstante ist, gibt keinen wesentichen Unterschied), also

18[I]) $$\alpha\gamma - \beta^2 = -h^2\beta^2;$$

ür c wählen wir den Wert

$$c = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Dann ist

15[I]) $$\Phi = \frac{1}{\beta^2}(\alpha^2 K + 2\alpha\beta H + \alpha\gamma) + \frac{\beta^2 - \alpha\gamma}{\beta^2} = h^2,$$

nd die quadratische Differentialform von $(\bar{S})$ hat die einfache Gestalt

16[I]) $$\bar{\varphi} = \frac{h^{\frac{1}{2}}}{F}\left\{cA_v du^2 + 2F^2(1 - cH)\,du\,dv + D_u dv^2\right\}.$$

Die Konstante β ist hier von Null verschieden gedacht.

Im Punkte $\bar{\mathfrak{x}}$ dieser Fläche bilden wir den Affinnormalenvektor

$$\bar{\mathfrak{y}} = \frac{1}{2}\Delta(\bar{\mathfrak{x}}),$$

den wir hier in folgender Weise schreiben wollen:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}}\left\{\frac{\delta}{\partial u}\frac{\bar{F}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial v} - \bar{G}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial u}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}} + \frac{\delta}{\partial v}\frac{\bar{F}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial u} - \bar{E}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial v}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}}\right\}.$$

[2]) W. Blaschke, Differentialgeometrie II, S. 164.

Mittels der Formeln (4) und (12) findet man leicht

$$\bar{y}_1 = \bar{y}_2 = 0; \qquad \bar{y}_3 = h^{-\frac{1}{2}} F.$$

Wenn die Identität (17) *besteht und wenn für c ein passender We gewählt wird, fällt in jedem Punkte* $\bar{M}$ *der Parallelfläche* $(\bar{S})$ *die Affi normale mit der Affinnormale im korrespondierenden Punkte M zusamme*

Ist in (17) $\alpha = 0$ und (S) also eine Fläche konstanter mittler Krümmung $(H \neq 0)$, so fällt $(\bar{S})$ mit (S) zusammen.

Wir haben β von Null verschieden angenommen; im anderen Fall m. a. W. wenn (S) konstantes Krümmungsmaß hat, wollen wir sage daß $(\bar{S})$ ins Unendliche verschwindet.

Sind endlich K und H beide konstant, so ist Φ für jeden Wert von eine Konstante und (S) und alle ihre Parallelflächen haben ein gemei schaftliches Affinnormalensystem.

§ 5.

Um die Beziehungen zwischen den Invarianten K, H und $\bar{K}$, $\bar{H}$ ab zuleiten, kehren wir noch einmal zu den Formeln (11) zurück. Um di zu M gehörigen Hauptkrümmungsmittelpunkte von (S) zu finden, müsse $\frac{du}{dv}$ und R so bestimmt werden, daß

$$\delta x_1 \equiv (1 - RH)\,du + R\frac{D_u}{F^2}\,dv = 0,$$

$$\delta x_2 \equiv R\frac{A_v}{F^2}\,du + (1 - RH)\,dv = 0.$$

Die Hauptkrümmungsmittelpunkte haben also die Koordinate $(0, 0, RF)$, wenn R eine Wurzel von

$$(19) \qquad (1 - RH)^2 - R^2\frac{A_v D_u}{F^4} \equiv KR^2 - 2HR + 1 = 0$$

ist. Aber dieselben Punkte sollen gefunden werden, wenn man vom Punkte $\bar{M}$ auf der Fläche $(\bar{S})$ ausgeht.

Also ist

$$(20) \qquad RF = cF + \bar{R}\,\bar{y}_3$$

$$R = c + h^{-\frac{1}{2}}\bar{R},$$

wo $\bar{R}$ eine Wurzel von

$$(21) \qquad \bar{K}\bar{R}^2 - 2\bar{H}\bar{R} + 1 = 0$$

ist.

Weil nun durch die Substitution (20) die Gleichung (19) in (21) übergeführt werden soll, folgt mittels (15) und (15[1])

$$\bar{K} = \frac{K}{h^3}; \qquad \bar{H} = \frac{H - cK}{h^{\frac{3}{2}}}$$

nd

$$h c^2 \overline{K} + h^{\frac{1}{2}} c \overline{H} + 1 = \frac{1}{h^2}.$$

Wir können nun unsere Resultate folgendermaßen zusammenfassen: *Es sei eine lineare Beziehung zwischen dem Krümmungsmaß und der mittleren Krümmung gegeben:*

$$\alpha K + 2\beta H + \gamma = 0 \qquad (\alpha\gamma - \beta^2 \neq 0),$$

welche wir in folgende Form überführen:

$$c^2 K - 2cH + 1 = h.$$

Wir bestimmen zwei neue Konstanten $\bar{h}$ und $\bar{c}$

$$\left.\begin{aligned} \bar{h} &= \frac{1}{h} \\ \bar{c} &= c\sqrt{h} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} h &= \frac{1}{\bar{h}} \\ c &= \bar{c}\sqrt{\bar{h}} \end{aligned}\right\}.$$

Dann gilt für die Parallelfläche $(\bar{S})$, die das nämliche Affinnormalensystem wie (S) hat:

$$\bar{c}^2 \overline{K} - 2\bar{c}\overline{H} + 1 = \bar{h}^2.$$

Weiter ist

$$\left.\begin{aligned} \overline{K} &= \frac{K}{h^3} \\ \overline{H} &= \frac{H - cK}{h^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} K &= \frac{\overline{K}}{\bar{h}^3} \\ H &= \frac{\overline{H} - \bar{c}\overline{K}}{\bar{h}^{\frac{5}{2}}} \end{aligned}\right\}.$$

§ 6.

Es bestehe wieder die Relation

$$\alpha K + 2\beta H + \gamma = 0;$$

aber es sei nun

$$\text{II} \qquad \alpha\gamma - \beta^2 = 0.$$

Wir betrachten wieder die Parallelfläche $(\bar{S})$, bestimmt durch

$$c = -\frac{\alpha}{\beta}.$$

Dann ist

$$15^{\text{II}}) \qquad \Phi = c^2 K - 2cH + 1 = \frac{1}{\beta^2}(\alpha^2 K + 2\alpha\beta H + \alpha\gamma) = 0,$$

d. h.

$$\left(\frac{c}{R_1} - 1\right)\left(\frac{c}{R_2} - 1\right) = 0.$$

Der eine von den beiden Hauptkrümmungsradien von (S) *ist al konstant;* $(\bar{S})$ *ist keine eigentliche Fläche, sondern zusammengeschrump auf einer Kurve, die zu gleicher Zeit eine entartete Evolutenfläche v* (S) *ist.*

§ 7.

Zum Schluß betrachten wir den allgemeinen Fall, daß nicht von vorn herein eine lineare Beziehung zwischen K und H gegeben ist. Die erst invariante Differentialform von $(\bar{S})$ ist immer

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{F}\left\{c A_v du^2 + 2F^2(1 - cH)\,du\,dv + c D_u dv^2\right\} |\Phi|^{\frac{1}{4}},$$

wo

$$\Phi = c^2 K - 2cH + 1.$$

Es sei angenommen, Φ sei in der Umgebung vom betrachtete Punkte M positiv.

Der Affinnormalenvektor wird wie zuvor berechnet:

$$\bar{y}_k = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}}\left\{\frac{\delta}{\partial u}\,\frac{\bar{F}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial v} - \bar{G}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial u}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}} + \frac{\delta}{\partial v}\,\frac{\bar{F}\frac{\delta \bar{x}_k}{\partial u} - \bar{E}\frac{\delta x_k}{\partial v}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}}\right\}.$$

Dabei ist

$$\bar{F}^2 - \bar{E}\,\bar{G} = F^2\,\Phi^{\frac{3}{2}};$$

$$\frac{\bar{F}\frac{\delta x_1}{\partial v} - \bar{G}\frac{\delta x_1}{\partial u}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}} = 0; \qquad \frac{\bar{F}\frac{\delta \bar{x}_2}{\partial v} - \bar{G}\frac{\delta x_2}{\partial u}}{\sqrt{\bar{F}^2 - \bar{E}\bar{G}}} = \Phi^{\frac{1}{2}} \quad \text{usw}$$

Dann finden wir mittels (4):

$$\bar{y}_1 = \frac{1}{4F\Phi^{\frac{5}{4}}}\,\frac{\partial \Phi}{\partial v}; \qquad \bar{y}_2 = \frac{1}{4F\Phi^{\frac{5}{4}}}\,\frac{\partial \Phi}{\partial u}; \qquad \bar{y}_3 = \frac{F}{\Phi^{\frac{1}{4}}}.$$

Nur wenn $\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$, *d. h. wenn eine lineare Beziehung zwische* K *und* H *besteht, hat eine der Parallelflächen* $(\bar{S})$ *dasselbe Affinnormalen system wie* S.

§ 8.

Wird der Punkt M festgehalten und beschreibt $\bar{M}$ die Affinnormale zu (S) in M, wird m. a. W. c als ein Parameter betrachtet, so beschreibt die Affinnormale in $\bar{M}$ eine Regelfläche, dargestellt durch

$$\frac{X_1}{4\frac{\partial \Phi}{\partial v}} = \frac{X_2}{4\frac{\partial \Phi}{\partial u}} = \frac{X_3 - cF}{F^2\,\Phi},$$

der durch

$$24) \qquad \begin{cases} X_1 = 4\varrho(c^2 K_v - 2cH_v), \\ X_2 = 4\varrho(c^2 K_u - 2cH_u), \\ X_3 = cF + \varrho F^2(c^2 K - 2cH + 1). \end{cases}$$

Durch Elimination von ϱ und c zeigt sich, daß dieser Ort der Affinormalen eine Regelfläche dritter Ordnung ist mit der Affinnormalen in M als Doppelgerade.

Im früher erörterten Falle, wo eine lineare Beziehung zwischen K und H besteht:

$$c_0^2 K - 2c_0 H + 1 = h^2$$

wir schreiben c_0 statt c, das jetzt eine Variable ist), ist jedoch

$$2H_v = c_0 K_v; \qquad 2H_u = c_0 K_u,$$

nd die Parameterdarstellung (24) vereinfacht sich zu

$$X_1 = 4\varrho c(c - c_0) K_v,$$
$$X_2 = 4\varrho c(c - c_0) K_u.$$

Setzen wir also

$$\frac{K_v}{K_u} = \frac{H_v}{H_u} = \mu,$$

o *ist in diesem Falle der Ort der Affinnormalen die Ebene*

$$X_1 - \mu X_2 = 0.$$

(Eingegangen am 30. Juli 1925.)

Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik.

Zweite Abhandlung[1]).

Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten.

Von

Leon Lichtenstein in Leipzig.

In der vorliegenden zweiten Abhandlung wird gezeigt, daß die in der ersten Arbeit dargelegte Integrationsmethode, in geeigneter Weise ausgestaltet, auch in der Theorie ideeller, inkompressibler, *nichthomogener* Flüssigkeiten zu einem Existenzbeweise der Lösung führt. Wie a. a. O. handelt es sich dabei um eine sich allseitig ins Unendliche erstreckende oder aber in einem in bekannter Weise bewegten, geschlossenen Gefäß, das sich auch deformieren kann, enthaltene Flüssigkeitsmasse. Auch ist die Bewegung einer unbegrenzten, nichthomogenen Masse ideeller Flüssigkeit, in die *frei bewegliche* feste Körper eingetaucht sind, der Methode zugänglich. Die Dichte der Flüssigkeit wird als stetig vorausgesetzt. Desgleichen wird das Geschwindigkeitsfeld zu einer Zeit t_0 als stetig angenommen. Handelt es sich insbesondere um eine den Gesamtraum ausfüllende Flüssigkeitsmasse, so dürfen die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Komponenten der Anfangsgeschwindigkeit u_0, v_0, w_0 auf vorgegebenen Flächen sprungweise Unstetigkeiten erleiden. Insbesondere kann das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_0 in einem Teile des von der Flüssigkeit eingenommenen Bereiches im Raume a, b, c wirbelfrei sein, während in dem übrigen Teile der Wirbelvektor ξ_0, η_0, ζ_0 von Null verschieden ist und auf vorgegebenen Flächen sprungweise Änderungen erleidet. Diese Unstetigkeiten affizieren freilich, da u_0, v_0, w_0 und darum auch ihre

---

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze, Math. Zeitschrift **23** (1925), S. 89–154; S. 309–316. Zum Verständnis der folgenden Ausführungen ist die Kenntnis der ersten Abhandlung nicht erforderlich.

Tangentialkomponenten stetig sind, jedesmal nur die Tangentialkomponenten des Wirbelvektors. Im Gegensatz zu den Annahmen der ersten Abhandlung können die Wirbellinien, falls die Flüssigkeit an feste Körper (Wandungen oder eingetauchte Körper) angrenzt, auch an diesen *endigen*[2]).

Da die Flüssigkeit inhomogen oder, besser gesagt, nicht notwendig homogen ist, die wirkenden Kräfte überdies nicht notwendig eine Kräftefunktion haben, so gelten die Cauchyschen Formeln sowie die Helmholtzschen Sätze nicht mehr. Wir gehen darum von den Formeln von A. Friedmann aus, welche die Cauchyschen Formeln in gewisser Hinsicht verallgemeinern[3]). Die Behandlung wird jetzt komplizierter, um so mehr als zur Bestimmung des Druckes, der im Falle einer homogenen Flüssigkeit sich vollkommen eliminieren ließ, eine spezielle, nicht ganz einfache Integro-Differentialgleichung herangezogen werden muß. Natürlich sind die Ergebnisse der ersten Abhandlung, soweit sie sich auf das betrachtete Existenzproblem beziehen (Kapitel I der ersten Abhandlung), in den Ausführungen der vorliegenden Arbeit mit enthalten.

Der Existenzbeweis stützt sich wie a. a. O. wesentlich auf einige neue potentialtheoretische Hilfssätze besonderer Natur. Einige allgemeine Sätze dieser Art habe ich vor kurzem in der Abhandlung: Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie I (Math. Zeitschrift **23** (1925), S. 72—88) veröffentlicht. Die neuerdings erschienenen Mitteilungen II und III (Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften **78** (1926), S. 147—212; S. 213—239) bringen eine Reihe weiterer Sätze. Diese Sätze kommen bei zahlreichen höheren Randwertproblemen zur Verwendung, dürften aber auch an sich nicht ohne Interesse sein[4]). Die Benutzung der genannten Sätze macht die Betrachtungen der vorliegenden Arbeit verhältnismäßig einfach. Die durch sukzessive Approximationen gewonnenen Reihen konvergieren wie geometrische Reihen.

Einen breiten Raum in den Ausführungen des ersten Kapitels nimmt die Untersuchung einer besonderen linearen Integralgleichung ein. Diese der Fredholmschen Theorie nicht ohne weiteres zugängliche Integralgleichung steht in naher Beziehung zu dem Problem der Auflösung der sich selbst adjungierten, elliptischen Differentialgleichung

---

[2]) Vgl. den § 5 des ersten Kapitels, S. 116.

[3]) Vgl. A. Friedmann, a) C. R. **163** (1916), S. 219—222, b) Mitt. der Math. Ges. Charkow, 6 S. (russisch, abgeschlossen 1915).

[4]) Man vergleiche meine Arbeiten über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten und die Gestalt der Himmelskörper in der Math. Zeitschrift und in der Festschrift für H. v. Seeliger (Berlin, bei Julius Springer, 1924). Dort werden die Konvergenzbeweise unter Zuhilfenahme von Beziehungen geführt, die als Spezialfälle in den neuerdings aufgestellten allgemeinen Sätzen enthalten sind.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial z}\right)=g \quad (\varrho=\text{Flüssigkeitsdichte})$$

in dem Gesamtraume der Variablen x, y, z unter geeigneten Voraussetzungen im Unendlichen. Diese Betrachtungen bieten, auch unabhängig von dem Hauptproblem, einiges Interesse.

Die Entwicklungen der Arbeit sind so angelegt, daß bei dem Existenzbeweis im wesentlichen nur diejenigen partiellen Ableitungen der Lösung, die in den Euler-Lagrangeschen Differentialgleichungen auftreten, tatsächlich gebraucht werden. Dies bedingt einige Weitläufigkeit in der Einzeldurchführung, so z. B. beim Beweis, daß die Lösung der Integro-Differentialgleichungen des Problems den Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik genügen, aber auch schon bei der Aufstellung dieser Integro-Differentialgleichungen. In der ersten Abhandlung sind diese Komplikationen dadurch vermieden, daß von vornherein mit partiellen Ableitungen zweiter Ordnung operiert wurde. Dadurch werden aber alle Formeln schwerfälliger, auch müssen entsprechend weiter reichende potentialtheoretische Hilfssätze in Anspruch genommen werden.

Das in dem ersten Kapitel behandelte Problem ist in dem besonderen Falle einer homogenen, unter der Einwirkung konservativer Kräfte befindlichen Flüssigkeit von Herrn Günther in einer vor kurzem erschienenen Arbeit erledigt worden[5]). Auch Herr Günther bedient sich des Verfahrens der sukzessiven Approximationen, geht aber nicht von den Cauchyschen Ausdrücken für die Wirbelkomponenten aus, sondern bestimmt den Druck aus der Gleichung, in die die Gleichung (57) des ersten Kapitels in dem von ihm betrachteten speziellen Falle übergeht, und benutzt alsdann die Eulerschen Gleichungen selbst als Ausgangspunkt. Es gelingt Herrn Günther, den Konvergenzbeweis zu erbringen, ohne potentialtheoretische Hilfssätze von der Art der von mir gebrauchten anzuwenden. Der Konvergenzbeweis wird dadurch freilich umständlicher, auch wird

[5]) Siehe N. Günther, Über ein Hauptproblem der Hydrodynamik, Math. Zeitschrift 24 (1925), S 448–499, sowie die vorläufige Mitteilung in den R. C. 177 (1923), S. 865–868. Eine Lösung dieses Problems findet sich im wesentlichen in den §§ 1–4 meiner ersten Abhandlung. Auf die Beziehungen, die zwischen den Arbeiten von Herrn Günther und meinen eigenen Untersuchungen bestehen, habe ich auf S. 92 der ersten Abhandlung, insbesondere in der Fußnote [7]), hingewiesen.

Die Untersuchungen von Herrn Günther werden fortgesetzt. Wie aus einer neuerdings in russischer Sprache erschienenen Note und einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Günther hervorgeht, beziehen sich seine Ergebnisse auf eine homogene, in einem in bekannter Weise bewegten Gefäß eingeschlossene Flüssigkeit. In dem zweiten Kapitel der vorliegenden Arbeit wird, wie vorhin erwähnt, der allgemeinere Fall einer nicht notwendig homogenen Flüssigkeit und der gleichen Grenzbedingungen erledigt.

nicht gezeigt, daß die durch sukzessive Näherungen gewonnenen Reihen wie geometrische Reihen konvergieren.

Nachdem in den drei ersten Kapiteln die Existenzsätze erbracht worden sind, wird in dem vierten Kapitel gezeigt, daß die Bewegung in einem a. a. O. genau präzisierten Sinne *von dem Anfangszustande und den Grenzbedingungen stetig abhängt.* Auch hierbei spielen die vorhin genannten potentialtheoretischen Sätze eine Hauptrolle.

Inhaltsübersicht.

Einleitung.

Erstes Kapitel. Eine sich allseitig ins Unendliche erstreckende Flüssigkeitsmasse.

§ 1. Problemstellung.
§ 2. Umformung der Bewegungsgleichungen.
§ 3. Fortsetzung.
§ 4. Untersuchung einer linearen Integralgleichung.
§ 5. Fortsetzung.
§ 6. Fortsetzung.
§ 7. Existenzbeweis der Lösung des hydrodynamischen Problems durch sukzessive Approximationen.
§ 8. Fortsetzung.
§ 9. Fortsetzung.
§ 10. Schluß des Existenzbeweises und der Unitätssatz.

Zweites Kapitel. Eine in einem zwangläufig bewegten Gefäß eingeschlossene Flüssigkeitsmasse.

§ 1. Problemstellung. Umformung der Bewegungsgleichungen.
§ 2. Sukzessive Näherungen.
§ 3. Konvergenzbeweis.
§ 4. Fortsetzung.
§ 5. Ergänzungen und Erweiterungen.

Drittes Kapitel. Eine allseitig unbegrenzte oder in einem Gefäß eingeschlossene Flüssigkeitsmasse mit eingetauchten frei beweglichen starren Körpern.

Viertes Kapitel. Abhängigkeit der Bewegung von dem Anfangszustande und den Grenzbedingungen.

Schlußbemerkungen.

Erstes Kapitel.

Eine sich allseitig ins Unendliche erstreckende Flüssigkeitsmasse.

§ 1.

Problemstellung.

Wir wollen die Aufgabe, die uns zunächst beschäftigen soll, wie folgt präzisieren.

Es handelt sich um eine allseitig sich ins Unendliche erstreckende Masse inkompressibler, reibungsloser, nicht notwendig homogener Flüssigkeit. Wie man weiß, bleibt die Dichte ϱ bei der Bewegung eines Flüssigkeitsteilchens unverändert, sie haftet am Flüssigkeitsteilchen. Die Verteilung der Dichte zur Zeit t_0 gilt als bekannt. Wir nehmen an, daß die Ortsfunktion ϱ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig ist und $\frac{\partial \varrho}{\partial a}, \frac{\partial \varrho}{\partial b}, \frac{\partial \varrho}{\partial c}$ einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ $(0 < \lambda < 1)$ genügen[6]). Es ist

$$\left|\frac{\partial \varrho}{\partial a}\right|, \left|\frac{\partial \varrho}{\partial b}\right|, \left|\frac{\partial \varrho}{\partial c}\right| \leqq \mathfrak{c}_1 (1 + R_0)^{-2},$$

$$(1) \quad \left|\frac{\partial \varrho}{\partial a}(a, b, c) - \frac{\partial \varrho}{\partial a}(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{c}_1 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda};$$

$$(R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2,\ \breve{R}_0^2 = \breve{a}^2 + \breve{b}^2 + \breve{c}^2,\ \breve{d}^2 = (a-\breve{a})^2 + (b-\breve{b})^2 + (c-\breve{c})^2);$$

hier bezeichnet $\mathfrak{c}_1$ eine Konstante, wie später $\mathfrak{c}_2$, $\mathfrak{c}_3$ usw.[7]) Durch die Ungleichheiten (1) ist das Verhalten der Dichte für $R_0 \to \infty$ charakterisiert. Augenscheinlich konvergiert ϱ für $R_0 \to \infty$ gegen einen festen Wert ϱ_∞.

Des weiteren gilt das Geschwindigkeitsfeld zur Zeit t_0 als bekannt.

Wir denken uns im Raume a, b, c ganz im Endlichen eine Anzahl doppelpunktloser, geschlossener Flächen mit stetiger Normale $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$, die einander weder schneiden noch berühren, und deren Gesamtheit kurz mit S_0 bezeichnet werden soll, gegeben. Es wird angenommen, daß die Richtungskosinus der Normale zu S_0 einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügen. In Formeln: sind $\alpha_0^{(1)}, \beta_0^{(1)}, \gamma_0^{(1)}$ und $\alpha_0^{(2)}, \beta_0^{(2)}, \gamma_0^{(2)}$ die Kosinus der von der Normale in den Punkten $P_0^{(1)}$ und $P_0^{(2)}$ auf S_0 mit

---

[6]) Diese Voraussetzungen können durch ein wenig allgemeinere ersetzt werden; $\frac{\partial \varrho}{\partial a}, \frac{\partial \varrho}{\partial b}, \frac{\partial \varrho}{\partial c}$ dürfen auf den Flächen $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$ sprungweise Änderungen erleiden.

[7]) Durch die Punkte in (1) soll angedeutet werden, daß die gleichen Ungleichheiten für $\left|\frac{\partial \varrho}{\partial b}(a, b, c) - \frac{\partial \varrho}{\partial b}(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})\right|$, $\left|\frac{\partial \varrho}{\partial c}(a, b, c) - \frac{\partial \varrho}{\partial c}(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})\right|$ gelten.

den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel, ist δ_{12}^0 der Abstand dieser Punkte, so ist

$$|\alpha_0^{(1)} - \alpha_0^{(2)}|, |\beta_0^{(1)} - \beta_0^{(2)}|, |\gamma_0^{(1)} - \gamma_0^{(2)}| \leqq c_0 (\delta_{12}^0)^{\lambda} \quad (c_0 \text{ konstant}). \tag{2}$$

Vorausgesetzt wird hierbei, daß $P_0^{(1)}$ und $P_0^{(2)}$ derselben Flächenschale angehören und die Richtung der Normale zu S_0 irgendwie in stetiger Weise festgelegt ist.

Durch $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$ wird der Raum a, b, c in $n+1$ Bereiche $T_{01}, \ldots, T_{0,n+1}$ zerlegt, von denen einer den unendlich fernen Punkt enthält [8]).

Wir nehmen an, daß die Komponenten u_0, v_0, w_0 der Geschwindigkeit zur Zeit t_0 überall stetig sind und sich im Unendlichen wie $O(R^{-1})$ verhalten. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind in jedem einzelnen der Bereiche T_{0i}, mit Einschluß des Randes, stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Beim Passieren der Flächen $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$ können sich $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ sprungweise ändern. Es gelten Beziehungen von der Form

$$\begin{gathered} |u_0|, \ldots \leqq c_2 (1 + R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial u_0}{\partial a}\right|, \ldots \leqq c_2 (1 + R_0)^{-2}, \\ \left|\frac{\partial u_0}{\partial a}(a,b,c) - \frac{\partial u_0}{\partial a}(\breve{a},\breve{b},\breve{c})\right|, \ldots \leqq c_2 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda}. \end{gathered} \tag{3}$$

Durch die Beziehungen (3) ist das Verhalten von u_0, v_0, w_0 im Unendlichen festgelegt.

Die Komponenten des Wirbelvektors

$$\xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}\right)$$

sind in jedem Bereiche T_{0i}, Randflächen eingeschlossen, stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Im Unendlichen verschwinden ξ_0, η_0, ζ_0 wie $O(R^{-2})$. Augenscheinlich ist ferner

$$\begin{gathered} |\xi_0|, \ldots \leqq c_3 (1 + R_0)^{-2}, \\ |\xi_0(a,b,c) - \xi_0(\breve{a},\breve{b},\breve{c})|, \ldots \leqq c_3 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda}. \end{gathered} \tag{4}$$

[8]) Wir verstehen unter einem „Gebiet" in bekannter Weise eine zusammenhängende, nur aus inneren Punkten bestehende Punktmenge. Unter einem „Bereich" wird ein Gebiet mit Einschluß des Randes („abgeschlossenes Gebiet") verstanden. Der Deutlichkeit halber wird später trotzdem nicht selten ausdrücklich von einem „Bereich, den Rand mitbegriffen" u. dgl. gesprochen, was nach dem vorstehenden eigentlich eine Tautologie darstellt. Unter einem Teil eines Bereiches verstehen wir einen Bereich, der ganz dem erstgenannten Bereich angehört. Beide können auf dem Rande gelegene Punkte gemeinsam haben. Es sei $\mathfrak{T}$ ein Gebiet, $\mathfrak{S}$ sein Rand. Wir sprechen bald von einem Bereich $\mathfrak{T}$, bald, wenn hervorgehoben werden soll, daß $\mathfrak{S}$ sein Rand ist, von dem Bereich $\mathfrak{T} + \mathfrak{S}$.

Auf S_0 können $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ sprungweise Unstetigkeiten erleiden. Wie be reits bemerkt, ändern sich die Tangentialableitungen von u_0, v_0, w_0 beim Durchgang durch S_0 stetig. Dies hat zur Folge, daß die Normalkom ponente des Wirbelvektors auch noch auf S_0 stetig ist. Da wir mit einer inkompressiblen Flüssigkeit zu tun haben, so ist

$$\frac{\partial u_0}{\partial a} + \frac{\partial v_0}{\partial b} + \frac{\partial w_0}{\partial c} = 0. \tag{5}$$

Wir haben vorhin vorausgesetzt, daß die partiellen Ableitungen der Dichte $\frac{\partial \varrho}{\partial a}, \ldots$ überall stetig sind. Allgemeiner könnte man annehmen, daß ϱ überall stetig ist und $\frac{\partial \varrho}{\partial a}, \frac{\partial \varrho}{\partial b}, \frac{\partial \varrho}{\partial c}$ in jedem Bereiche T_{0i}, die Rand flächen eingeschlossen, stetig sind und der H-Bedingung genügen. (Vgl. die Fußnote [6]).)

Soviel über den Anfangszustand. Nun der allgemeine Charakter der Bewegung. Wir denken uns diese unter Benutzung der Lagrangeschen Variablen durch die Gleichungen

$$x = x(a, b, c, t), \quad y = y(a, b, c, t), \quad z = z(a, b, c, t) \tag{6}$$

gegeben. Offenbar ist

$$x(a, b, c, t_0) = a, \quad y(a, b, c, t_0) = b, \quad z(a, b, c, t_0) = c. \tag{7}$$

Von den Funktionen (6) wird vorausgesetzt, daß sie überall stetig sind und in jedem der Bereiche T_{0i}, den Rand allemal eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung mit dem Exponenten λ genügende partielle Ab leitungen erster Ordnung haben. Auf S_0 sind natürlich die Tangential ableitungen stetig, nur die Normalableitungen können einen Sprung erleiden. Des weiteren wird vorausgesetzt, daß die Geschwindigkeitskomponenten

$$u = \frac{dx}{dt}, \quad v = \frac{dy}{dt}, \quad w = \frac{dz}{dt} \tag{8}$$

überall stetig sind. Sie ändern sich also beim Durchgang durch S_0 stetig.

Die ebenfalls vorhandenen partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial c} = \frac{\partial}{\partial c}\frac{dz}{dt} \tag{9}$$

sind in jedem Bereiche T_{0i}, die Randflächen eingeschlossen, stetig und er füllen daselbst eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Offenbar sind die Tangentialableitungen der Funktionen u, v, w stetig, nur die Normal ableitungen können einen Sprung erleiden [9]).

[9]) Hier werden u, v, w als Funktionen von a, b, c und t aufgefaßt.

Den Flächen $S_0^{(1)}, \ldots, S_0^{(n)}$ werden für alle hinreichend kleinen $t - t_0$ durch die Funktionen (6) gewisse Flächen $S^{(1)}, \ldots, S^{(n)}$, deren Gesamtheit mit S bezeichnet werden soll, zugeordnet. Diese Flächen haben denselben Stetigkeits- und topologischen Charakter wie die Flächen S_0: sie haben eine stetige Normale, die Richtungskosinus der Normale erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Durch die Flächen S wird der Raum x, y, z in $n+1$ Bereiche T_i, Bilder von T_{0i}, zerlegt.

Wir fassen jetzt u, v, w als Funktionen von x, y, z und t auf und schreiben

$$(10) \qquad u = u(x, y, z, t), \qquad v = v(x, y, z, t), \qquad w = w(x, y, z, t).$$

Die Funktionen (10) sind überall stetig und haben augenscheinlich in jedem Bereiche T_i, die Randflächen eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung

$$(11) \qquad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}; \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Die Tangentialableitungen von u, v, w sind auch noch auf S stetig, nur die Normalkomponenten können auf S (sprungweise) Unstetigkeiten erleiden. Die Wirbelkomponenten

$$(12) \qquad \xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \qquad \eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \qquad \zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

sind offenbar in allen T_i, der Rand eingeschlossen, stetig und erfüllen eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ bleibt gewiß beim Durchgang durch S stetig.

Als eine neue Voraussetzung führen wir die Existenz der partiellen Ableitungen

$$(13) \qquad \frac{du}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad \frac{dv}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, \qquad \frac{dw}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

ein. Wir nehmen an, daß sie in jedem Bereiche T_i, der Rand inbegriffen, stetig sind. Da u, v, w überall stetig sind, so sieht man leicht, daß $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ auch noch beim Durchgang durch S sich stetig ändern, demnach überall stetig sind.

Nun die Voraussetzungen über das Verhalten im Unendlichen, die hier den Charakter von Randbedingungen haben.

Wir nehmen an, daß die Funktionen $x - a$, $y - b$, $z - c$, $u = \frac{dx}{dt}$, v, w sich für $R_0 \to \infty$ wie $O(R_0^{-1})$, die Funktionen $\frac{\partial x}{\partial a} - 1, \frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial x}{\partial c}$; $\frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial b} - 1, \frac{\partial y}{\partial c}$; $\frac{\partial z}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial c} - 1$; $\frac{\partial u}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial c}$ wie $O(R_0^{-2})$ verhalten. Es

gelten für alle t in einem Intervalle $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ gleichmäßig die Be ziehungen

$$|x-a|,\ |y-b|,\ |z-c| \leqq c_4 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial a} - 1\right|, \left|\frac{\partial x}{\partial b}\right|, \ldots \leqq c_4 (1+R_0)^{-2}, \tag{14}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial a}(a,b,c) - \frac{\partial x}{\partial a}(\breve{a},\breve{b},\breve{c})\right|, \ldots \leqq c_4 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\, \breve{d}^{\lambda}$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial a}\right|, \ldots \leqq c_5 (1+R_0)^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial a}(a,b,c) - \frac{\partial u}{\partial a}(\breve{a},\breve{b},\breve{c})\right|, \ldots \leqq c_5 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\}\, \breve{d}^{\lambda} \tag{14*}$$

Aus (14) und (14*) folgen für hinreichend kleine $t - t_0$ ohne Schwierig keiten die weiteren Beziehungen

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c_6 (1+R)^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial u}{\partial x}(\breve{x},\breve{y},\breve{z})\right|, \ldots \leqq c_6 \{(1+R)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R})^{-2-\lambda}\}\, \breve{D}^{\lambda} \tag{15}$$

$(R^2 = x^2+y^2+z^2,\ \breve{R}^2 = \breve{x}^2+\breve{y}^2+\breve{z}^2,\ \breve{D}^2 = (x-\breve{x})^2+(y-\breve{y})^2+(z-\breve{z})^2)$

Betrachten wir noch einmal die Dichte ϱ. Als Ortsfunktion im Raume x, y, z aufgefaßt, ist ϱ im Endlichen stetig und hat in jedem Be reiche T_i, die Randflächen eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung ge nügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Auf S können $\frac{\partial \varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial y}$, $\frac{\partial \varrho}{\partial z}$ sprungweise Unstetigkeiten erleiden. Es ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ gleichmäßig

$$\left|\frac{\partial \varrho}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c_7 (1+R)^{-2},$$

$$\left|\frac{\partial \varrho}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial \varrho}{\partial x}(\breve{x},\breve{y},\breve{z})\right|, \ldots \leqq c_7 \{(1+R)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R})^{-2-\lambda}\}\, \breve{D}^{\lambda} \tag{16}$$

Soviel über die Dichte und die Komponenten der Geschwindigkeit

Was jetzt den Flüssigkeitsdruck $p = p(x, y, z, t)$ anlangt, so wird angenommen, daß der Druck überall stetig ist und in jedem Bereiche T_i die Randflächen eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung genügende par tielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ hat. Natürlich kann auf S nur die Normalableitung von p eine (sprungweise) Unstetigkeit erleiden [10]. Das Verhalten im Unendlichen wird durch die folgenden für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ gleichmäßig geltenden Beziehungen gekennzeichnet:

---

[10]) Wie sich alsbald zeigen wird (vgl. S. 28–36), sind übrigens $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ auch noch auf S stetig.

$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c_8 (1+R)^{-2},$$

(17)
$$\left|\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial p}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right|, \ldots \leqq c_8 \{(1+R)^{-2-\lambda} + (1+\bar{R})^{-2-\lambda}\} \bar{D}^{\lambda}.$$

Aus (17) folgt, daß p für $R \to \infty$ gegen einen bestimmten Wert konvergiert. Wir setzen

(18)
$$\lim_{R\to\infty} p = p_\infty,$$

unter p_∞ eine vorgeschriebene stetige Funktion der Zeit verstanden.

Was schließlich die auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte betrifft, so wollen wir hierüber folgende Annahmen machen. Die Komponenten der Einheitskräfte X, Y, Z, die nicht notwendig eine Kräftefunktion haben müssen und übrigens auch von der Zeit abhängen können, sind stetig und haben stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in bezug auf die Ortsvariablen: $\frac{\partial X}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$. Ihr Verhalten im Unendlichen wird durch die folgenden für alle t gleichmäßig geltenden Ungleichheiten charakterisiert:

(19)
$$|X|, \ldots \leqq c_9 (1+R)^{-3}; \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|, \ldots \leqq c_9 (1+R)^{-4}; \left|\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\right|, \ldots \leqq c_9 (1+R)^{-5},$$

$$\left|\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(x,y,z) - \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right|, \ldots \leqq c_9 \{(1+R)^{-5-\lambda} + (1+\bar{R})^{-5-\lambda}\} \bar{D}^{\lambda}.$$

Aus den Ungleichheiten (19) folgt, wie sich unschwer zeigen läßt,

(19)
$$\left|\frac{\partial X}{\partial x}(x,y,z) - \frac{\partial X}{\partial x}(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right|, \ldots \leqq c_{10} \{(1+R)^{-4-\lambda} + (1+\bar{R})^{-4-\lambda}\} \bar{D}^{\lambda}.$$

Haben die Einheitskräfte ein Potential, $U(x,y,z)$, so kann man die Voraussetzungen ein wenig erweitern. Man vergleiche hierüber die Ausführungen am Schluß des § 3.

Wir werden im folgenden beweisen, daß es *eine und nur eine für hinreichend kleine Werte von $t - t_0$ erklärte Flüssigkeitsbewegung gibt, die den vorstehenden Bedingungen genügt. Dies heißt also, daß es nur ein System für hinreichend kleine Werte von $t - t_0$ erklärter Funktionen $x(a,b,c,t)$, $y(a,b,c,t)$, $z(a,b,c,t)$, $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ gibt, die den Eulerschen Differentialgleichungen*

(20)
$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},\\
&\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

genügen und, wie vorhin ausgeführt, beschaffen sind.

Aus (20) folgt beiläufig, da $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ überall stetig sind, daß auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ die gleiche Eigenschaft haben.

Wir bedienen uns bei dem Existenzbeweise derjenigen Gleichungen, die man erhält, wenn man, von den hydrodynamischen Gleichungen ausgehend, die Ausdrücke für die Wirbelkomponenten ξ, η, ζ bildet. Man erhält so mit A. Friedmann Beziehungen, die zu den klassischen Cauchyschen Formeln analog sind und in diese übergehen, wenn $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$ gesetzt werden kann und ϱ konstant ist[11]). Die Friedmannschen Formeln bilden, vereint mit einer weiteren aus (20) abzuleitenden Beziehung, ein System von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung von $u, v, w, \xi, \eta, \zeta, p$. Sie lassen sich, wie weiter unten gezeigt wird, durch ein Verfahren sukzessiver Approximationen, das zu dem in der ersten Abhandlung benutzten ähnlich ist, auflösen. In § 10 wird sodann gezeigt, daß die Lösungsfunktionen zugleich die hydrodynamischen Gleichungen befriedigen und alle vorhin geforderten Eigenschaften haben. Es gibt kein anderes System der Lösungen dieser Art.

§ 2.

Umformung der Bewegungsgleichungen.

Aus den Bewegungsgleichungen

$$(21) \qquad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

folgen mit

$$(22) \qquad X\frac{\partial x}{\partial a} + Y\frac{\partial y}{\partial a} + Z\frac{\partial z}{\partial a} = A, \quad X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b} = B,$$
$$X\frac{\partial x}{\partial c} + Y\frac{\partial y}{\partial c} + Z\frac{\partial z}{\partial c} = C$$

[11]) Vgl. A. Friedmann, a) C. R. 163 (1916), S. 219–222, b) Mitt. der Math. Ges. Charkow, 6 S. (russisch, abgeschlossen 1915). Die zunächst folgenden Ausführungen des Textes bilden eine Modifikation der Darstellung von Herrn Appell in seinem Traité de Mécanique rationelle, Bd. III (1921), S. 596–599. Die Modifikationen sind durch die Notwendigkeit bedingt, nur diejenigen partiellen Ableitungen der Funktionen u, v, w p und ϱ einzuführen, deren Existenz vorausgesetzt worden ist. Friedmann betrachtet übrigens den allgemeineren Fall einer kompressiblen Flüssigkeit.

die weiteren Beziehungen

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}-A=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a},\\
&\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial b}-B=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b},\\
&\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial c}-C=-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c},
\end{aligned}\tag{23}$$

mithin auch

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0}^{t}\left(\frac{du}{dt}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{dv}{dt}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{dw}{dt}\frac{\partial z}{\partial a}\right)dt-A_1=-\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a}dt,\quad A_1=\int_{t_0}^{t}A\,dt.\\
&\cdots\cdots\cdots

Aus diesen Gleichungen folgt, daß

$$\left(u\frac{\partial x}{\partial a}-u_0+v\frac{\partial y}{\partial a}+w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\left(u\frac{\partial x}{\partial b}+v\frac{\partial y}{\partial b}-v_0+w\frac{\partial z}{\partial b}\right)db$$

$$+\left(u\frac{\partial x}{\partial c}+v\frac{\partial y}{\partial c}+w\frac{\partial z}{\partial c}-w_0\right)dc-d\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}(u^2+v^2+w^2)\,dt$$

(28)
$$-(A_1\,da+B_1\,db+C_1\,dc)-da\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt-db\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt$$

$$-dc\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt$$

ein totales Differential ist. Da der vierte Summand ein vollständiges Differential ist, so gilt für die Gesamtheit der übrigen Summanden das gleiche. Die eine der drei Integrabilitätsbedingungen ist, wenn wir zur Abkürzung

$$2\zeta_0=\frac{\partial v_0}{\partial a}-\frac{\partial u_0}{\partial b},$$

(29)
$$2\zeta^*=\int_{t_0}^{t}\left(-\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial Y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}+\frac{\partial Z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}\right)dt,$$

$$2\zeta_*=\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a}-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b}\right\}dt$$

setzen,

(30)
$$\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b}-\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a}+\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b}-\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a}$$

$$=2\zeta_0+2\zeta^*+2\zeta_*\ ^{12})$$

---

[12]) Dieser Punkt bedarf einer Erläuterung. Besitzen die Funktionen x, y, z, ϱ stetige Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf a, b, c, so folgt (30) unmittelbar aus den klassischen Integrabilitätsbedingungen, wobei sich die Glieder wie

$$u\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)-u\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right);\quad X\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{\partial x}{\partial a}\right)-X\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial x}{\partial b}\right)$$

und

$$-\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial^2}{\partial b\,\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt+\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial^2}{\partial a\,\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt$$

wegheben. Wir haben indessen die Existenz der obigen partiellen Ableitungen nicht vorausgesetzt und dürfen darum die klassische Integrabilitätsbedingung nicht ohne weiteres benutzen. Hier führt die folgende Überlegung zum Ziele.

Die Bedingung (30) sei nicht identisch erfüllt, und es möge etwa im Punkte a_0, b_0, c_0 der Ausdruck

(31)
$$\Lambda=\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b}-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a}+\ldots-2\zeta_0-2\zeta^*-2\zeta_*>0$$

(Fortsetzung der Fußnote 12 auf nächster Seite.)

Dazu kommen die beiden analogen Gleichungen

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c}-\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c}-\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}+\frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c}-\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\\&\qquad=2\xi_0+2\xi^*+2\xi_*,\\&\frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a}-\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c}+\frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a}-\frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c}+\frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a}-\frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c}\\&\qquad=2\eta_0+2\eta^*+2\eta_*\end{aligned}\tag{35}$$

sein. Es sei Γ eine geschlossene, stetig gekrümmte Kurve in der Ebene $c=c_0$, die überdies so beschaffen ist, daß in dem von Γ begrenzten endlichen Bereiche Θ, der Rand inbegriffen, alle in (31) eingehenden partiellen Ableitungen stetig sind und der Ausdruck Δ überdies $\geqq q>0$ ausfällt. Es seien x_n, y_n, z_n, ϱ_n vier Folgen analytischer Funktionen, die für alle Werte der Zeit in $\langle t_0, t\rangle$, alle (a,b) im Bereiche Θ und für $c=c_0$ die Funktionen $x(a,b,c,t)$, $y(a,b,c,t)$, $z(a,b,c,t)$, $\varrho(a,b,c)$ gleichmäßig approximieren. Zugleich sollen $\frac{\partial x_n}{\partial a},\ldots,\frac{\partial \varrho_n}{\partial b}$ gegen $\frac{\partial x}{\partial a},\ldots,\frac{\partial \varrho}{\partial b}$ gleichmäßig konvergieren. Für alle hinreichend großen n wird der Ausdruck

$$\begin{aligned}\Delta_n=&-\frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x_n}{\partial a}+\frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x_n}{\partial b}+\ldots+\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x_n}{\partial a}-\frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x_n}{\partial b}+\ldots\right)dt+\frac{\partial u_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial a}\\&+\int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial p}{\partial b}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho_n}\right)-\frac{\partial p}{\partial a}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho_n}\right)\right\}dt\geqq q_1>0\end{aligned}\tag{32}$$

ausfallen. Man sieht durch eine teilweise Integration leicht ein, daß

$$\begin{aligned}\int_{\Theta}\Delta_n\,da\,db=&\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial x_n}{\partial a}-u_0+v\frac{\partial y_n}{\partial a}+w\frac{\partial z_n}{\partial a}\right)da+\left(u\frac{\partial x_n}{\partial b}+v\frac{\partial y_n}{\partial b}-v_0+w\frac{\partial z_n}{\partial b}\right)db\\&-da\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho_n}\right)dt-db\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho_n}\right)dt\\&-\int_{t_0}^{t}dt\int_{\Gamma}\left(X\frac{\partial x_n}{\partial a}+Y\frac{\partial y_n}{\partial a}+Z\frac{\partial z_n}{\partial a}\right)da+\left(X\frac{\partial x_n}{\partial b}+Y\frac{\partial y_n}{\partial b}+Z\frac{\partial z_n}{\partial b}\right)db\geqq q_1\Theta\end{aligned}\tag{33}$$

ist, unter Θ den Flächeninhalt von Θ verstanden. Geht man jetzt zur Grenze $n\to\infty$ über, so findet man

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma}\left(u\frac{\partial x}{\partial a}-u_0+v\frac{\partial y}{\partial a}+w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da+\left(u\frac{\partial x}{\partial b}+v\frac{\partial y}{\partial b}-v_0+w\frac{\partial z}{\partial b}\right)db-A_1\,da-B_1\,db\\&\qquad-da\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt-db\int_{t_0}^{t}p\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt\geqq q_1\Theta.\end{aligned}\tag{34}$$

Tatsächlich müßte sich der Wert Null ergeben, da doch der Ausdruck (28) ein totales Differential ist und bei der Integration längs Γ natürlich $dc=0$ zu setzen ist. Wir sind zu einem Widerspruch gelangt.

mit

$$2\xi_0 = \frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}, \quad 2\xi^* = \int_{t_0}^{t} \left(- \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \dots \right) dt,$$

$$2\xi_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial c} \right\} dt,$$

(35*)

$$2\eta_0 = \frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}, \quad 2\eta^* = \int_{t_0}^{t} \left(- \frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \dots \right) dt,$$

$$2\eta_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a} \right\} dt.$$

Aus (30) und (35) erhält man, wenn man

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial a},$$

. . . . . .

setzt und wie bei der Ableitung der Cauchyschen Formeln vorgeht, die zu diesen analogen Formeln von Friedmann

$$\xi = (\xi_0 + \xi^* + \xi_*)\frac{\partial x}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^* + \eta_*)\frac{\partial x}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^* + \zeta_*)\frac{\partial x}{\partial c}$$
$$= \xi_0\frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial x}{\partial c},$$

$$\eta = (\xi_0 + \xi^* + \xi_*)\frac{\partial y}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^* + \eta_*)\frac{\partial y}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^* + \zeta_*)\frac{\partial y}{\partial c}$$
(36)
$$= \xi_0\frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial y}{\partial c},$$

$$\zeta = (\xi_0 + \xi^* + \xi_*)\frac{\partial z}{\partial a} + (\eta_0 + \eta^* + \eta_*)\frac{\partial z}{\partial b} + (\zeta_0 + \zeta^* + \zeta_*)\frac{\partial z}{\partial c}$$
$$= \xi_0\frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial z}{\partial c}.$$

Hier bezeichnen ξ, η, ζ die Komponenten des Wirbelvektors,

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{37}$$

Sind ξ, η, ζ bekannt, so sind, wie man weiß, auch u, v, w vollkommen bestimmt. Es ist aber zu beachten, daß in ξ_*, η_*, ζ_* der Druck eingeht. Die Aufstellung der Gleichungen (36) bedeutet also keine Elimination des Druckes. Nur wenn ϱ konstant ist, d. h. wenn eine homogene Flüssigkeit vorliegt, ist $\xi_* = \eta_* = \zeta_* = 0$, der Druck ist aus den Gleichungen (36) verschwunden.

Wie vorhin erwähnt, sind ξ, η, ζ in jedem Bereiche T_i, die Randflächen eingeschlossen, stetig. Auf S können ξ, η, ζ (sprungweise) Unstetigkeiten[13]) erleiden, doch bleibt die Normalkomponente des Wirbelvektors bei dem Durchgang durch S stetig. Das Verhalten der Funktionen u, v, w; ξ, η, ζ im Unendlichen ist durch die Beziehungen (15) gekennzeichnet. Aus (37) und aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{37*}$$

folgen die weiteren Beziehungen

$$\begin{aligned}
u(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau',\\
v(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau',\\
w(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau',
\end{aligned} \tag{38}$$

$$(\xi' = \xi(x',y',z'), \ldots, \quad r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2, \quad d\tau' = dx'dy'dz'),$$

wo die Integrationen über den gesamten Raum der Variablen x', y', z' erstreckt zu denken sind. Wir schreiben hier wie im folgenden zur Vereinfachung öfter $\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau', \ldots$ für $\int\eta'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau', \ldots$. Man beachte, daß die Ausdrücke $\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau', \ldots$ unter den von uns zugrunde gelegten Voraussetzungen nicht notwendig einen bestimmten Sinn haben.

Mit Rücksicht auf den verfügbaren Raum verzichten wir auf dieser Stelle auf den vollständigen Beweis der Gleichwertigkeit der Formeln (37) und (37*) einerseits, (38) andererseits. Dieser Beweis wird auf S. 262—265 in allen Einzelheiten durchgeführt werden.

§ 3.

Fortsetzung.

Da der Druck in die Größen ξ_*, η_*, ζ_* eingeht, brauchen wir noch eine weitere Gleichung. Diese erhalten wir aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - X = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - Z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned} \tag{38*}$$

auf folgendem Wege.

[13]) Man vergleiche meinen Aufsatz, Bemerkung zur Vektoranalysis, Bulletin de l'Académie Polonaise des sciences et des lettres (1926), woselbst sprungweise Un-

Es sei (x, y, z) irgendein Punkt im Raume der Variablen x, y, z und es mögen $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ zwei Kugelkörper um (x, y, z) als Mittelpunkt mit den Radien r_0 und $r > r_0$ bezeichnen; ihre Randflächen mögen $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}$ heißen. Es sei weiter q irgendeine in $\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0$ erklärte nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Funktion. Aus der Formel [14])

$$-\int_{\mathfrak{C}+\mathfrak{C}_0} \frac{p'}{\varrho'} \frac{\partial q'}{\partial n} d\sigma' = \int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial x'}p'\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial y'}p'\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial z'}p'\right)\right\} d\tau$$

$$(39) \qquad = \int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_0} p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial q'}{\partial z'}\right)\right\} d\tau'$$

$$+ \int_{\mathfrak{K}-\mathfrak{K}_0} \frac{1}{\varrho'} \left\{ \frac{\partial q'}{\partial x'}\frac{\partial p'}{\partial x'} + \frac{\partial q'}{\partial y'}\frac{\partial p'}{\partial y'} + \frac{\partial q'}{\partial z'}\frac{\partial p'}{\partial z'}\right\} d\tau'$$

folgt in bekannter Weise mit

$$q = \frac{1}{r}, \qquad r^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2,$$

wenn man zur Grenze $r_0 \to 0$, $r \to \infty$ übergeht und die Beziehungen (16) und (17) beachtet, mit Rücksicht auf

$$\frac{\partial^2}{\partial x'^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y'^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z'^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

die weitere Beziehung

$$(40) \quad 4\pi\left(\frac{p}{\varrho} - \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right) = \int p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau$$

$$+ \int \frac{1}{\varrho'} \left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau',$$

wo die Integrationen über den gesamten Raum der Variablen x', y', z' zu erstrecken sind. — Für die Gültigkeit dieser Formel genügt es, wenn man bezüglich des Verhaltens der Funktion p und ihrer partiellen Ableitungen im Unendlichen lediglich voraussetzt, daß $\lim_{R\to\infty} p = p_\infty$ existiert, sofern $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ nach wie vor den Ungleichheiten (16) genügen. In de

---

stetigkeiten der Funktionen ξ, η, ζ zugelassen werden. An der bezeichneten Stelle wird freilich angenommen, daß ξ, η, ζ in jedem Bereiche T_i, mit Einschluß des Randes, stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben.

[14]) Es sei daran erinnert, daß ϱ stetig ist, während $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \frac{\partial \varrho}{\partial y}, \frac{\partial \varrho}{\partial z}$ zwar in jedem Bereiche T_i, die Grenzflächen eingeschlossen, stetig sind, jedoch beim Passieren von T_i sich sprungweise ändern können. Die Funktion p ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig, doch würde (39), auch wenn $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ auf sprungweise Unstetigkeiten erleiden sollten, noch gültig bleiben.

Tat konvergiert auch jetzt noch die linke Seite der Gleichung (39) gegen $4\pi\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right)$, und da das erste Integral in (40) rechts existiert, so muß auch das zweite einen bestimmten Sinn haben. Übrigens konvergiert das zweite Integral, als $\lim_{r\to\infty}\int_{\mathfrak{K}}$ aufgefaßt, für alle (x, y, z) in jedem endlichen Bereiche gleichmäßig. Augenscheinlich ist es ferner nicht notwendig, daß $\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z}$ im Endlichen durchweg stetig sind; es hätte schon genügt, diese Ableitungen abteilungsweise stetig vorauszusetzen. Von diesen Bemerkungen werden wir bald eine Anwendung machen.

Das zweite Integral rechts in (40) läßt sich nun wegen (38*) nach einer Umordnung der Glieder wie folgt schreiben:

$$-\int\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial w'}{\partial t}\right\}d\tau'$$

$$+\int\left\{X'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)+Y'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)+Z'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$

1)
$$-\int\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right]+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}+w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right]\right\}d\tau'.$$

Diese Umordnung ist gestattet, da aus (38*), (15), (17) und (19) folgt, daß auch $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t}, \frac{\partial w}{\partial t}$ sich im Unendlichen wie $O(R^{-2})$ verhalten, so daß die drei Integralausdrücke in (41) gewiß eine bestimmte Bedeutung haben.

Das erste Integral rechterhand verschwindet. In der Tat, ist, unter $\mathfrak{K}_1$ einen alle Flächen S einschließenden Kugelkörper vom Radius r_1 um den Koordinatenursprung, unter $\mathfrak{C}_1$ seinen Rand, unter α, β, γ die von der Innennormale mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel verstanden,

$$-\int\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial w'}{\partial t}\right\}d\tau'$$

$$=-\lim_{r_1\to\infty}\int_{\mathfrak{K}_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial v'}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial w'}{\partial t}\right\}d\tau'$$

$$=-\lim_{r_1\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathfrak{K}_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)u'+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)v'+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)w'\right\}d\tau'$$

$$\text{n}_\infty\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)d\tau'+\lim_{r_1\to\infty}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{1}{r}\left(u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma'\right)d\sigma'.$$

Der vorletzte Integralausdruck ist wegen $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ gleich Null, der an letzter Stelle befindliche kann auch in der Form

$$\lim_{r_1\to\infty}\int_{\mathfrak{C}_1}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\cos\alpha'+\frac{\partial v'}{\partial t}\cos\beta'+\frac{\partial w'}{\partial t}\cos\gamma'\right)d\sigma'$$

geschrieben werden. Offenbar erhalten wir auch hier wegen $\frac{\partial u'}{\partial t} = O(R^{-2})$, ... den Wert Null.

Beachten wir schließlich, daß wegen $|X|, |Y|, |Z| = O(R^{-3})$ gewiß

$$\int \left\{ X' \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + Y' \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + Z' \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\tau' = -\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) d\tau' \tag{42}$$

gesetzt werden kann, so finden wir aus (40), (41) und (42)

$$\begin{aligned} 4\pi\left(\frac{p}{\varrho} - \frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right) &= \int p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) \right\} d\tau' \\ &\quad - \int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) d\tau' - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right] + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right] \right\} \end{aligned} \tag{43}$$

Der dritte Summand rechterhand, den wir zur Abkürzung mit M bezeichnen, läßt sich, wenn u, v, w stetige Ableitungen erster Ordnung und stetige, im Unendlichen wie $O(R^{-3})$ verschwindende Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen haben, zunächst durch teilweise Integration in das Volumintegral

$$\begin{aligned} \mathsf{M} &= \int \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'} + v'\frac{\partial u'}{\partial y'} + w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'} + v'\frac{\partial v'}{\partial y'} + w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z'}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'} + v'\frac{\partial w'}{\partial y'} + w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \right\} d\tau' \\ &= \int \frac{1}{r}\left\{ u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \right. \\ &\quad \left. + v'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) + w'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right) \right\} d\tau' \\ &\quad + \int \frac{1}{r}\left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2 + 2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'} + 2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'} + 2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'} \right\} d\tau' \end{aligned}$$

verwandeln. Wie man leicht sieht, ergeben nämlich die über die Kugeln $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_0$ erstreckten Oberflächenintegrale für $r_0 \to 0$, $r \to \infty$ den Wert Null. Indem wir den ersten Summanden noch einmal teilweise integrieren, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathsf{M} &= -\int \left(\frac{\partial u'}{\partial x'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{u'}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{v'}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{w'}{r}\right) \right\} d\tau' \\ &\quad + \int \frac{1}{r}\left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2 + 2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'} + 2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'} + 2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'} \right\} d\tau' \end{aligned}$$

und wegen $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$ endgültig

$$4)\quad \mathsf{M}=\int\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2+2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'}+2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'}+2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\}d\tau'.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß dieser Ausdruck gilt, auch wenn $\frac{\partial u}{\partial x},\ldots,\frac{\partial w}{\partial z}$ nur abteilungsweise stetig sind und bezüglich der Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\ldots,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$ nichts vorausgesetzt wird.

Es seien u_n, v_n, w_n $(n=1,2,\ldots)$ drei Folgen von Funktionen, die folgende Eigenschaften haben: 1. Sie sind überall im Endlichen nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung sind stetig oder zumindest abteilungsweise stetig. Es gilt für alle n gleichmäßig

$$(45)\quad |u_n|,|v_n|,|w_n|\leqq \mathfrak{d}_1(1+R)^{-1},\qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right|\leqq \mathfrak{d}_1(1+R)^{-2},$$

unter $\mathfrak{d}_1$ eine Konstante verstanden, wie später unter $\mathfrak{d}_2,\mathfrak{d}_3,\ldots$.

2. In jedem beschränkten Bereiche ist gleichmäßig

$$(46)\qquad u_n\to u,\quad v_n\to v,\quad w_n\to w.$$

In jedem beschränkten Bereiche, der keinen Punkt von S enthält, ist gleichmäßig

$$(47)\qquad \frac{\partial u_n}{\partial x}\to\frac{\partial u}{\partial x},\ \ldots,\ \frac{\partial w_n}{\partial z}\to\frac{\partial w}{\partial z}.$$

3. Es ist

$$(48)\qquad \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}\right|\leqq \mathfrak{d}^0(1+R)^{-3},$$

wo $\mathfrak{d}^0$ von n abhängen könnte.

Daß es, übrigens unendlich viele, Folgen dieser Art gibt, folgt mit Leichtigkeit aus den bekannten Sätzen über die Approximation von Funktionen mehrerer Argumente durch analytische Funktionen[15]). Es seien in der Tat $\mathfrak{K}^{(2)}$ und $\mathfrak{K}^{(1)}$ zwei Kugelkörper um den Koordinatenursprung mit den Radien $r^{(2)}$ und $r^{(1)}>r^{(2)}$. Wir denken uns $r^{(2)}$ so groß gewählt, daß alle Flächen S ins Innere von $\mathfrak{K}^{(2)}$ fallen. Es sei $u_n^{(1)}$ eine Folge analytischer und regulärer Funktionen, die im Innern und auf dem Rande von $\mathfrak{K}^{(1)}$ erklärt sind und daselbst u gleichmäßig approximieren, während zugleich $\frac{\partial u_n}{\partial x},\ldots,\frac{\partial w_n}{\partial z}$ in jedem Bereiche, der mit S keinen Punkt gemein-

[15]) Vgl. L. Tonelli, Sulla rappresentazione analitica delle funzioni di più variabili reali, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1910, S. 1–36.

sam hat, gegen $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ gleichmäßig konvergieren und übrigens für alle n gleichmäßig Ungleichheiten von der Form

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|, \ldots \left|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right| \leqq \mathfrak{d}_2 \tag{49}$$

genügen. Wir denken uns jetzt den Außenbereich von $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch eine Transformation mittelst reziproker Radien auf einen Kugelkörper $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ im Raume der Variablen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ abgebildet und fassen u als Ortsfunktion, $\bar{u}^{(2)}$, in $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ auf; $\bar{u}^{(2)}$ ist dort stetig, verschwindet im Koordinatenursprung und hat beschränkte, außer höchstens im Koordinatenanfang, stetige Ableitungen erster Ordnung. Nach bekannten Sätzen kann $\bar{u}^{(2)}$ durch eine Folge von Funktionen $\bar{u}_n^{(2)}$ beliebig approximiert werden, die im Innern und auf dem Rande von $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ analytisch sind und im Koordinatenursprung verschwinden; $\frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial z}$ konvergieren, außer höchstens im Ursprung, gleichmäßig gegen $\frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial y}, \frac{\partial \bar{u}^{(2)}}{\partial z}$ und erfüllen für alle n und alle $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ in $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ eine Ungleichheit von der Form

$$\left|\frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial x}\right|, \left|\frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial y}\right|, \left|\frac{\partial \bar{u}_n^{(2)}}{\partial z}\right| \leqq \mathfrak{d}_3. \tag{50}$$

Kehrt man nun zu dem Raume x, y, z zurück, so findet man eine Funktionenfolge $u_n^{(2)} = \bar{u}_n^{(2)}$, die außerhalb von $\mathfrak{K}^{(2)}$ die Bedingungen 1., 2., 3. erfüllt.

Wir setzen jetzt

$$u_n = \begin{cases} u_n^{(1)} \text{ in } \mathfrak{K}^{(2)}, \\ u_n^{(2)} \text{ außerhalb von } \mathfrak{K}^{(1)}, \\ u_n^{(1)} + \left\{3\left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{r}^{(1)} - \mathfrak{r}^{(2)}}\right)^2 - 2\left(\frac{\mathfrak{d}}{\mathfrak{r}^{(1)} - \mathfrak{r}^{(2)}}\right)^3\right\}(u_n^{(2)} - u_n^{(1)}) \text{ für } \mathfrak{r}^{(2)} \leqq R \leqq \mathfrak{r}^{(1)} \end{cases} \tag{51}$$

($\mathfrak{d}$ = Abstand des Punktes (x, y, z) von der Randfläche von $\mathfrak{K}^{(2)}$).

Die Funktionen u_n und die hierzu analogen Funktionen v_n, w_n erfüllen alle unsere Forderungen. Man sieht übrigens leicht, daß $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 w_n}{\partial z^2}$ sich auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ sprungweise ändern.

Nun ist, wie man unmittelbar sieht,

$$\mathsf{M} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{M}_n,$$

$$\mathsf{M}_n = -\int \left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u_n' \frac{\partial u_n'}{\partial x'} + v_n' \frac{\partial u_n'}{\partial y'} + w_n' \frac{\partial u_n'}{\partial z'}\right]\right. \tag{52}$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u_n' \frac{\partial v_n'}{\partial x'} + v_n' \frac{\partial v_n'}{\partial y'} + w_n' \frac{\partial v_n'}{\partial z'}\right] + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[u_n' \frac{\partial w_n'}{\partial x'} + v_n' \frac{\partial w_n'}{\partial y'} + w_n' \frac{\partial w_n'}{\partial z'}\right]\right\} d$$

Der auf S. 214—215 durchgeführten Umformung gemäß kann man M_n in der Form schreiben

$$(53)\quad \mathsf{M}_n = -\int\left(\frac{\partial u_n'}{\partial x'}+\frac{\partial v_n'}{\partial y'}+\frac{\partial w_n'}{\partial z'}\right)\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{u_n'}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{v_n'}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{w_n'}{r}\right)\right\}d\tau'$$
$$+\int\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u_n'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w_n'}{\partial z'}\right)^2+2\frac{\partial u_n'}{\partial y'}\frac{\partial v_n'}{\partial x'}+2\frac{\partial u_n'}{\partial z'}\frac{\partial w_n'}{\partial x'}+2\frac{\partial v_n'}{\partial z'}\frac{\partial w_n'}{\partial y'}\right\}d\tau'$$

Da nun für $n\to\infty$ in jedem beschränkten Bereiche, der keinen Punkt von S enthält, gleichmäßig

$$(54)\qquad \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}\right)\to\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0$$

ist und der Ausdruck links überdies für alle n gleichmäßig einer Ungleichheit von der Form

$$(55)\qquad \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}+\frac{\partial v_n}{\partial y}+\frac{\partial w_n}{\partial z}\right|\leqq \mathfrak{d}_4(1+R)^{-2}$$

genügt, so finden wir durch Grenzübergang, $n\to\infty$

$$(56)\qquad \mathsf{M}=\lim_{n\to\infty}\mathsf{M}_n=\int\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'}+2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'}+2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\}d\tau',$$

w. z. b. w.

Die Formel (43) läßt sich nunmehr in der Form schreiben

$$(57)\qquad 4\pi\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right)=\int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right\}d\tau'-\int\frac{1}{r}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right)d\tau'$$
$$+\int\frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2+2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'}+2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'}+2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\}d\tau'.$$

Dies ist eine lineare Integralgleichung, die, wie wir in § 4 sehen werden, p zu bestimmen gestattet, sobald u, v, w bekannt sind. Ist die Flüssigkeit homogen, demnach ϱ konstant, so verschwindet das erste Integral rechts und die Formel (57) gibt unmittelbar p in Abhängigkeit von u, v, w, X, Y, Z.

Die Formel (57) läßt sich ferner vereinfachen, wenn die Einheitskräfte ein Potential, $U(x, y, z)$, haben. Wir nehmen an, daß U eine nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetige, im Unendlichen verschwindende Funktion darstellt, und daß $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ldots$ einer H-Bedingung genügen. Es gelten weiter Ungleichheiten von der Form

$$|U|\leqq\bar{\mathfrak{d}}(1+R)^{-1};\quad \left|\frac{\partial U}{\partial x}\right|,\ldots\leqq\bar{\mathfrak{d}}(1+R)^{-2};\quad \left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|,\ldots\leqq\bar{\mathfrak{d}}(1+R)^{-3};$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}U(x,y,z)-\frac{\partial^2}{\partial\bar{x}^2}U(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\right|,\ldots\leqq\bar{\mathfrak{d}}\{(1+R)^{-3-\lambda}+(1+\bar{R})^{-3-\lambda}\}\breve{D}^\lambda.$$

Jetzt ist

$$\int \frac{1}{r}\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right)d\tau' = \int \frac{1}{r}\,\Delta U'\,d\tau' = -4\pi U.$$

Die Gleichung (57) geht darum über in

$$(57^*)\quad 4\pi\left(\frac{p}{\varrho}-\frac{p_\infty}{\varrho_\infty}\right) = \int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right\}d\tau' + 4\pi U + \int \frac{1}{r}\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2\right.$$
$$\left.+2\,\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'}+2\,\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'}+2\,\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\}d\tau'.$$

§ 4.

Untersuchung einer linearen Integralgleichung.

Die zu (57) *gehörige homogene Integralgleichung*

$$(58)\quad 4\pi\frac{p}{\varrho} = \int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right\}d\tau'$$

hat, wie wir jetzt zeigen wollen, *keine von der trivialen Lösung* $p \equiv 0$ verschiedene, überall stetige, im Unendlichen verschwindende Lösung.

Es möge p eine überall stetige, im Unendlichen verschwindende Lösung der Gleichung (58) bezeichnen. Aus (58) folgt fast unmittelbar, daß $\frac{p}{\varrho}$, mithin auch p im Endlichen abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und daß $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ in jedem im Endlichen gelegenen Teile eines Bereiches T_i, die Randflächen eingeschlossen, der H-Bedingung genügen. In der Tat kann man für (58) in naheliegender Schreibweise auch setzen

$$(59)\qquad 4\pi\frac{p}{\varrho} = \int_{\mathfrak{R}_1} + \int_{\infty-\mathfrak{R}_1}.$$

Das zweite Integral rechts ist eine in $\mathfrak{R}_1$ reguläre Potentialfunktion, das erste hat gewiß in jedem im Endlichen gelegenen Teile eines Bereiches T_i, den Rand mitbegriffen, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung[16]). Also hat auch $\frac{p}{\varrho}$ die gleiche Eigenschaft. Da aber nach Voraussetzung $\frac{\partial\varrho}{\partial x}$, $\frac{\partial\varrho}{\partial y}$, $\frac{\partial\varrho}{\partial z}$ in jedem beschränkten Teile eines

[16]) Dies ist allerdings nicht unmittelbar zu ersehen. Aus bekannten Sätzen der Potentialtheorie folgt vielmehr zunächst, daß das erste Integral in (59) rechts der H-Bedingung genügt, demnach auch p die gleiche Eigenschaft hat. Und dies hat erst die Behauptung des Textes zur Folge.

Bereiches T_i, mit Einschluß des Randes, der H-Bedingung genügen, so gilt auch für $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ das gleiche.

Die Überlegungen, die s. Z. zu der Formel (40) führten, lassen sich in gleicher Weise auf die Funktionen p und ϱ anwenden. (Man beachte die an jene Formel sich knüpfenden Bemerkungen.) Da p für $R \to \infty$ verschwindet, so finden wir demnach

$$(60)\quad 4\pi \frac{p}{\varrho} = \int p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau' + \int \frac{1}{\varrho'}\left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau'.$$

Aus (60) und (58) folgt augenscheinlich

$$(61)\quad \int \frac{1}{\varrho'}\left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau' = 0.$$

Das Integral linkerhand, aufgefaßt als $\lim_{r\to\infty} \int_{\mathfrak{K}}$, konvergiert in jedem endlichen Bereiche der Punkte (x, y, z) gleichmäßig.

Ist bekannt, daß die Funktion p überall im Endlichen stetige Ableitungen erster Ordnung und in jedem beschränkten Teile eines Bereiches T_i, den Rand eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung hat, so läßt sich aus (61) erschließen, daß sie identisch verschwinden muß. In der Tat folgt aus (61) durch eine teilweise Integration und Multiplikation mit -1

$$J = \int_{\mathfrak{K}_1} \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial x'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}\right)\right\} d\tau'$$

$$(62)\quad + \int_{\mathfrak{C}_1} \frac{1}{r}\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial n'}\, d\sigma' - \int_{\infty-\mathfrak{K}_1} \frac{1}{\varrho'}\left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau'$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 = 0.$$

J_2 stellt augenscheinlich eine in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{K}_1$ gelegenen Bereiche, der Rand eingeschlossen, reguläre Potentialfunktion dar. Ferner ist

$$\int_{\infty-\mathfrak{K}_1} = \lim_{r_3\to\infty} \int_{\mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_1},$$

unter $\mathfrak{K}_3$ einen Kugelkörper um den Koordinatenursprung vom Radius $r_3 > r_1$ verstanden. Da nun $\int_{\mathfrak{K}_3-\mathfrak{K}_1}$ eine in dem vorhin genannten Bereiche reguläre Potentialfunktion darstellt und der Grenzübergang gleichmäßig ist, so hat auch $\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}$ die gleiche Eigenschaft. Der Klammerausdruck in J_1 erfüllt in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{K}_1$ gelegenen Teile eines jeden Be-

reiches T_i, die Begrenzung mitbegriffen, eine H-Bedingung. Nach bek kannten Sätzen der Potentialtheorie hat J_1 in jedem zuletzt genannten Bereiche, der Rand eingeschlossen, stetige Ableitungen erster Ordnung sowie stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung Überdies genügt J_1 der Poissonschen Differentialgleichung

$$\Delta J_1 = -4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right\}.$$

Wie vorhin auseinandergesetzt, sind J_2 und J_3 reguläre Potentialfunktionen. Alles in allem ist also

$$(63)\quad \Delta J = \frac{\partial^2 J}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 J}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} = -4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right\}.$$

Da aber der Integralausdruck J identisch verschwindet, so gilt

$$(64)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=0$$

oder, anders geschrieben,

$$(65)\quad \frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}+\varrho\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial x}+\varrho\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial y}+\varrho\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial z}=0.$$

Nach Voraussetzung ist p stetig und im Unendlichen gleich Null. Ist p also nicht identisch gleich Null, so muß es im Endlichen ein Maximum oder ein Minimum, ev. in dem weiteren, durch die Zeichen $\geqq$ bzw. $\leqq$ charakterisierten Sinne haben. Dies kann aber bei Lösungen der Differentialgleichung (65), die nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und zumindest abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung (vgl. die Fußnote [16a]) haben, nicht eintreten[17]). Demnach ist überall $p=0$, die homogene Integralgleichung (58) hat, wie behauptet, keine (von Null verschiedene) Lösung.

Um nun zu zeigen, daß p abteilungsweise stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat, verfahren wir wie folgt. Es sei $\mathfrak{K}^*$ ein Kugelkörper um den Koordinatenursprung mit dem

---

[16a]) Es wird angenommen, daß als Unstetigkeitsflächen lediglich die Flächen S in Betracht kommen.

[17]) Vgl. L. Lichtenstein, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo **33** (1912), S. 201–211, insbes. S. 210–211; **34** (1912), S. 278–279. An der bezeichneten Stelle handelt es sich um Differentialgleichungen (mit zwei unabhängigen Veränderlichen) in der Normalform, deren Koeffizienten stetig sind und stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Die Lösungen haben dementsprechend stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung. Im vorliegenden Falle sind die Koeffizienten lediglich in jedem Bereiche T_i, der Rand eingeschlossen, stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Gleichwohl gilt unverändert der im Text genannte Satz.

Radius $r^* > r_1$, und es möge q irgendeine nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige, außerhalb von $\mathfrak{K}^*$ verschwindende Funktion bezeichnen. Aus (61) folgt durch Multiplikation mit Δq und Integration über $\mathfrak{K}^*$ nach einer Vertauschung der Integrationsfolge[18])

$$(66)\quad \int \frac{d\tau'}{\varrho'}\left\{\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\int_{\mathfrak{K}^*}\frac{1}{r}\Delta q\, d\tau + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\int_{\mathfrak{K}^*}\frac{1}{r}\Delta q\, d\tau + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\int_{\mathfrak{K}^*}\frac{1}{r}\Delta q\, d\tau\right\} = 0$$

und, da für alle (x', y', z')

$$(67)\quad \int_{\mathfrak{K}^*}\frac{1}{r}\Delta q\, d\tau = \int\frac{1}{r}\Delta q\, d\tau = -4\pi q(x', y', z')\ ^{19})$$

ist, einfacher

$$(68)\quad \int_{\mathfrak{K}^*}\frac{1}{\varrho'}\left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial q'}{\partial x'} + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial q'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial q'}{\partial z'}\right)d\tau' = 0.$$

Diese Formel gilt, wie sich ohne Mühe zeigen läßt, auch wenn die überall stetige, außerhalb von $\mathfrak{K}^*$ verschwindende Funktion q in $\mathfrak{K}^*$ lediglich abteilungsweise stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat[20]). Es genügt q durch Funktionen q_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig zu approximieren, die außerhalb einer Kugel $\mathfrak{K}_n^*$ vom Radius $r^* + \frac{1}{n}$ verschwinden, den eingangs der Funktion q gestellten Stetigkeitsbedingungen genügen und überdies so beschaffen sind, daß auch $\frac{\partial q_n}{\partial x}, \frac{\partial q_n}{\partial y}, \frac{\partial q_n}{\partial z}$ gleichmäßig beschränkt sind und in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{K}$ enthaltenen Bereiche, der mit den Unstetigkeitsflächen von $\frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial y}, \frac{\partial q}{\partial z}$ keinen Punkt gemeinsam hat, gegen diese Funktionen gleichmäßig konvergieren. Aus

$$\int_{\mathfrak{K}_n^*}\frac{1}{\varrho'}\left(\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial q_n'}{\partial x'} + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial q_n'}{\partial y'} + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial q_n'}{\partial z'}\right)d\tau' = 0$$

folgt für $n \to \infty$ die gewünschte Beziehung (68).

Es sei (x, y, z) irgendein nicht auf S gelegener Punkt im Innern von $\mathfrak{K}^*$, und es möge $\Gamma(x, y, z; x', y', z')$ die in (x, y, z) unstetige, auf

---

[18]) Die zulässig ist, da der Grenzübergang $\int\frac{1}{\varrho'}\left\{\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \ldots\right\}d\tau' = \lim_{r\to\infty}\int_{\mathfrak{K}}$ gleichmäßig ist.

[19]) Man beachte, daß q in dem zu $\mathfrak{K}^*$ komplementären Bereiche verschwindet.

[20]) Für das folgende genügt es anzunehmen, daß die partiellen Ableitungen erster Ordnung von q auf einer Kugelfläche sowie auf einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche, die mit jener Kugelfläche keinen Punkt gemeinsam hat, (sprungweise) Unstetigkeiten erleiden. Bezüglich der Existenz partieller Ableitungen zweiter Ordnung werden keinerlei Voraussetzungen gemacht.

dem Rande $\mathfrak{C}^*$ von $\mathfrak{K}^*$ verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial U'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial U'}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial U'}{\partial z'}\right)=0 \tag{69}$$

bezeichnen[21]). Für hinreichend große Werte von M stellt die Gleichung

$$\Gamma(x, y, z;\ x', y', z')=M \tag{70}$$

eine doppelpunktfreie, stetig gekrümmte Fläche $\mathfrak{C}_M$ vom Kugeltypus, die den Punkt (x, y, z) umschließt und sich für $M\to\infty$ auf ihn zusammenzieht, dar[22]). Der von $\mathfrak{C}_M$ begrenzte endliche Bereich heiße T_M. Wir setzen

$$\mathfrak{q}=\begin{cases}\Gamma \text{ in } \mathfrak{K}^*-T_M,\\ M \text{ in } T_M\end{cases} \tag{71}$$

und finden

$$\int_{\mathfrak{K}^*-T_M}\frac{1}{\varrho'}\left(\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial x'}\frac{\partial \Gamma}{\partial x'}+\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial y'}\frac{\partial \Gamma}{\partial y'}+\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial z'}\frac{\partial \Gamma}{\partial z'}\right)d\tau'=0. \tag{72}$$

Von hier aus führen eine teilweise Integration und Grenzübergang $M\to\infty$, in bekannter Weise zu

$$\boldsymbol{p}=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{C}^*}\frac{\boldsymbol{p}'}{\varrho'}\frac{\partial}{\partial n'}\Gamma(x, y, z;\ x', y', z')\,d\sigma' \tag{73}$$

$$(\boldsymbol{p}'=\boldsymbol{p}(x', y', z')=\boldsymbol{p}(\sigma')).$$

Hier bezeichnet $\mathfrak{C}^*$ die Berandung des Kugelkörpers $\mathfrak{K}^*$ und das Symbol $\frac{\partial}{\partial n'}$ die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte σ' auf $\mathfrak{C}^*$. Nach bekannten Sätzen ist $\boldsymbol{p}$ diejenige Lösung der Differentialgleichung (69), die im Innern von $\mathfrak{K}^*$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig ist, daselbst abteilungsweise stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat (vgl. die Fußnote [16a]) und sich auf $\mathfrak{C}^*$ an die Werte $\boldsymbol{p}$ stetig

[21]) Sie verhält sich in der Umgebung des Punktes (x, y, z) wie

$$\varrho(x, y, z)[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z)^2]^{-\frac{1}{2}}.$$

Es gilt $\Gamma(x, y, z;\ x', y', z')=\Gamma(x', y', z';\ x, y, z)$. Die Existenz der fraglichen Greenschen Funktion steht den Ergebnissen der neueren Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus fest. Man vergleiche beispielsweise meinen Encyklopädieartikel II C 12, S. 1284–1285, 1287–1289. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2\Gamma}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2\Gamma}{\partial x'\partial y'}, \cdots, \frac{\partial^2\Gamma}{\partial z'^2}$ werden übrigens auf S sprungweise Unstetigkeiten erleiden.

[22]) Vgl. loc. cit.[17]) S. 202–204. Die a. a. O. abgeleiteten Ergebnisse gelten mutatis mutandis unter den Voraussetzungen des Textes.

anschließt[23]). Also hat $\boldsymbol{p}$, wie behauptet, stetige Ableitungen erster und abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung und genügt der Differentialgleichung

$$(74)\qquad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}\right)$$
$$=\frac{1}{\varrho}\Delta \boldsymbol{p}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}=0.$$

Aus

$$(75)\qquad \Delta \boldsymbol{p}=-\varrho\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial z}\right\}$$

folgt in bekannter Weise

$$(76)\qquad \boldsymbol{p}=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{R}^*}\frac{1}{r'}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial x'}+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial y'}+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial \boldsymbol{p}'}{\partial z'}\right\}\varrho'\,d\tau'+\boldsymbol{p}^*,$$

unter $\boldsymbol{p}^*$ eine gewisse im Innern von $\mathfrak{R}^*$ reguläre, auch noch auf $\mathfrak{C}^*$ stetige Potentialfunktion verstanden. Da der Klammerausdruck, wie auch ϱ' in jedem Bereiche T_i, der Rand eingeschlossen, der H-Bedingung genügt, so genügen $\frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial x\,\partial y}, \ldots, \frac{\partial^2 \boldsymbol{p}}{\partial z^2}$ ebendort der gleichen Bedingung. Damit sind alle unsere Behauptungen dargetan, und es ist endgültig erwiesen, daß die zu (57) gehörige homogene Integralgleichung keine Nullösungen hat.

§ 5.

Fortsetzung.

Es sei jetzt $f(x, y, z)$ eine nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung überall stetige Funktion, die in jedem Bereiche T_i, der Rand allemal eingeschlossen, stetige der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat. Das Verhalten der Funktion f im Unendlichen ist durch die folgenden Beziehungen gekennzeichnet:

$$(77)\qquad |f|\leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-1},\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|,\ldots\leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-2},\quad \left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|,\ldots\leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-3},$$
$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y,z)-\frac{\partial^2 f}{\partial \breve{x}^2}(\breve{x},\breve{y},\breve{z})\right|,\ldots\leqq \mathfrak{c}\{(1+R)^{-3-\lambda}+(1+\breve{R})^{-3-\lambda}\}\breve{D}^{\lambda}.$$

Betrachten wir die nichthomogene Integralgleichung

$$4\pi\frac{\boldsymbol{p}}{\varrho}=\int \boldsymbol{p}'\boldsymbol{K}(x,y,z;\,x',y',z')\,d\tau'+f(x,y,z)$$
$$(78)\qquad =\int \boldsymbol{p}'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\right\}d\tau'+f(x,y,z).$$

[23]) Vgl. meinen Encyklopädieartikel II C 12, S. 1280—1285.

Es möge (78) eine beschränkte, nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung haben, die sich im Unendlichen wie $\frac{1}{r}$ verhält (vgl. die Beziehungen (17)) und daselbst verschwindet. Sie heiße p. Wie wir schon wissen, kann es gewiß nicht mehr als eine Lösung dieser Art geben[24]).

Die Überlegungen, die s. Z. zu der Formel (40) führten, lassen sich in gleicher Weise auf die Funktionen p und ϱ anwenden. Da p für $R \to \infty$ verschwindet, so finden wir demnach

$$(78^*) \quad \begin{aligned} 4\pi \frac{p}{\varrho} = &\int p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau' \\ &+ \int \frac{1}{\varrho'}\left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau' \end{aligned}$$

Hieraus und aus (78) folgt

$$(79) \quad \int \frac{1}{\varrho'}\left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\} d\tau' = f(x, y, z).$$

Wir werden zeigen, daß p in jedem Bereiche T_i, der Rand eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$(80) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial z}\right) = \frac{1}{4\pi}\Delta f,$$

oder, was dasselbe ist, der Gleichung

$$(81) \quad \Delta_1(U) = \Delta U + \varrho \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial U}{\partial x} + \varrho \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial U}{\partial y} + \varrho \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\varrho}{4\pi}\Delta f$$

genügt. Wir beweisen diese Behauptung, indem wir einfach diejenige nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Lösung $U(x, y, z)$ von (81) konstruieren, die zumindest abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung hat (vgl. die Fußnote [16a]) und im Unendlichen verschwindet. Sie genügt, wie sich dabei ergibt, der Beziehung (78).

Die Existenz dieser Lösung kann durch ein kombinatorisches Verfahren dargetan werden (vgl. weiter unten S. 226—228). Wir beginnen mit der Behandlung des ersten Randwertproblems der Gleichung (81) in einem von einer Kugelfläche begrenzten unendlichen Bereiche. Von wesentlicher Bedeutung für die Entwicklungen dieser Arbeit ist eine Untersuchung des Verhaltens der Lösung und ihrer partiellen Ableitungen im Unendlichen.

Es sei, wie in § 3, $\mathfrak{K}^{(2)}$ ein Kugelkörper um den Koordinatenursprung vom Radius $r^{(2)}$. Auf dem Rande $\mathfrak{S}^{(2)}$ von $\mathfrak{K}^{(2)}$ sei eine stetige Wertfolge $\varphi(\sigma)$ gegeben. Wir bestimmen eine in jedem beschränkten, ganz

[24]) Daß es nicht mehr als eine Lösung geben kann, folgt unmittelbar aus den Ergebnissen des § 4.

außerhalb von $\mathfrak{K}^{(2)}$ gelegenen Bereiche reguläre Lösung U der Differentialgleichung (81), die sich auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ den Werten $\varphi(\sigma)$ stetig anschließt und im Unendlichen ein weiter unten näher präzisiertes Verhalten hat.

Wir denken uns den Außenbereich $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ von $\mathfrak{K}^{(2)}$ durch Transformation mittelst reziproker Radien

$$\bar{x} = \frac{x}{R^2},\ \bar{y} = \frac{y}{R^2},\ \bar{z} = \frac{z}{R^2};\quad x = \frac{\bar{x}}{\bar{R}^2},\ y = \frac{\bar{y}}{\bar{R}^2},\ z = \frac{\bar{z}}{\bar{R}^2} \tag{82}$$

$$\left(\bar{R}^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 + \bar{z}^2 = \frac{1}{R^2}\right)$$

auf den Kugelkörper $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ im Raume der Variablen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ abgebildet. Wir setzen ferner

$$U = \bar{U} = \bar{R}\bar{V}. \tag{83}$$

Für $\bar{V}$ ergibt sich dabei, wie eine leichte Rechnung zeigt, die Differentialgleichung

$$\Delta \bar{V} + \bar{a}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}} + \bar{b}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}} + \bar{c}\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}} + \bar{d}\bar{V} = \bar{g} \tag{84}$$

mit

$$\bar{a} = R^4 \varrho \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{x}}{\partial z}\right\}, \ldots,$$

$$\bar{c} = R^4 \varrho \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{z}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{z}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\right\}. \tag{85}$$

$$\bar{d} = \frac{1}{\bar{R}^2}(\bar{a}\bar{x} + \bar{b}\bar{y} + \bar{c}\bar{z}), \qquad \bar{g} = \frac{\varrho}{4\pi} R^5 \Delta f.$$

Wegen (16) sind $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ beschränkt und in jedem den Koordinatenursprung nicht enthaltenden Teile $\bar{\mathfrak{K}}_*$ von $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ stetig. Sie erfüllen in $\bar{\mathfrak{K}}_*$ gewiß eine H-Bedingung mit dem Exponenten λ. Der Koeffizient $\bar{d}$ ist in $\bar{\mathfrak{K}}_*$ stetig und genügt daselbst einer H-Bedingung mit dem Exponenten λ. In der Umgebung des Ursprunges wird $\bar{d}$ wie $\bar{R}^{-1}$ unendlich. Was schließlich die Funktion $\bar{g}$ betrifft, so verhält sich diese in $\bar{\mathfrak{K}}_*$ wie $\bar{d}$, wird aber bei der Annäherung an den Punkt $(0, 0, 0)$ wie $\bar{R}^{-2}$ unendlich.

Durch die Transformation (82) wird $\varphi(\sigma)$ auf dem Rande $\bar{\mathfrak{C}}^{(2)}$ von $\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}$ eine bestimmte stetige Wertfolge

$$\bar{\varphi}(\bar{\sigma}) = \bar{R}^{-1}\varphi(\sigma) \tag{86}$$

zugeordnet. In der Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus wird dargetan, daß es eine und nur eine im Innern eines jeden Bereiches $\bar{\mathfrak{K}}_*$ reguläre Lösung $\bar{V}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ der Differentialgleichung (84) gibt, die auf $\bar{\mathfrak{C}}^{(2)}$ die Werte $\bar{\varphi}(\bar{\sigma})$ annimmt und überdies folgende Eigenschaften hat. In der Umgebung des Koordinatenursprunges verhält sich $\bar{V}$ wie $O\left(\log\frac{1}{\bar{R}}\right)$, die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{x}}, \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{y}}, \frac{\partial \bar{V}}{\partial \bar{z}}$ werden daselbst wie $O(\bar{R}^{-1})$, diejenigen zweiter

Ordnung wie $O(\bar{R}^{-2})$ unendlich[25]). Geht man jetzt zu der Funktion $\bar{U} = \bar{R}\bar{V}$ über, so sieht man sofort, daß $\bar{U}$ im Koordinatenursprung wie $O\left(\bar{R}\log\frac{1}{\bar{R}}\right)$ verschwindet, $\frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{x}}, \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{y}}, \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{z}}$ sich daselbst wie $O\left(\log\frac{1}{\bar{R}}\right)$ und $\frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{x}^2}, \ldots, \frac{\partial^2\bar{U}}{\partial\bar{z}^2}$ wie $O\left(\bar{R}^{-1}\log\frac{1}{\bar{R}}\right)$ verhalten.

Wir kehren jetzt zu dem Außenbereiche $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ des Kugelkörpers $\mathfrak{K}^{(2)}$ zurück. Augenscheinlich ist $U(x, y, z) = \bar{U}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ diejenige in jedem beschränkten, ganz im Innern von $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ befindlichen Bereiche reguläre Lösung der Differentialgleichung (81), die im Unendlichen wie $O(R^{-1}\log R)$ gegen Null konvergiert und auf dem Rande von $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ die vorgeschriebene Wertfolge $\varphi(\sigma)$ annimmt. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$ verhalten sich wegen (82) im Unendlichen gewiß wie $O(R^{-2}\log R)$, diejenigen zweiter Ordnung wie $O(R^{-3}\log R)$. Wir begnügen uns mit diesen Resultaten. Sobald die Existenz der Lösung der Integralgleichung (78) einmal feststeht, werden wir für ihr Verhalten im Unendlichen aus der Integralgleichung selbst schärfere Beziehungen gewinnen.

Soviel über die erste Randwertaufgabe im Außenbereiche des Kugelkörpers $\mathfrak{K}^{(2)}$.

Es sei, wie in § 3, $\mathfrak{K}^{(1)}$ ein mit $\mathfrak{K}^{(2)}$ konzentrischer Kugelkörper vom Radius $r^{(1)} > r^{(2)}$. Die Bestimmung derjenigen in $\mathfrak{K}^{(1)}$ stetigen Lösung der Differentialgleichung (80), die in jedem ganz im Innern von $\mathfrak{K}^{(1)}$ gelegenen Bereiche stetige Ableitungen erster und zumindest abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung hat (vgl. die Fußnote [16a]), und auf deren Rande $\mathfrak{C}^{(1)}$ von $\mathfrak{K}^{(1)}$ eine vorgeschriebene stetige Wertfolge annimmt, bietet keinerlei Schwierigkeiten dar.

Wir können jetzt zu der vorhin in Aussicht gestellten Bestimmung der Lösung $U(x, y, z)$ übergehen. Augenscheinlich genügt $U(x, y, z) + U_\infty$ (U_∞ konstant) ebenfalls der Differentialgleichung (80) und nimmt für $R \to \infty$ den Wert U_∞ an.

Die gesuchte Lösung sei bereits gefunden, und es mögen $\varphi^{(1)}(\sigma)$ und $\varphi^{(2)}(\sigma)$ die Werte sein, die U auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$ annimmt.

---

[25]) Der Beweis könnte durch konsequente Verfolgung des in meinem Enzyklopädieartikel II C 12, S. 1284–1285 angegebenen Weges erbracht werden.

Die Behandlung der Differentialgleichung (84) wird wesentlich einfacher, wenn man annimmt, daß $\frac{\partial\varrho}{\partial a}, \frac{\partial\varrho}{\partial b}, \frac{\partial\varrho}{\partial c}$ im Unendlichen nicht wie R_0^{-2}, sondern wie R_0^{-3} verschwinden. In der zweiten Ungleichheit (1) wären dementsprechend die Exponenten $-2-\lambda$ durch $-3-\lambda$ zu ersetzen.

Es sei $\Gamma^{(1)}(x, y, z; x', y', z')$ die zu $\mathfrak{K}^{(1)}$ gehörige, auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ verschwindende, in (x, y, z) wie $\varrho(x, y, z)[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ unendliche Greensche Funktion der Differentialgleichung (80). Nach bekannten Sätzen ist für alle (x, y, z) im Innern von $\mathfrak{K}^{(1)}$

$$U(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{C}^{(1)}}\frac{1}{\varrho(\sigma')}\frac{\partial}{\partial n'}\Gamma^{(1)}(x,y,z;\sigma')\varphi^{(1)}(\sigma')\,d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathfrak{K}^{(1)}}\Delta f'\cdot\Gamma^{(1)}(x,y,z;x',y',z')\,d\tau' \tag{87}$$

und speziell auf $\mathfrak{C}^{(2)}$

$$\varphi^{(2)}(\sigma)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{C}^{(1)}}\frac{1}{\varrho(\sigma')}\frac{\partial}{\partial n'}\Gamma^{(1)}(\sigma;\sigma')\varphi^{(1)}(\sigma')\,d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathfrak{K}^{(1)}}\Delta f'\cdot\Gamma^{(1)}(\sigma;x',y',z')\,d\tau'. \tag{88}$$

Es sei $\mathfrak{G}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')$ diejenige zu $\overline{\mathfrak{K}}^{(2)}$ gehörige, auf $\overline{\mathfrak{C}}^{(2)}$ verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\Delta\overline{V}+\bar{a}\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{x}}+\bar{b}\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{y}}+\bar{c}\frac{\partial\overline{V}}{\partial\bar{z}}+\bar{d}\overline{V}=0, \tag{89}$$

die sich in $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ wie $[(\bar{x}-\bar{x}')^2+(\bar{y}-\bar{y}')^2+(\bar{z}-\bar{z}')^2]^{-\frac{1}{2}}$ verhält. Die Funktion

$$\Gamma^{(2)}(x,y,z;x',y',z') = \varrho(x,y,z)\frac{1}{R(x',y',z')\,R(x,y,z)}\,\mathfrak{G}^{(2)}(\bar{x},\bar{y},\bar{z};\bar{x}',\bar{y}',\bar{z}') \tag{90}$$

ist, wie man aus dem vorstehenden leicht erschließt, diejenige, außer in (x, y, z), im Außenbereiche $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ des Kugelkörpers $\mathfrak{K}^{(2)}$ reguläre Lösung der zu (80) gehörigen homogenen Differentialgleichung, die auf $\mathfrak{C}^{(2)}$ verschwindet und sich in (x, y, z) wie $\varrho(x, y, z)[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ verhält. Für $x'^2+y'^2+z'^2\to\infty$ wird $\Gamma^{(2)}$ wie $O(R'^{-1}\log R')$ gleich Null, $\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial x'}$, $\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial y'}$, $\frac{\partial\Gamma^{(2)}}{\partial z'}$ verhalten sich wie $O(R'^{-2}\log R')$[25a]. Für alle (x, y, z) im Innern von $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ gilt die zu (87) analoge Formel

$$U(x,y,z)=\frac{1}{4\pi}\int_{\mathfrak{C}^{(2)}}\frac{1}{\varrho(\sigma')}\frac{\partial}{\partial n'}\Gamma^{(2)}(x,y,z;\sigma'\ \varphi^{(2)}(\sigma')\,d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2}\int_{\mathfrak{K}_a^{(2)}}\Delta f'\cdot\Gamma^{(2)}(x,y,z;x',y',z')\,d\tau'. \tag{91}$$

[25a]) Man vergleiche die Fußnote 25).

Für (x, y, z) auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ folgt hieraus

$$\varphi^{(1)}(\sigma) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{C}^{(2)}} \frac{1}{\varrho(\sigma')} \frac{\partial}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(\sigma; \sigma') \varphi^{(2)}(\sigma') d\sigma' - \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{K}_a^{(2)}} \Delta f' \cdot \Gamma^{(2)}(\sigma; x', y', z') d\tau' \tag{92}$$

Die Beziehungen (88) und (92) stellen ein System von zwei linearen nichthomogenen Integralgleichungen mit stetigen Kernen zur Bestimmung von $\varphi^{(1)}(\sigma)$ und $\varphi^{(2)}(\sigma)$ dar. Sie mögen stets und zwar in einer einzigen Art und Weise lösbar sein, — die Lösungen heißen $\varphi^{(1)}(\sigma)$ und $\varphi^{(2)}(\sigma)$. Betrachten wir die durch die Gleichungen (87) in $\mathfrak{K}^{(1)}$ und (91) in $\mathfrak{K}_a^{(2)}$ erklärten Funktionen, die diesmal $U^{(1)}$ und $U_a^{(2)}$ heißen mögen. Aus (88) und (92) folgt fast unmittelbar, daß auf $\mathfrak{C}^{(1)}$ und $\mathfrak{C}^{(2)}$, mithin in dem Bereiche $\mathfrak{K}^{(1)} - \mathfrak{K}^{(2)}$

$$U^{(1)}(x, y, z) = U_a^{(2)}(x, y, z) \tag{93}$$

ist. Die Funktion

$$U(x, y, z) = \begin{cases} U^{(1)}(x, y, z) \text{ in } \mathfrak{K}^{(1)}, \\ U_a^{(2)}(x, y, z) \text{ in } \mathfrak{K}_a^{(2)} \end{cases} \tag{94}$$

ist die gesuchte Lösung unseres Problems.

Es ist jetzt leicht zu sehen, daß die zu (88) und (92) gehörigen homogenen Integralgleichungen keine von Null verschiedene Lösung haben können. Andernfalls würden wir nämlich zu einer nicht identisch verschwindenden, überall regulären Lösung der zu (80) gehörigen homogenen Differentialgleichung gelangen, die im Unendlichen gleich Null ist, und eine solche gibt es nach § 4 nicht[26]). Augenscheinlich verhält sich U im Unendlichen genau so wie die vorhin betrachtete Lösung U.

Wir kehren jetzt zu den Betrachtungen am Anfang dieses Paragraphen zurück. Es sei p die soeben bestimmte und mit U bezeichnete nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung überall im Endlichen stetige Lösung der Differentialgleichung (80), die zumindest abteilungsweise stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat (vgl. die Fußnote [16a]) und im Unendlichen verschwindet. Betrachten wir den Ausdruck

$$J(x, y, z) = \int \frac{1}{\varrho'} \left\{ \frac{\partial p'}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y'} \left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial p'}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{1}{r}\right) \right\} d\tau'. \tag{95}$$

Er läßt sich vor allem durch teilweise Integration, mit Rücksicht au

[26]) Das in dem vorstehenden benutzte kombinatorische Verfahren habe ich vo längerer Zeit angegeben und wiederholt gebraucht. (Vgl. bsp. meinen Encyklopädi artikel II C 3 S. 272.)

das auf S. 226 charakterisierte Verhalten der Funktion p im Unendlichen, auf die Form bringen:

$$(96)\quad J(x,y,z) = -\int \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial x'}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial y'}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial p'}{\partial z'}\right)\right\}d\tau'.$$

Aus den auf S. 24—25 benutzten Sätzen folgt, daß J im Endlichen stetig ist, stetige Ableitungen erster sowie abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung (vgl. die Fußnote [16a]) hat und der Differentialgleichung

$$(97)\quad \Delta J = 4\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right\}$$

oder wegen (80) mit $U = p$ der Gleichung

$$(98)\quad \Delta J = \Delta f$$

genügt. Da sowohl J als auch f im Unendlichen verschwinden, so ist offenbar $J = f$, mithin

$$(99)\quad \int \frac{1}{\varrho'}\left\{\frac{\partial p'}{\partial x'}\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial p'}{\partial y'}\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial p'}{\partial z'}\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau' = f(x,y,z).$$

Der Formel (78*) gemäß ist

$$(100)\quad 4\pi\frac{p}{\varrho} = \int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau' + f.$$

Die vorhin gefundene Lösung der Differentialgleichung (80) ist zugleich die Lösung der Integralgleichung (100).

Damit ist die eingangs gestellte Aufgabe erledigt.

Wir wollen jetzt in aller Kürze einige Ungleichheiten ableiten, von denen in dem folgenden Kapitel Gebrauch gemacht werden soll.

Aus (77), (88) und (92) folgt für alle den Ungleichheiten (16) genügenden Funktionen ϱ und alle S in hinreichender Nähe der Flächen S_0 (vgl. diesbezügliche Bemerkungen auf S. 230) gleichmäßig

$$(101)\quad |\varphi^{(1)}(\sigma)| \leqq \mathfrak{d}_5\,\mathfrak{k}, \qquad |\varphi^{(2)}(\sigma)| \leqq \mathfrak{d}_5\,\mathfrak{k}.$$

Geht man die Entwicklungen, die zur Auflösung der Integralgleichung (100) führten, noch einmal aufmerksam durch, so findet man, daß für alle (x, y, z) gewiß

$$(102)\quad |p| \leqq \mathfrak{d}_6\,\mathfrak{k}$$

gesetzt werden kann. Aus einem in meiner dritten Abhandlung zur Potentialtheorie angegebenen Hilfssatze (vgl. loc. cit. [27]), S. 238—239) folgt, wenn man die Beziehungen (16) beachtet, daß das Integral

$$K = \int p'\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$

Ungleichheiten von der Form

$$(103)\qquad \begin{gathered} |K| \leqq \mathfrak{d}_7 \mathfrak{c}(1+R)^{-1}, \\ |K(x,y,z)-K(\check{x},\check{y},\check{z})| \leqq \mathfrak{d}_8 \mathfrak{c}\{(1+R)^{-1-\lambda}+(1+\check{R})^{-1-\lambda}\}\check{D}^{\lambda} \end{gathered}$$

erfüllt. Wegen (77) und (100) ist darum

$$(104)\qquad \begin{gathered} |p| \leqq \mathfrak{d}_9 \mathfrak{c}(1+R)^{-1}, \\ |p(x,y,z)-p(\check{x},\check{y},\check{z})| \leqq \mathfrak{d}_{10} \mathfrak{c}\{(1+R)^{-1-\lambda}+(1+\check{R})^{-1-\lambda}\}\check{D}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Aus einem weiteren a. a. O. angegebenen Hilfssatze (vgl. loc. cit.[27]) S. 21[8] bis 231) folgt jetzt

$$(105)\qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial K}{\partial x}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{d}_{11} \mathfrak{c}(1+R)^{-2}, \\ \left|\frac{\partial K}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial K}{\partial x}(\check{x},\check{y},\check{z})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{d}_{12} \mathfrak{c}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\check{R})^{-2-\lambda}\} \end{gathered}$$

mithin wegen (77) und (100) endgültig

$$(106)\qquad \begin{gathered} \left|\frac{\partial p}{\partial x}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{d}_{13} \mathfrak{c}(1+R)^{-2}, \\ \left|\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial p}{\partial x}(\check{x},\check{y},\check{z})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{d}_{14} \mathfrak{c}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\check{R})^{-2-\lambda}\} \end{gathered}$$

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \varrho}{\partial x}, \ldots; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ können auf den Flächen S sprungweise Änderungen erleiden. Die Beziehungen (106) gelten für alle Flächensysteme S in einer gewissen festen Nachbarschaft der Flächen S_0 gleichmäßig. Sie gelten, genauer gesagt, für alle Flächen S, auf die S_0 durch Vermittlung von Funktionen $x = x(a,b,c,t)$, $y = y(a,b,c,t)$, $z = z(a,b,c,t)$ für hinreichend kleine $t - t_0$ topologisch abgebildet werden können, wenn diese Funktionen die auf S. 7—9 angegebenen Eigenschaften haben und insbesondere Ungleichheiten (14) erfüllen.

Nur noch einige Worte über die hydrodynamische Bedeutung der Entwicklungen dieses Paragraphen. Aus den wiederholt zitierten Hilfssätzen (vgl. insb. loc. cit[27]) S. 232) folgt, daß der zweite und der dritte Integralausdruck auf der rechten Seite der Formel (57) Funktionen darstellen, die gewiß den Ungleichheiten (77) genügen. Aus den vorstehenden

---

[27]) Es ist nicht schwer zu sehen, daß aus

$$|f| \leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-1}; \qquad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{c}(1-R)^{-2}$$

die weitere Ungleichheit

$$|f(x,y,z)-f(\check{x},\check{y},\check{z})| \leqq \mathfrak{d}_{10}^{*} \mathfrak{c}\{(1+R)^{-1-\lambda}+(1+\check{R})^{-1-\lambda}\}\check{D}^{\lambda}$$

folgt. (Man vergleiche hierzu die Ausführungen auf S. 214—215 meiner dritten Mitteilung, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), S. 213—239.)

Betrachtungen folgt darum, daß, sofern die hydrodynamischen Gleichungen (20) Lösungen haben, die den eingangs präzisierten Bedingungen genügen, der Druck p abteilungsweise stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat (vgl. die Fußnote [16a]) und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$$
$$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right\} \tag{107}$$

genügt.

§ 6.

Fortsetzung.

Mit Rücksicht auf eine spätere Anwendung wollen wir jetzt einen Schritt weiter gehen und annehmen, *daß es bezüglich der Funktion f in* (78) *lediglich bekannt ist, daß sie stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat und den Ungleichheiten von der Form*

$$|f|\leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-1};\quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|,\ldots\leqq \mathfrak{c}(1+R)^{-2};$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)-\frac{\partial}{\partial x}f(\check{x},\check{y},\check{z})\right|,\ldots\leqq \mathfrak{c}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\check{R})^{-2-\lambda}\}\check{D}^{\lambda} \tag{108}$$

genügt. Wir wollen zeigen, daß die Integralgleichung (78) *auch dann noch eine Lösung p hat und diese Lösung die Ungleichheiten* (104), (106) *erfüllt*[27a]).

Es möge zunächst f, wie früher, auch noch stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen zweiter Ordnung haben. Außer den vorstehenden Ungleichheiten sollen noch die Ungleichheiten

$$\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|,\ldots\leqq \bar{\mathfrak{c}}(1+R)^{-3};$$
$$\left|\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(x,y,z)-\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(\check{x},\check{y},\check{z})\right|,\ldots\leqq \bar{\mathfrak{c}}\{(1+R)^{-3-\lambda}+(1+\check{R})^{-3-\lambda}\}\check{D}^{\lambda} \tag{109}$$

bestehen. Wesentlich ist, daß die Konstanten $\mathfrak{c}$ und $\bar{\mathfrak{c}}$ nicht notwendig gleich zu sein brauchen. Betrachten wir die Integralgleichungen (88) und (92). Die Volumintegrale rechts lassen sich durch teilweise Integration auf die Form bringen

$$\int_{\mathfrak{x}^{(1)}} \Delta f'\cdot\Gamma^{(1)}(\sigma;x',y',z')\,d\tau'=-\int_{\mathfrak{C}^{(1)}}\frac{\partial f'}{\partial n'}\Gamma^{(1)}(\sigma,\sigma')\,d\sigma'$$
$$-\int_{\mathfrak{x}^{(1)}}\left\{\frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial\Gamma^{(1)}}{\partial x'}(\sigma;x',y',z')+\frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial\Gamma^{(1)}}{\partial y'}+\frac{\partial f'}{\partial z'}\frac{\partial\Gamma^{(1)}}{\partial z'}\right\}d\tau', \tag{110}$$

[27a]) Die Ausführungen dieses Paragraphen vereinfachen sich, wenn man die in der Fußnote [25]) angegebenen Annahmen macht.

$$\int_{\mathfrak{K}_a^{(2)}} \Delta f' \cdot \Gamma^{(2)}(\sigma; x', y', z')\, d\tau' = -\int_{\mathfrak{C}^{(2)}} \frac{\partial f'}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(\sigma; \sigma')\, d\sigma' - \int_{\mathfrak{K}_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x'} + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y'} + \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z'} \right\} d\tau'. \tag{110}$$

Aus (88), (92), (108) und (110) folgt augenscheinlich

$$|\varphi^{(1)}(\sigma)| \leqq \mathfrak{d}_{15}\, \mathfrak{k}, \quad |\varphi^{(2)}(\sigma)| \leqq \mathfrak{d}_{15}\, \mathfrak{k}. \tag{111}$$

Es sei $\mathfrak{C}^{(3)}$ irgendeine $\mathfrak{C}^{(2)}$ umschließende Kugel, die ihrerseits von $\mathfrak{C}^{(1)}$ umschlossen wird. Der von $\mathfrak{C}^{(3)}$ begrenzte endliche Bereich heiße $\mathfrak{K}^{(3)}$, sein Komplementärbereich $\mathfrak{K}_a^{(3)}$. Aus der Formel (87), die wir auf die Form

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = {} & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{C}^{(1)}} \frac{1}{\varrho(\sigma')} \frac{\partial}{\partial n'} \Gamma^{(1)}(x, y, z; \sigma') \varphi^{(1)}(\sigma')\, d\sigma' \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{C}^{(1)}} \frac{\partial f'}{\partial n'} \Gamma^{(1)}(x, y, z; \sigma')\, d\sigma' \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{K}^{(1)}} \left\{ \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial x'} + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial y'} + \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial \Gamma^{(1)}}{\partial z'} \right\} d\tau' \end{aligned} \tag{112}$$

bringen können, folgt ohne weiteres für alle (x, y, z) in $\mathfrak{K}^{(3)} + \mathfrak{C}^{(3)}$

$$|U(x, y, z)| \leqq \mathfrak{d}_{16}\, \mathfrak{k}. \tag{113}$$

In ganz analoger Weise gibt die Gleichung (91) für alle (x, y, z) in $\mathfrak{K}_a^{(3)}$

$$\begin{aligned} U(x, y, z) = {} & \frac{1}{4\pi} \int_{\mathfrak{C}^{(2)}} \frac{1}{\varrho(\sigma')} \frac{\partial}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(x, y, z; \sigma') \varphi^{(2)}(\sigma')\, d\sigma' \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{C}^{(2)}} \frac{\partial f'}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(x, y, z; \sigma')\, d\sigma' \\ & + \frac{1}{16\pi^2} \int_{\mathfrak{K}_a^{(2)}} \left\{ \frac{\partial f'}{\partial x'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x'} + \frac{\partial f'}{\partial y'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y'} + \frac{\partial f'}{\partial z'} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z'} \right\} d\tau'. \end{aligned} \tag{114}$$

Nach (90) ist

$$\Gamma^{(2)}(x, y, z; x', y', z') = \frac{\varrho}{RR'} \mathfrak{G}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}'), \tag{115}$$

darum

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x'} = {} & -\frac{\varrho}{R} \frac{1}{R'^2} \frac{\partial R'}{\partial x'} \mathfrak{G}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}; \bar{x}', \bar{y}', \bar{z}') \\ & + \varrho \frac{1}{RR'} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{x}'} \frac{\partial \bar{x}'}{\partial x'} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{y}'} \frac{\partial \bar{y}'}{\partial y'} + \frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{z}'} \frac{\partial \bar{z}'}{\partial z'} \right\}. \end{aligned} \tag{116}$$

Wie es sich in Verfolgung der bekannten Entwicklungen in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen zeigen läßt, ist

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{x}'}\right|, \left|\frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{y}'}\right|, \left|\frac{\partial \mathfrak{G}^{(2)}}{\partial \bar{z}'}\right| \leqq \mathfrak{k}_1 \{(\bar{x}-\bar{x}')^2+(\bar{y}-\bar{y}')^2+(\bar{z}-\bar{z}')^2\}^{-1} + \mathfrak{k}_1 (\bar{R}')^{-1} = \mathfrak{k}_1 (\bar{d}^{-2}+(\bar{R}')^{-1}) \tag{117}$$

sowie

$$|\mathfrak{G}^{(2)}| \leqq \mathfrak{k}_2 (\bar{d}^{-1}+|\log \bar{R}'|). \tag{118}$$

Der erste Summand in (116) rechts verhält sich darum wie

$$\frac{1}{R}\frac{1}{R'^2}(\bar{d}^{-1}+|\log \bar{R}'|),$$

der zweite wie

$$\frac{1}{R'^3}\frac{1}{R}(\bar{d}^{-2}+(\bar{R}')^{-1}).$$

Berücksichtigt man dies, sowie die Ungleichheiten (108), so findet man, daß sich für den absoluten Betrag der unter dem Zeichen des Volumintegrals in (114) befindlichen Funktion eine Schranke von der Form

$$\mathfrak{k}_3 \mathfrak{c}\left\{\frac{1}{R}\frac{1}{R'^5}(\bar{d}^{-2}+(\bar{R}')^{-1})+\frac{1}{R}\frac{1}{R'^4}(\bar{d}^{-1}+|\log \bar{R}'|)\right\} \tag{119}$$

angeben läßt.

Wir gehen jetzt von den Variablen x, y, z zu den Variablen $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ über und erhalten

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\mathfrak{K}_a^{(2)}} \left\{\frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x'}+\frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y'}+\frac{\partial f'}{\partial z'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z'}\right\} d\tau' \\ &= \int\limits_{\bar{\mathfrak{K}}^{(2)}} \left\{\frac{\partial f'}{\partial x'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial x'}+\frac{\partial f'}{\partial y'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial y'}+\frac{\partial f'}{\partial z'}\frac{\partial \Gamma^{(2)}}{\partial z'}\right\} \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(\bar{x}', \bar{y}', \bar{z}')} d\bar{\tau}'.\end{aligned} \tag{120}$$

Die zu integrierende Funktion rechts ist wegen (119) augenscheinlich dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\begin{aligned}&\mathfrak{k}_4 \mathfrak{c}\left\{\frac{1}{\bar{R}} R'(\bar{d}^{-2}+(\bar{R}')^{-1})+\frac{1}{\bar{R}} R'^2(\bar{d}^{-1}+|\log \bar{R}'|)\right\} \\ &= \mathfrak{k}_4 \mathfrak{c}\{\bar{R}^{-1}(\bar{R}')^{-1}(\bar{d}^{-2}+\bar{R}'^{-1})+R^{-1}(\bar{R}')^{-2}(\bar{d}^{-1}+|\log \bar{R}'|)\}.\end{aligned} \tag{121}$$

Nach bekannten Sätzen findet man für den absoluten Betrag des betrachteten Volumintegrals eine Schranke von der Form

$$\mathfrak{k}_5 \mathfrak{c}\frac{1}{R}|\log R|. \tag{122}$$

Fassen wir alles bis jetzt gewonnene zusammen, so finden wir ohne Schwierigkeiten eine für alle (x, y, z) gültige Beziehung von der Form

$$|U| \leqq \mathfrak{k}_6 \mathfrak{c}\left(1 + \frac{1}{R}|\log R|\right). \quad (123)$$ [28]

Wir kehren jetzt zu den ursprünglichen Voraussetzungen zurück. Über die Existenz partieller Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion f werden also keinerlei Annahmen mehr gemacht. Wie sich leicht zeigen läßt (vgl. S. 215—216, wo sich ähnliche Betrachtungen finden), kann man f durch eine Folge von Funktionen f_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gleichmäßig approximieren, die überall im Endlichen analytisch und regulär sind und überdies folgende Eigenschaften haben. Es ist

$$|f_n| \leqq \mathfrak{k}_7 \mathfrak{c}(1+R)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial f_n}{\partial x}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{k}_7 \mathfrak{c}(1+R)^{-2};$$
$$\left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x^2}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{c}_n(1+R)^{-3}; \quad \left|\frac{\partial^3 f_n}{\partial x^3}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{c}_n(1+R)^{-4}; \quad (124)$$

$$\lim f_n = f, \quad \lim \frac{\partial f_n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lim \frac{\partial f_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad \lim \frac{\partial f_n}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}, \quad (125)$$

wo $\mathfrak{c}_n$ von n abhängen kann. Der Grenzübergang ist in jedem beschränkten Bereiche gleichmäßig.

Es sei U_n die im Unendlichen verschwindende Lösung derjenigen Integralgleichung, die man erhält, wenn man in (78) die Funktion $f(x, y, z)$ durch $f_n(x, y, z)$ ersetzt. Nach (123) und (124) ist

$$|U_n| \leqq \mathfrak{k}_8 \mathfrak{c}\left(1 + \frac{1}{R}|\log R|\right). \quad (126)$$

Wegen (117), (118), (120), (124) konvergiert, wie man sich ohne Schwierigkeiten überzeugt, U_n für $n \to \infty$ gegen eine Grenzfunktion $p(x, y, z)$. Der Grenzübergang ist für alle (x, y, z) in jedem beschränkten Bereiche gleichmäßig. Wegen (126) ist ferner

$$|p(x, y, z)| \leqq \mathfrak{k}_8 \mathfrak{c}\left(1 + \frac{1}{R}|\log R|\right). \quad (127)$$

Führt man jetzt in derjenigen Integralgleichung, der U_n genügt, den Grenzübergang $n \to \infty$ aus, so findet man unmittelbar

---

[28]) Man beachte, daß den vorstehenden Abschätzungen gemäß sich für

$$\left|\frac{\partial}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(x, y, z; \sigma')\right| = \left|\frac{\partial}{\partial n'} \Gamma^{(2)}(\sigma'; x, y, z)\right|$$

und

$$|\Gamma^{(2)}(x, y, z; \sigma')| = |\Gamma^{(2)}(\sigma'; x, y, z)|$$

eine für alle (x, y, z) in $\mathfrak{R}_a^{(3)}$ gleichmäßig geltende obere Schranke angeben läßt.

$$4\pi\frac{p}{\varrho}=\int p'\Big\{\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{1}{r}\Big)\frac{\partial}{\partial x'}\Big(\frac{1}{\varrho'}\Big)+\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{1}{r}\Big)\frac{\partial}{\partial y'}\Big(\frac{1}{\varrho'}\Big)+\frac{\partial}{\partial z'}\Big(\frac{1}{r}\Big)\frac{\partial}{\partial z'}\Big(\frac{1}{\varrho'}\Big)\Big\}\,d\tau'+f(x,y,z). \tag{128}$$

Die vorhin gefundene Funktion p erfüllt also die Integralgleichung (78). Durch genau dieselben Überlegungen, die auf S. 229—230 von der Formel (102) zu den Formeln (104) und (106) führten, läßt sich jetzt erweisen, daß p stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung hat und Ungleichheiten von der Form

$$\Big|\frac{\partial p}{\partial x}\Big|,\ \ldots\leqq \mathfrak{k}_9\,\mathfrak{c}\,(1+R)^{-2};$$
$$\Big|\frac{\partial p}{\partial x}(x,y,z)-\frac{\partial p}{\partial x}(\breve{x},\breve{y},\breve{z})\Big|,\ \ldots\leqq \mathfrak{k}_{10}\,\mathfrak{c}\{(1+R)^{-2-\lambda}+(1+\breve{R})^{-2-\lambda}\}\breve{D}^{\lambda} \tag{129}$$

erfüllen. Damit sind alle unsere Behauptungen bewiesen.

§ 7.

Existenzbeweis der Lösung des hydrodynamischen Problems durch sukzessive Approximationen.

Wir kehren jetzt zu dem uns beschäftigenden Problem der Hydrodynamik zurück. Es handelt sich um den Existenzbeweis der Funktionen $x(a,b,c,t)$, $y(a,b,c,t)$, $z(a,b,c,t)$, die den Anfangsbedingungen

$$x(a,b,c,t_0)=a,\qquad y(a,b,c,t_0)=b,\qquad z(a,b,c,t_0)=c \tag{1'}$$

und den folgenden weiteren Bedingungen genügen:

$$\frac{dx}{dt}=u(x,y,z,t),\qquad \frac{dy}{dt}=v(x,y,z,t),\qquad \frac{dz}{dt}=w(x,y,z,t), \tag{2'}$$

$$\begin{cases} u=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial z}\displaystyle\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau', \\ v=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial x}\displaystyle\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau', \\ w=-\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\partial}{\partial y}\displaystyle\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau'+\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'.^{28*}) \end{cases} \tag{3'}$$

Für die Wirbelkomponenten ξ,η,ζ fanden wir in § 2 die Ausdrücke

$$\xi=\xi_0\frac{\partial x}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial x}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial x}{\partial c},\qquad \eta=\xi_0\frac{\partial y}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial y}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial y}{\partial c},$$
$$\zeta=\xi_0\frac{\partial z}{\partial a}+\eta_0\frac{\partial z}{\partial b}+\zeta_0\frac{\partial z}{\partial c} \tag{4'}$$

mit

$$\xi_0=\xi_0+\xi^*+\xi_*,\qquad \eta_0=\eta_0+\eta^*+\eta_*,\qquad \zeta_0=\zeta_0+\zeta^*+\zeta_*, \tag{5'}$$

$$2\xi_0=\frac{\partial w_0}{\partial b}-\frac{\partial v_0}{\partial c},\qquad 2\eta_0=\frac{\partial v_0}{\partial c}-\frac{\partial w_0}{\partial a},\qquad 2\zeta_0=\frac{\partial v_0}{\partial a}-\frac{\partial u_0}{\partial b}, \tag{6'}$$

[28*]) Vgl. die an die Formeln (38) sich knüpfenden Bemerkungen.

$$2\xi_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a} \right\} dt,$$

$$(7') \qquad 2\eta_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial c} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial c} \right\} dt,$$

$$2\zeta_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} \right\} dt,$$

$$2\xi^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} \right\} dt,$$

$$(8') \qquad 2\eta^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial Y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial Z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} \right\} dt,$$

$$2\zeta^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial Y}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial Z}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} \right\} dt.$$

Der Druck p, der in (7′) eingeht, ist die überall stetige im Unendlichen verschwindende Lösung der Integro-Differentialgleichung

$$4\pi\frac{p}{\varrho} = \int p' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) \right\} d\tau'$$

$$(9') \qquad - \int \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} \right\} d\tau$$

$$+ \int \frac{1}{r}\left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2 + 2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'} + 2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'} + 2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'} \right\} d\tau'.$$

Dazu ist folgendes zu bemerken. Wir haben in § 3 angenommen, daß der Druck im Unendlichen einen vorgeschriebenen Wert p_∞ hat, unter p_∞ eine beliebige stetige Funktion der Zeit verstanden. Unbeschadet der Allgemeinheit kann man indessen $p_\infty = 0$ voraussetzen, da p nur bis auf eine beliebige additive Funktion der Zeit bestimmt ist. Setzt man aber $p_\infty = 0$, so gelangt man von der Gleichung (43) zu der Gleichung (9′).

Aus (1′), (2′) und (3′) folgt augenscheinlich

$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' \right\},$$

$$(10') \qquad y = b + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\xi'\,d\tau' \right\},$$

$$z = c + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' \right\}.$$

Diese Gleichungen bilden im Verein mit (4′) bis (9′) ein System von Integro-Differentialgleichungen zur Bestimmung von x, y, z und p.

Der Existenzbeweis der Lösung wird durch sukzessive Approximationen erbracht.

Wir setzen in einer ersten Näherung für die Geschwindigkeitskomponenten desjenigen Teilchens, das zur Zeit t_0 die Lage (a, b, c) hat, kürzer des Teilchens (a, b, c), die Werte

$$u_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\eta_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\zeta_0' d\tau_0' = u_0,$$

. . . . . .

$$w_1 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\xi_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\eta_0' d\tau_0' = w_0 \tag{11′}$$

$$(d\tau_0' = da'db'dc', \quad r_0^2 = (a-a')^2 + (b-b')^2 + (c-c')^2).$$

Die Volumintegrale sind über den gesamten Raum der Variablen a, b, c erstreckt zu denken, was durch das Zeichen ∞_0 angedeutet werden soll.

Wir schreiben zur Vereinfachung

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\eta_0' d\tau_0', \ldots, \quad \text{für} \quad \int_{\infty_0}\eta_0'\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{r_0}\right)d\tau_0', \ldots.$$

(Man vergleiche die sich an die Formeln (38) anschließenden Bemerkungen auf S. 211.) Zur Zeit t wird das Teilchen (a, b, c) die Koordinaten x_1, y_1, z_1 haben:

$$x_1 = a + u_1 t, \quad y_1 = b + v_1 t, \quad z_1 = c + w_1 t, \tag{12′}$$

oder, anders geschrieben,

$$x_1 = a + \int_{t_0}^{t} dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial c}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\eta_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\zeta_0' d\tau_0'\right\},$$

. . . . . .

$$z_1 = c + \int_{t_0}^{t} dt\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial b}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\xi_0' d\tau_0' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial a}\int_{\infty_0}\frac{1}{r_0}\eta_0' d\tau_0'\right\}. \tag{13′}$$

Für hinreichend kleine $t - t_0$ wird durch die Gleichungen (13′) eine topologische Abbildung des Raumes a, b, c auf den mit t variablen Raum x_1, y_1, z_1 erklärt. Den Flächen S_0 entsprechen dabei Flächen S_1 von demselben topologischen und Stetigkeitscharakter. (Man vergleiche hierzu die Betrachtungen auf S. 244.)

Bei einer inkompressiblen Flüssigkeit bleibt die Dichte eines Flüssigkeitsteilchens im Laufe der Bewegung unverändert, — sie haftet am Flüssigkeitsteilchen. Wir setzen dementsprechend die Dichte im Punkte

(x_1, y_1, z_1) (zur Zeit t), die wir mit $\varrho_1 = \varrho_1(x_1, y_1, z_1)$ bezeichnen gleich ϱ, genauer

$$\varrho_1(x_1, y_1, z_1) = \varrho(a, b, c). \tag{14'}$$

Wir nehmen schließlich an, daß in (x_1, y_1, z_1) Einheitskräfte X_1, Y_1, Z_1 wirken,

$$X_1 = X(x_1, y_1, z_1, t), \quad Y_1 = Y(x_1, y_1, z_1, t), \quad Z_1 = Z(x_1, y_1, z_1, t) \tag{15'}$$

Wir suchen jetzt einen Annäherungswert für den Druck, p_1, zu bestimmen und betrachten zu dem Zwecke die Integralgleichung

$$\begin{aligned} 4\pi \frac{p_1}{\varrho_1} = &\int_{\infty_1} p_1' \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial x_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1'}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial y_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1'}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1'}\left(\frac{1}{r_1}\right)\frac{\partial}{\partial z_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1'}\right)\right\} d\tau_1' \\ &- \int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial X_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_1'}{\partial y_1'} + \frac{\partial Z_1'}{\partial z_1'}\right) d\tau_1' \\ &+ \int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left\{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial y_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1'}{\partial z_1'}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1'}{\partial y_1'}\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'} + 2\frac{\partial u_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial x_1'} + 2\frac{\partial v_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial y_1'}\right\} d\tau_1' \end{aligned} \tag{16'}$$

$$(d\tau_1' = dx_1'\,dy_1'\,dz_1', \quad r_1^2 = (x_1 - x_1')^2 + (y_1 - y_1')^2 - (z_1 - z_1')^2).$$

In (16′) werden die Geschwindigkeitskomponenten u_1, v_1, w_1, augenscheinlich als Funktionen von x_1, y_1, z_1 aufgefaßt. Die Integration ist über den gesamten Raum der Variablen (x_1, y_1, z_1) erstreckt zu denken, was durch das Zeichen ∞_1 angedeutet werden soll.

Die Integralgleichung (16′) gehört dem in § 5 betrachteten Typus an. Die dort eingeführte Funktion $f(x, y, z)$ hat jetzt den speziellen Wert

$$\begin{aligned} f_1(x_1, y_1, z_1) = &- \int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial X_1'}{\partial x_1'} + \frac{\partial Y_1'}{\partial y_1'} + \frac{\partial Z_1'}{\partial z_1'}\right) d\tau_1' \\ &+ \int_{\infty_1} \frac{1}{r_1}\left\{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1'}{\partial y_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_1'}{\partial z_1'}\right)^2 + 2\frac{\partial u_1'}{\partial y_1'}\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'} + 2\frac{\partial u_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial x_1'} + 2\frac{\partial v_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial y_1'}\right\} d\tau_1' \end{aligned} \tag{17'}$$

Wegen (4), (11′) und (12′) ist für alle t in einem hinreichend kleinen Intervalle $\langle t_0, t_0 + h\rangle$

$$\begin{aligned} \left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_1(1 + R_1)^{-2}; \quad &\left|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial u_1}{\partial x_1}(\breve{x}_1, \breve{y}_1, \breve{z}_1)\right|, \ldots \\ \leqq \mathfrak{e}_1\{(1 + R_1)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_1)^{-2-\lambda}\}\breve{D}_1^{\lambda}, \end{aligned} \tag{18'}$$

$$(R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad \breve{R}_1^2 = \breve{x}_1^2 + \breve{y}_1^2 + \breve{z}_1^2,$$

$$\breve{D}_1^2 = (x_1 - \breve{x}_1)^2 + (y_1 - \breve{y}_1)^2 + (z_1 - \breve{z}_1)^2)$$

unter $\mathfrak{e}_1$ eine Konstante verstanden, wie später unter $\mathfrak{e}_2, \mathfrak{e}_3, \ldots$ [28a])

[28a]) Bei der Ableitung der Ungleichheiten (18′) wird von dem loc. cit. [27]) S. 21 bis 231 bewiesenen Hilfssatz Gebrauch gemacht.

Wegen (19), (15′) und (18′) gilt

$$|f_1| \leqq \mathfrak{e}_2 (1+R_1)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_2 (1+R_1)^{-2},$$

$$(19') \quad \left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_2 (1+R_1)^{-3}; \quad \left|\frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_1^2}(\breve{x}_1, \breve{y}_1, \breve{z}_1)\right|, \ldots$$
$$\leqq \mathfrak{e}_3 \{(1+R_1)^{-3-\lambda} + (1+\breve{R}_1)^{-3-\lambda}\} \breve{D}_1^{\lambda}. \text{ [28b]}$$

Die überall stetige, im Unendlichen verschwindende Lösung der Integralgleichung (16′) heiße $p_1 = p_1(x_1, y_1, z_1)$. Wie wir wissen (vgl. § 5), hat p_1 stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Ferner ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + h\rangle$

$$|p_1| \leqq \mathfrak{e}_3 (1+R_1)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial p_1}{\partial x_1}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_3 (1+R_1)^{-2},$$

$$(20') \quad \left|\frac{\partial p_1}{\partial x_1}(x_1, y_1, z_1) - \frac{\partial p_1}{\partial x_1}(\breve{x}_1, \breve{y}_1, \breve{z}_1)\right|, \ldots$$
$$\leqq \mathfrak{e}_3 \{(1+R_1)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_1)^{-2-\lambda}\} \breve{D}_1^{\lambda}.$$

Als Funktion von a, b, c aufgefaßt, hat p_1 in jedem Bereiche T_{0i}, mit Einschluß des Randes, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial p_1}{\partial a} = \frac{\partial p_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial p_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial p_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial a}, \ldots$$

Beim Passieren der Flächen S_0 können sich freilich $\frac{\partial p_1}{\partial a}$ sprungweise ändern, da $\frac{\partial x_1}{\partial a}, \ldots$ diese Eigenschaft haben. Im Unendlichen verhalten sich $\frac{\partial p_1}{\partial a}, \ldots$ genau so wie $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \ldots$ Es ist

$$(21') \quad \left|\frac{\partial p_1}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_4 (1+R_0)^{-2}, \quad \left|\frac{\partial p_1}{\partial a}(a, b, c) - \frac{\partial p_1}{\partial a}(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})\right|, \ldots$$
$$\leqq \mathfrak{e}_5 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+\breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda}.$$

Wir gehen jetzt zu der zweiten Approximation über und setzen, indem wir X_1, Y_1, Z_1 diesmal als Funktionen von a, b und c auffassen,

$$2\xi_1^* = \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{\partial X_1}{\partial b}\frac{\partial x_1}{\partial c} - \frac{\partial X_1}{\partial c}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial Y_1}{\partial b}\frac{\partial y_1}{\partial c} - \frac{\partial Y_1}{\partial c}\frac{\partial y_1}{\partial b} + \frac{\partial Z_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial c} - \frac{\partial Z_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial b}\right\} dt,$$

(22′)

$$2\eta_1^* = \int_{t_0}^{t} \left\{\frac{\partial X_1}{\partial c}\frac{\partial x_1}{\partial a} - \frac{\partial X_1}{\partial a}\frac{\partial x_1}{\partial c} + \frac{\partial Y_1}{\partial c}\frac{\partial y_1}{\partial a} - \frac{\partial Y_1}{\partial a}\frac{\partial y_1}{\partial c} + \frac{\partial Z_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial a} - \frac{\partial Z_1}{\partial a}\frac{\partial z_1}{\partial c}\right\} dt,$$

[28b]) Hier kommt der loc. cit. [27]) S. 232 angegebene Hilfssatz zur Verwendung.

$$2\zeta_1^* = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial X_1}{\partial a}\frac{\partial x_1}{\partial b} - \frac{\partial X_1}{\partial b}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial Y_1}{\partial a}\frac{\partial y_1}{\partial b} - \frac{\partial Y_1}{\partial b}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial Z_1}{\partial a}\frac{\partial z_1}{\partial b} - \frac{\partial Z_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial a}\right\}$$

$$(22')\quad 2\xi_{*1} = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial c}\right\}dt, \quad 2\eta_{*1} = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial c} - \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial a}\right\}$$

$$2\zeta_{*1} = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial a} - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial b}\right\}dt.$$

Man gelangt zu diesen Formeln, wenn man in (7′) und (8′) p, x, y, z X, Y, Z entsprechend durch $p_1, x_1, y_1, z_1, X_1, Y_1, Z_1$ ersetzt. Gewiß sind $\xi_1^*, \eta_1^*, \zeta_1^*$, sowie $\xi_{*1}, \eta_{*1}, \zeta_{*1}$ in jedem Bereiche T_{0i}, die Randflächen eingeschlossen, stetig und erfüllen daselbst die H-Bedingung, können sich aber beim Passieren von S_0 sprungweise ändern, da

$$\frac{\partial p_1}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial x_1}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial a} = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \frac{\partial X_1}{\partial z_1}\frac{\partial z_1}{\partial a}, \ldots$$

diese Eigenschaft haben.

Wir bilden weiter die Ausdrücke

$$\xi_{01} = \xi_0 + \xi_1^* + \xi_{*1}, \quad \eta_{01} = \eta_0 + \eta_1^* + \eta_{*1}, \quad \zeta_{01} = \zeta_0 + \zeta_1^* + \zeta_{*1}$$

$$(23')\quad \xi_1 = \xi_{01}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial c}, \quad \eta_1 = \xi_{01}\frac{\partial y_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial y_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial y_1}{\partial c},$$

$$\zeta_1 = \xi_{01}\frac{\partial z_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial z_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial z_1}{\partial c}.$$

Auch die Größen ξ_1, η_1, ζ_1 sind in jedem Bereiche T_{0i}, mit Einschluß des Randes, stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Beim Durchgang durch S_0 können sie freilich sprungweise Änderungen erleiden. Sie behalten den gleichen Charakter, wenn man sie als Funktionen von x_1, y_1, z_1 auffaßt. Die Sprungflächen sind diesmal die Flächen S_1, Bilder von S_0 im Raume x_1, y_1, z_1. Im Unendlichen verhalten sich ξ_1, η_1, ζ_1 ähnlich wie ξ_0, η_0, ζ_0. Sie verschwinden insbesondere dort wie $O(R_1^{-2})$.

Nunmehr setzen wir in der zweiten Annäherung

$$x_2 = a + \int_{t_0}^{t} u_2\,dt, \quad y_2 = b + \int_{t_0}^{t} v_2\,dt, \quad z_2 = c + \int_{t_0}^{t} w_2\,dt,$$

$$(24')\quad u_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\eta_1'\,d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\zeta_1'\,d\tau_1',$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$w_2 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\xi_1'\,d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\eta_1'\,d\tau_1'$$

und verstehen unter u_2, v_2, w_2, aufgefaßt als Funktionen von a, b, c, t, die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens (a, b, c) zur Zeit t, unter x_2, y_2, z_2 seine Koordinaten zur selben Zeit.

Die Ausdrücke $\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\eta_1' d\tau_1', \ldots$ haben in jedem Bereiche T_{1i}, dem Bilde von T_{0i}, die Grenzen eingeschlossen, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x_1, y_1, z_1. Sie verhalten sich im Unendlichen wie $O(R_1^{-2})$, ihre H-Koeffizienten verschwinden daselbst wie $O(R_1^{-2-\lambda} + \breve{R}_1^{-2-\lambda})$ [28c]), [29]). Als Funktionen von a, b, c aufgefaßt, haben darum u_2, v_2, w_2 sowie x_2, y_2, z_2 in jedem Bereiche T_{0i} stetige, die H-Bedingung erfüllende Ableitungen erster Ordnung. Im Unendlichen, für $R_0 \to \infty$, ist beispielsweise $\frac{\partial u_2}{\partial a} = O(R_0^{-2})$, $\frac{\partial}{\partial a}(x_2 - a) = O(R_0^{-2}), \cdots$.

Die H-Koeffizienten verschwinden wie $O(R_0^{-2-\lambda} + \breve{R}_0^{-2-\lambda})$.

Durch die Gleichungen (24′) wird für hinreichend kleine $t - t_0$ eine topologische Abbildung des Raumes a, b, c auf den mit der Zeit variablen Raum x_2, y_2, z_2 erklärt. Den Flächen S_0 entsprechen dabei Flächen S_2, die sich sowohl topologisch als auch, was ihre Stetigkeitseigenschaften betrifft, wie S_0 verhalten. Wir schreiben jetzt dem zur Zeit t im Punkte (x_2, y_2, z_2) befindlichen Teilchen (a, b, c) die Dichte $\varrho_2 = \varrho_2(x_2, y_2, z_2)$ zu und setzen diese gleich ϱ,

$$(25') \qquad \varrho_2(x_2, y_2, z_2) = \varrho(a, b, c).$$

Wir nehmen schließlich an, daß in (x_2, y_2, z_2) die Einheitskräfte X_2, Y_2, Z_2 wirken,

$$(26') \quad X_2 = X(x_2, y_2, z_2, t), \quad Y_2 = Y(x_2, y_2, z_2, t), \quad Z_2 = Z(x_2, y_2, z_2, t).$$

Um den Druck in der zweiten Näherung, p_2, zu bestimmen, betrachten wir die Integralgleichung

---

[28c]) Dies besagt also, daß, wenn wir zur Abkürzung beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\int_{\infty_1}\frac{1}{r_1}\eta_1' d\tau_1' = \int_{\infty_1}\eta_1'\frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{1}{r_1}\right)d\tau_1' = \mathsf{N}$$

setzen,

$$|\mathsf{N}(x_1, y_1, z_1)| \leqq \mathfrak{e}^{(1)}(1 + R_1)^{-2},$$

$$|\mathsf{N}(x_1, y_1, z_1) - \mathsf{N}(\bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{z}_1)| \leqq \mathfrak{e}^{(2)}\{(1 + R_1)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_1)^{-2-\lambda}\}\breve{D}_1^{\lambda}$$

gilt.

[29]) Vgl. meine wiederholt zitierte Arbeit, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie III, S. 213—231.

$$4\pi\frac{p_2}{\varrho_2}=\int_{\infty_2}p_2'\Big\{\frac{\partial}{\partial x_2'}\Big(\frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial}{\partial x_2'}\Big(\frac{1}{\varrho_2'}\Big)+\frac{\partial}{\partial y_2'}\Big(\frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial}{\partial y_2'}\Big(\frac{1}{\varrho_2'}\Big)$$

$$+\frac{\partial}{\partial z_2'}\Big(\frac{1}{r_2}\Big)\frac{\partial}{\partial z_2'}\Big(\frac{1}{\varrho_2'}\Big)\Big\}d\tau_2'-\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\Big(\frac{\partial X_2'}{\partial x_2'}+\frac{\partial Y_2'}{\partial y_2'}+\frac{\partial Z_2'}{\partial z_2'}\Big)d\tau_2' \tag{27'}$$

$$+\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\Big\{\Big(\frac{\partial u_2'}{\partial x_2'}\Big)^2+\Big(\frac{\partial v_2'}{\partial y_2'}\Big)^2+\Big(\frac{\partial w_2'}{\partial z_2'}\Big)^2+2\frac{\partial u_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial v_2'}{\partial x_2'}+2\frac{\partial v_2'}{\partial z_2'}\frac{\partial w_2'}{\partial y_2'}+2\frac{\partial u_2'}{\partial z_2'}\frac{\partial w_2'}{\partial x_2'}\Big\}d$$

$$(d\tau_2'=dx_2'\,dy_2'\,dz_2',\qquad r_2^2=(x_2-x_2')^2+(y_2-y_2')^2+(z_2-z_2')^2).$$

Die Integration ist hier über den gesamten Raum der Variablen x_2, y_2, z_2 erstreckt zu denken. Dies soll das Zeichen ∞_2 andeuten. Die überall stetige, im Unendlichen verschwindende Lösung dieser Gleichung heiße p_2.

Man überzeugt sich, wie auf S. 229—230, daß p_2 stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung in bezug auf x_2, y_2, z_2 hat. Im Unendlichen ist

$$p_2=O(R_2^{-1}),\quad \frac{\partial p_2}{\partial x_2}=O(R_2^{-2}),\ldots\qquad (R_2^2=x_2^2+y_2^2+z_2^2).$$

Der zu $\frac{\partial p_2}{\partial x_2},\ldots$ gehörige Höldersche Koeffizient verschwindet wie $O(R_2^{-2-\lambda}+\breve{R}_2^{-2-\lambda})$ [30]. Als Funktion von a, b, c aufgefaßt, hat p_2 in jedem Bereiche T_{0t}, den Rand inbegriffen, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung

$$\frac{\partial p_2}{\partial a}=\frac{\partial p_2}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial a}+\frac{\partial p_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial a}+\frac{\partial p_2}{\partial z_2}\frac{\partial z_2}{\partial a}.$$

Beim Passieren der Flächen S_0 können sich freilich $\frac{\partial p_2}{\partial a},\ldots$ sprungweise ändern, weil ja $\frac{\partial x_2}{\partial a},\ldots$ diese Eigenschaft haben. Im Unendlichen verhalten sich $\frac{\partial p_2}{\partial a},\ldots$ ganz wie $\frac{\partial p_2}{\partial x_2},\ldots$.

Nun bilden wir, von p_2 ausgehend, die Ausdrücke

$$2\xi_{*2}=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\partial}{\partial c}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial b}-\frac{\partial}{\partial b}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial c}\Big\}dt,\quad 2\eta_{*2}=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial c}-\frac{\partial}{\partial c}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial a}\Big\}$$

$$2\zeta_{*2}=\int_{t_0}^{t}\Big\{\frac{\partial}{\partial b}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial a}-\frac{\partial}{\partial a}\Big(\frac{1}{\varrho}\Big)\frac{\partial p_2}{\partial b}\Big\}dt, \tag{28'}$$

[30] Vgl. die Fußnote [29a]).

und setzen ferner

$$2\xi_2^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial b}\frac{\partial x_2}{\partial c} - \frac{\partial X_2}{\partial c}\frac{\partial x_2}{\partial b} + \frac{\partial Y_2}{\partial b}\frac{\partial y_2}{\partial c} - \frac{\partial Y_2}{\partial c}\frac{\partial y_2}{\partial b} + \frac{\partial Z_2}{\partial b}\frac{\partial z_2}{\partial c} - \frac{\partial Z_2}{\partial c}\frac{\partial z_2}{\partial b} \right\} dt,$$

(9′) $$2\eta_2^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial c}\frac{\partial x_2}{\partial a} - \frac{\partial X_2}{\partial a}\frac{\partial x_2}{\partial c} + \frac{\partial Y_2}{\partial c}\frac{\partial y_2}{\partial a} - \frac{\partial Y_2}{\partial a}\frac{\partial y_2}{\partial c} + \frac{\partial Z_2}{\partial c}\frac{\partial z_2}{\partial a} - \frac{\partial Z_2}{\partial a}\frac{\partial z_2}{\partial c} \right\} dt,$$

$$2\zeta_2^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial a}\frac{\partial x_2}{\partial b} - \frac{\partial X_2}{\partial b}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \frac{\partial Y_2}{\partial a}\frac{\partial y_2}{\partial b} - \frac{\partial Y_2}{\partial b}\frac{\partial y_2}{\partial a} + \frac{\partial Z_2}{\partial a}\frac{\partial z_2}{\partial b} - \frac{\partial Z_2}{\partial b}\frac{\partial z_2}{\partial a} \right\} dt,$$

sowie

$$\xi_{02} = \xi_0 + \xi_2^* + \xi_{*2}, \quad \eta_{02} = \eta_0 + \eta_2^* + \eta_{*2}, \quad \zeta_{02} = \zeta_0 + \zeta_2^* + \zeta_{*2},$$

(30′) $$\xi_2 = \xi_{02}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \eta_{02}\frac{\partial x_2}{\partial b} + \zeta_{02}\frac{\partial x_2}{\partial c}, \quad \eta_2 = \xi_{02}\frac{\partial y_2}{\partial a} + \eta_{02}\frac{\partial y_2}{\partial b} + \zeta_{02}\frac{\partial y_2}{\partial c},$$

$$\zeta_2 = \xi_{02}\frac{\partial z_2}{\partial a} + \eta_{02}\frac{\partial z_2}{\partial b} + \zeta_{02}\frac{\partial z_2}{\partial c}$$

Man erhält diese Formeln, wenn man in (4′) bis (8′) p, x, y, z, X, Y, Z durch $p_2, x_2, y_2, z_2, X_2, Y_2, Z_2$ ersetzt. Die Größen ξ_2, η_2, ζ_2 sind, wenn man sie als Funktionen von x_2, y_2, z_2 auffaßt, in jedem Bereiche T_{2i}, dem Bilde von T_{0i}, die Randflächen mitbegriffen, stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Das Verhalten im Unendlichen ist demjenigen von ξ_1, η_1, ξ_1 analog.

Wir setzen jetzt in der dritten Näherung

$$x_3 = a + \int_{t_0}^{t} u_3\, dt, \quad y_3 = b + \int_{t_0}^{t} v_3\, dt, \quad z_3 = c + \int_{t_0}^{t} w_3\, dt,$$

(31′)
$$u_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_2}\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\eta_2' d\tau_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_2}\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\zeta_2' d\tau_2',$$

. . . . . .

$$w_3 = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_2}\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\xi_2' d\tau_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{\infty_2}\frac{1}{r_2}\eta_2' d\tau_2'$$

und verstehen wieder unter u_3, v_3, w_3, aufgefaßt als Funktionen von a, b, c, t, die Geschwindigkeitskomponenten des Teilchens (a, b, c) zur Zeit t, unter x_3, y_3, z_3 seine Koordinaten zur selben Zeit. Es steht offenbar nichts im Wege, den im vorstehenden erklärten Iterationsprozeß bis zu u_l, v_l, w_l fortzusetzen, sofern für alle t in einem festen Intervalle $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ sich für $u_n, v_n, w_n, x_n, y_n, z_n$ $(n \leqq l)$ Beziehungen von der Form

(32′) $$\left|\frac{\partial u_n}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_n}{\partial c}\right| \leqq \alpha_0 (1 + R_0)^{-2}; \quad \left|\frac{\partial u_n}{\partial a}(a, b, c) - \frac{\partial u_n}{\partial a}(\breve{a}, \breve{b}, \breve{c})\right|, \ldots$$

$$\leqq \alpha_0 \{(1 + R_0)^{-2-\lambda} + (1 + \breve{R}_0)^{-2-\lambda}\} \breve{d}^{\lambda},$$

$$
\begin{aligned}
&|x_n - a|, \ldots, |z_n - c| \leqq \alpha_0 (1+R_0)^{-1};\\
&\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n - c)\right| \leqq \alpha_0 (1+R_0)^{-2};\\
&\left|\frac{\partial x_n}{\partial a}(a,b,c) - \frac{\partial x_n}{\partial a}(\bar a, \bar b, \bar c)\right|, \ldots\\
&\qquad \leqq \alpha_0 \{(1+R_0)^{-2-\lambda} + (1+R_0)^{-2-\lambda}\}\, \bar d^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{33'}
$$

angeben lassen, unter α_0 einen von n unabhängigen, hinreichend kleine Wert verstanden. Es genügt zu zeigen, daß für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*$ und alle n durch Vermittelung der Funktionen

$$x_n = x_n(a,b,c,t), \quad y_n = y_n(a,b,c,t), \quad z_n = z_n(a,b,c,t) \tag{34'}$$

tatsächlich eine topologische Abbildung des gesamten Raumes $(a, b, c$ auf den gesamten Raum der Variablen x_n, y_n, z_n erklärt wird. Di Flächen S_0 werden dabei auf Flächen S_n abgebildet, die sich topologisch wie ihren Stetigkeitseigenschaften nach wie S_0 verhalten, dies letztere weil ja $\frac{\partial x_n}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z_n}{\partial c}$ in jedem Bereiche T_{0i}, die Randflächen eingeschlossen die H-Bedingung erfüllen. Es ist leicht zu sehen, daß zwei verschiedene Punkten $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$ in der Tat nicht derselbe Punk im Raume x_n, y_n, z_n zugeordnet sein kann. Andernfalls würde nämlich zur Abkürzung

$$x_n(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}, t) - a^{(1)} = (x_n - a)^{(1)}, \ldots \tag{35'}$$

gesetzt,

$$
\begin{aligned}
&a^{(1)} + (x_n - a)^{(1)} = a^{(2)} + (x_n - a)^{(2)}, \ldots,\\
&\qquad c^{(1)} + (z_n - c)^{(1)} = c^{(2)} + (z_n - c)^{(2)}
\end{aligned}
\tag{36'}
$$

sein. Für (36′) kann man weiter schreiben

$$
\begin{aligned}
&(a^{(1)} - a^{(2)})\left(1 + \frac{\tilde\partial}{\partial a}(x_n - a)\right) + (b^{(1)} - b^{(2)})\frac{\tilde\partial}{\partial b}(x_n - a)\\
&\qquad + (c^{(1)} - c^{(2)})\frac{\tilde\partial}{\partial c}(x_n - a) = 0\\
&\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&(a^{(1)} - a^{(2)})\frac{\tilde{\tilde\partial}}{\partial a}(z_n - c) + (b^{(1)} - b^{(2)})\frac{\tilde{\tilde\partial}}{\partial b}(z_n - c)\\
&\qquad + (c^{(1)} - c^{(2)})\left(1 + \frac{\tilde{\tilde\partial}}{\partial c}(z_n - c)\right) = 0
\end{aligned}
\tag{37'}
$$

unter $\frac{\tilde\partial}{\partial a}(x_n - a), \ldots$ den Höchstwert der fraglichen Ableitung auf de Verbindungsgeraden der Punkte $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$ verstan den. Für hinreichend kleines α_0 ist die Determinante der linearen Gle chungen (37′) augenscheinlich von Null verschieden, unsere Behauptun mithin wegen $a^{(1)} = a^{(2)}$, $b^{(1)} = b^{(2)}$, $c^{(1)} = c^{(2)}$ bewiesen[30a]).

Sind u_l, v_l, w_l; x_l, y_l, z_l bekannt, so läßt sich jetzt die l-te Approximation des Druckes, p_l, wie vorhin p_1 und p_2, bestimmen, worauf alsdann zu der $(l+1)$-ten Annäherung übergegangen werden kann.

§ 8.

Fortsetzung.

Daß sich für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ und alle l Ungleichheiten von der Form (32′), (33′) angeben lassen, wird aus der Betrachtug der Differenzen $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$, $z_{n+1} - z_n$ erschlossen[31]). Wie sich bald zeigen wird, konvergieren die unendlichen Funktionenfolgen x_n, y_n, z_n für hinreichend kleine $t - t_0$ gleichmäßig gegen bestimmte Grenzfunktionen, die Lösungen des Problems.

Nach (13′), (24′), (31′) ist für alle $n \geqq 1$

$$x_{n+1} - x_n = \int_{t_0}^{t} (u_{n+1} - u_n)\, dt, \ \ldots, \ z_{n+1} - z_n = \int_{t_0}^{t} (w_{n+1} - w_n)\, dt,$$

$$(38') \quad \begin{aligned} u_{n+1} - u_n = &- \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_n} \int_{\infty_n} \frac{1}{r_n} \eta_n' \, d\tau_n' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_n} \int_{\infty_n} \frac{1}{r_n} \zeta_n' \, d\tau_n' \\ &+ \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z_{n-1}} \int_{\infty_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}} \eta_{n-1}' \, d\tau_{n-1}' - \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y_{n-1}} \int_{\infty_{n-1}} \frac{1}{r_{n-1}} \zeta_{n-1}' \, d\tau_{n-1}' \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Es sei l irgendeine ganze Zahl $\geqq 2$. Gesetzt, für alle $n \leqq l$, alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ und alle (a, b, c) ist

$$(39') \quad \begin{aligned} &|u_n|, |v_n|, |w_n| \leqq \Omega_* (1 + R_0)^{-1}, \qquad (\Omega_* = 2\mathfrak{c}_2, \text{ vgl. (3)}) \\ &\left|\frac{\partial u_n}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_n}{\partial c}\right| \leqq \Omega_* (1 + R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ \ldots \leqq \Omega_* \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R_{02})^{-2-\lambda}\} \, d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

$$(R_0^2 = a^2 + b^2 + c^2, \ R_{01}^2 = (a^{(1)})^2 + (b^{(1)})^2 + (c^{(1)})^2, \ R_{02}^2 = (a^{(2)})^2 + (b^{(2)})^2 + (c^{(2)})^2,$$

$$d_{12}^2 = (a^{(1)} - a^{(2)})^2 + (b^{(1)} - b^{(2)})^2 + (c^{(1)} - c^{(2)})^2).$$ [32])

[30a]) Es genügt, wie sich leicht zeigen läßt, $\omega_0 \leqq \frac{1}{4}$ anzunehmen.

[31]) Die folgenden Ausführungen (S. 245–262) reproduzieren, sinngemäß erweitert, die auf S. 103–111 der I. Abhandlung gegebenen Überlegungen.

[32]) Wir bezeichnen mit $\left(\frac{\partial u_n}{\partial a}\right)^{(1)}$, $\left(\frac{\partial u_n}{\partial a}\right)^{(2)}$ den Wert von $\frac{\partial u_n}{\partial a}$ im Punkte $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ bzw. $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$. Hier, wie schon in den Formeln (38′), werden u_n, v_n, w_n als Funktionen von a, b, c, t aufgefaßt.

Es sei Ω_0 ein Wert $\leqq \mathrm{Min}\,(\frac{1}{2}\,\Omega_*, \frac{1}{4})$. Wegen

$$x_n = a + \int_{t_0}^{t} u_n\,dt, \quad \ldots \qquad (1 \leqq n \leqq l \quad (40')$$

ist

$$|x_n - a|, \ldots, |z_n - c| \leqq \Omega_* |t - t_0| (1 + R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial x_n}{\partial a} - 1\right|, \ldots \leqq \Omega_* |t - t_0| (1 + R_0)^{-2}, \quad (\overline{41'})$$

$$\left|\left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega_* |t - t_0| \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R^{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}$$

darum, sofern $t^* \leqq \frac{\Omega_0}{\Omega_*}$ angenommen wird, gewiß

$$|x_n - a|, \ldots, |z_n - c| \leqq \Omega_0 (1 + R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right|, \ldots \leqq \Omega_0 (1 + R_0$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a)\right)^{(2)}\right|, \ldots \quad (41')$$

$$\leqq \Omega_0 \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Es möge ferner

$$|u_l - u_{l-1}|, \ldots, |w_l - w_{l-1}| \leqq \Omega (1 + R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(w_l - w_{l-1})\right| \leqq \Omega (1 + R_0)^{-2},$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \quad (42')$$

$$\leqq \Omega \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda} \qquad (\Omega \leqq \tfrac{1}{2}\,\Omega_0$$

sein. Wegen (40′) folgt offenbar hieraus

$$|x_l - x_{l-1}|, \ldots \leqq \Omega |t - t_0| (1 + R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots \leqq \Omega |t - t_0| (1 + R_0)^{-2},$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \quad (43')$$

$$\leqq \Omega |t - t_0| \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda},$$

darum insbesondere für $t^* \leqq 1$

$$|x_l - x_{l-1}|, \ldots, |z_l - z_{l-1}| \leqq \Omega (1 + R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_l - z_{l-1})\right| \leqq \Omega (1 + R_0)^{-2}, \quad (\overline{43'})$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(2)}\right|$$

$$\leqq \Omega \{(1 + R_{01})^{-2-\lambda} + (1 + R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Aus den Ungleichheiten (43′) für $\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_l - z_{l-1})\right|$ folgen, wie sich unschwer zeigen läßt, die weiteren Ungleichheiten

$$(43') \quad |(x_l - x_{l-1})^{(1)} - (x_l - x_{l-1})^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{f}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-1-\lambda} + (1+R_{02})^{-1-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda} \qquad (\mathfrak{f} \text{ konstant}).$$

(Man vergleiche loc. cit.[27]) S. 214—215, wo sich ähnliche Betrachtungen finden.)

Betrachten wir jetzt diejenige überall stetige Lösung der Integralgleichung

$$4\pi \frac{p_l}{\varrho_l} = \int_{\infty_l} p_l' \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right)\right\} d\tau_l' + f_l(x_l, y_l, z_l),$$

$$(44') \quad f_l(x_l, y_l, z_l) = -\int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\, g_l'(x_l', y_l', z_l')\, d\tau_l' = -\int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\left(\frac{\partial X_l'}{\partial x_l'} + \frac{\partial Y_l'}{\partial y_l'} + \frac{\partial Z_l'}{\partial z_l'}\right) d\tau_l'$$

$$+ \int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\left\{\left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_l'}{\partial y_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_l'}{\partial z_l'}\right)^2 + 2\frac{\partial u_l'}{\partial y_l'}\frac{\partial v_l'}{\partial x_l'} + 2\frac{\partial u_l'}{\partial z_l'}\frac{\partial w_l'}{\partial x_l'} + 2\frac{\partial v_l'}{\partial z_l'}\frac{\partial w_l'}{\partial y_l'}\right\} d\tau_l'$$

$$\left(\begin{array}{l} p_l = p_l(x_l, y_l, z_l), \quad p_l' = p_l(x_l', y_l', z_l'), \\ r_l^2 = (x_l - x_l')^2 + (y_l - y_l')^2 + (z_l - z_l')^2 \end{array}\right),$$

die im Unendlichen verschwindet. Sie hat, wie wir wissen, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Offenbar ist p_l der zu der l-ten Approximation gehörige Wert des Druckes im Punkte (x_l, y_l, z_l), d. h. in dem Flüssigkeitsteilchen (a, b, c). Die $(l-1)$-te Approximation des Druckes, p_{l-1}, ist analog diejenige überall stetige Lösung der Integralgleichung

$$4\pi \frac{p_{l-1}}{\varrho_{l-1}} = \int_{\infty_{l-1}} p_{l-1}' \left\{ \frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial y_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) + \frac{\partial}{\partial z_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial z_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right)\right\} d\tau_{l-1}' + f_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}),$$

$$(45') \quad f_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) = -\int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{r_{l-1}}\, g_{l-1}'(x_{l-1}', y_{l-1}', z_{l-1}')\, d\tau_{l-1}',$$

die für $R_{l-1} \to \infty$ verschwindet. Auch p_{l-1} hat überall stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung.

Es sei allgemein p_n der Druck in der n-ten Approximation $(n \leqq l)$. Den Ungleichheiten (19), (39′) und (41′) gemäß ist für alle $n \leqq l$

$$|M_n(x_n, y_n, z_n)| = \left|\frac{\partial X_n}{\partial x_n} + \frac{\partial Y_n}{\partial y_n} + \frac{\partial Z_n}{\partial z_n}\right| \leqq 3\,\mathfrak{c}_0\,(1+R_0)^{-4}$$

und

$$|N_n(x_n, y_n, z_n)|$$
$$= \left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial x_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_n}{\partial y_n}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_n}{\partial z_n}\right)^2 + 2\frac{\partial u_n}{\partial y_n}\frac{\partial v_n}{\partial x_n} + 2\frac{\partial u_n}{\partial z_n}\frac{\partial w_n}{\partial x_n} + 2\frac{\partial v_n}{\partial z_n}\frac{\partial w_n}{\partial y_n}\right|$$
$$\leqq \mathfrak{e}_6\, \Omega_*^2 (1+R_0)^{-4},$$

mithin

$$|g_n(x_n, y_n, z_n)| \leqq \mathfrak{e}_7 (1+R_0)^{-4}. \tag{46'}$$

In jedem Bereiche T_{ni}, die Randflächen eingeschlossen, gilt ferner wegen (19), (39′) und (41′) die Ungleichheit

$$|(g_n(x_n, y_n, z_n))^{(1)} - (g_n(x_n, y_n, z_n))^{(2)}|$$
$$\leqq \mathfrak{e}_8 \{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \tag{47'}$$

Aus (46′) und (47′) ergeben sich für alle $n \leqq l$ für den Integralausdruck

$$f_n(x_n, y_n, z_n) = -\int_{\infty_n} \frac{1}{r_n}\, g_n'(x_n', y_n', z_n')\, d\tau_n' \tag{48'}$$

die weiteren Beziehungen:

$$|f_n| \leqq \mathfrak{e}_9 (1+R_0)^{-1},$$
$$\left|\frac{\partial f_n}{\partial x_n}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_9 (1+R_0)^{-2}, \quad \left|\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_9 (1+R_0)^{-3}, \tag{49'}$$
$$\left|\left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 f_n}{\partial x_n^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_9 \{(1+R_{01})^{-3-\lambda} + (1+R_{02})^{-3-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$ [33]

Den Ergebnissen des § 5 gemäß (vgl. S. 229—230) folgt hieraus

$$|p_n| \leqq \mathfrak{e}_{10} (1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{10} (1+R_0)^{-2},$$
$$\left|\left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{10} \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \tag{50'}$$

Es ist nun weiter

$$\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}} = \frac{\partial X}{\partial x}(x_l, y_l, z_l) - \frac{\partial X}{\partial x}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$$
$$= \frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial x^2}(x_l - x_{l-1}) + \frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial x\, \partial y}(y_l - y_{l-1}) + \frac{\partial^2 \tilde{X}}{\partial x\, \partial z}(z_l - z_{l-1}), \tag{51'}$$

unter $\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial x^2}, \ldots$ den Wert der fraglichen Ableitungen in einem gewissen,

---

[33]) Vgl. loc. cit. [27]) S. 232. In (49′) wie auch (50′) konnten R_0, R_{01}, R_{02} durch R_n, R_{n1}, R_{n2} ersetzt werden. Die Zahlenkoeffizienten rechts würden dabei natürlich andere Werte erhalten.

auf der Strecke $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) \to (x_l, y_l, z_l)$ gelegenen Punkte verstanden, mithin wegen (19) und ($\overline{43'}$)

$$\left|\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right| \leqq e_{11}\,\Omega(1+R_0)^{-6}. \tag{52'}$$

Analoge Ungleichheiten gelten für $\frac{\partial Y_l}{\partial y_l} - \frac{\partial Y_{l-1}}{\partial y_{l-1}}$, $\frac{\partial Z_l}{\partial z_l} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial z_{l-1}}$.

Ferner ist

$$\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}$$

$$= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} X(x_l, y_l, z_l)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} X(x_l, y_l, z_l)\right)^{(2)}\right]$$

$$- \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} X(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x} X(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\right)^{(2)}\right]$$

$$\left\{\left[\frac{\partial}{\partial x} X(x_{l-1}+\theta(x_l-x_{l-1}), \ldots)\right]^{(1)} - \left[\frac{\partial}{\partial x} X(x_{l-1}+\theta(x_l-x_{l-1}), \ldots)\right]^{(2)}\right\}_{\theta=1} - \{\}_{\theta=0}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}(x_l-x_{l-1}) + \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x\,\partial y}(y_l-y_{l-1}) + \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x\,\partial z}(z_l-z_{l-1})\right)^{(1)}$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}(x_l-x_{l-1}) + \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x\,\partial y}(y_l-y_{l-1}) + \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x\,\partial z}(z_l-z_{l-1})\right)^{(2)},$$

$$\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(Xx_{l-1}+\vartheta(x_l-x_{l-1}),\ y_{l-1}+\vartheta(y_l-y_{l-1})+z_{l-1}+\vartheta(z_l-z_{l-1})),$$

$$(0<\vartheta<1)\ ^{34})$$

. . . . . .

Beachtet man schließlich, daß z. B.

$$\left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}(x_l-x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}(x_l-x_{l-1})\right)^{(2)}$$

$$= \frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}\{(x_l-x_{l-1})^{(1)} - (x_l-x_{l-1})^{(2)}\} \tag{54'}$$

$$+ (x_l-x_{l-1})^{(2)}\left\{\left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}\right)^{(2)}\right\}$$

gesetzt werden kann, so findet man wegen (19), ($\overline{43'}$) und ($\underline{43'}$) ohne Schwierigkeiten

$$\left|\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial X_l}{\partial x_l} - \frac{\partial X_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}\right|$$

$$\leqq e_{12}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-6-\lambda} + (1+R_{02})^{-6-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \tag{55'}$$

---

34) Es ist zu beachten, daß in allen Ausdrücken $\frac{\partial^2 \hat{X}}{\partial x^2}, \ldots$ *derselbe* Wert von ϑ auftritt.

Man gewinnt ebenso analoge Ungleichheiten mit $Y_l, Y_{l-1}; Z_l, Z_{l-}$ statt X_l, X_{l-1}. Beachtet man alle diese Beziehungen, so findet man

$$
\begin{aligned}
&|M_l(x_l, y_l, z_l) - M_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})| \leqq \mathfrak{e}_{13}\, \Omega (1+R_0)^{-6}, \\
&|(M_l(x_l, y_l, z_l) - M_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(1)} \\
&\qquad - (M_l(x_l, y_l, z_l) - M_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(2)}| \\
&\qquad \leqq \mathfrak{e}_{14}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-6-\lambda} + (1+R_{02})^{-6-\lambda}\} d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{56'}
$$

In ähnlicher Weise gewinnt man die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
&|N_l(x_l, y_l, z_l) - N_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})| \leqq \mathfrak{e}_{15}\, \Omega (1+R_0)^{-4}, \\
&|(N_l(x_l, y_l, z_l) - N_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(1)} \\
&\qquad - (N_l(x_l, y_l, z_l) - N_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(2)}| \\
&\qquad \leqq \mathfrak{e}_{16}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\} d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{57'}
$$

Aus (56′) und (57′) ergeben sich jetzt die beiden folgenden Relationen:

Für alle (a, b, c) ist

$$
|g_l(x_l, y_l, z_l) - g_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})| \leqq \mathfrak{e}_{17}\, \Omega (1+R_0)^{-4}. \tag{58'}
$$

Für alle (a, b, c) in jedem Bereiche T_{0i}, die Randflächen allema eingeschlossen, ist

$$
\begin{aligned}
&|(g_l(x_l, y_l, z_l) - g_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(1)} \\
&\qquad - (g_l(x_l, y_l, z_l) - g_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}))^{(2)}| \\
&\qquad \leqq \mathfrak{e}_{18}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\} d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{59'}
$$

Aus (44′) und (45′) ergibt sich, wie man leicht verifiziert, die Be ziehung

$$
\begin{aligned}
&4\pi \frac{p_l - p_{l-1}}{\varrho_l} + 4\pi p_{l-1}\left(\frac{1}{\varrho_l} - \frac{1}{\varrho_{l-1}}\right) = 4\pi \frac{p_l - p_{l-1}}{\varrho_l} \\
&= \int_{\infty_l} (p_l' - p_{l-1}')\left\{\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right)\right\} d \\
&\quad + \int_{\infty_l} p_{l-1}'\left\{\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right)\right\} d \\
&\quad - \int_{\infty_{l-1}} p_{l-1}'\left\{\frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) + \frac{\partial}{\partial y_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial y_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right)\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z_{l-1}'}\left(\frac{1}{\varrho_{l-1}'}\right)\frac{\partial}{\partial z_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right)\right\} d\tau_{l-1}' + f_l(x_l, y_l, z_l) - f_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_l
\end{aligned} \tag{60'}
$$

[35]) Man beachte, daß $\varrho_l = \varrho_{l-1}$ ist, so daß tatsächlich der zweite Summand link verschwindet.

die man als eine nichthomogene Integralgleichung zur Bestimmung von $p_l - p_{l-1}$ ansehen kann. Wendet man die Identität (40) auf den zweiten und den dritten Integralausdruck in (60′) rechts an, indem man für p einmal p_{l-1}, aufgefaßt als Ortsfunktion im Raume x_l, y_l, z_l, das andere Mal aber p_{l-1}, aufgefaßt als Ortsfunktion im Raume $x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}$, einsetzt und berücksichtigt, daß p_{l-1} für $R_0 \to \infty$ verschwindet, so erhält man für (60′)

$$4\pi \frac{p_l - p_{l-1}}{\varrho_l} = \int_{\infty_l} (p_l' - p_{l-1}') \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right) \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right) \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) \right.$$

(1′)

$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right) \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) \right\} d\tau_l' - L_1 + L_2 + f_l(x_l, y_l, z_l) - f_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$$

mit

$$L_1 = \int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'} \left\{ \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_l'} \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial y_l'} \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial z_l'} \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) \right\} d\tau_l',$$

$$L_2 = \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{\varrho_{l-1}'} \left\{ \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial y_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial y_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial z_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial z_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) \right\} d\tau_{l-1}'.$$

Betrachten wir jetzt speziell die Differenz

$$\int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'} \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_l'} \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l' - \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{\varrho_{l-1}'} \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) d\tau_{l-1}'$$

$$= \int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'} \left\{ \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial y_{l-1}'} \frac{\partial y_{l-1}'}{\partial x_l'} + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial z_{l-1}'} \frac{\partial z_{l-1}'}{\partial x_l'} \right\} \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l'$$

(63′)

$$- \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{\varrho_{l-1}'} \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) d\tau_{l-1}' = \int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'} \left\{ \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \left(\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1 \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial y_{l-1}'} \frac{\partial y_{l-1}'}{\partial x_l'} + \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial z_{l-1}'} \frac{\partial z_{l-1}'}{\partial x_l'} \right\} \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l' + \int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'} \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l'$$

$$- \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{\varrho_{l-1}'} \frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'} \frac{\partial}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{1}{r_{l-1}}\right) d\tau_{l-1}' = L_3 + L_4 - L_5.$$ [36])

Es ist nun weiter mit

$$(64') \quad \Delta_l' = \frac{\partial(x_l', y_l', z_l)}{\partial(a', b', c')} = \frac{\partial x_l'}{\partial a'} \cdot \frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial x_l'}{\partial b'} \cdot \frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial x_l'}{\partial c'} \cdot \frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(a', b')},$$

$$\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1 = \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial a'} \frac{\partial a'}{\partial x_l'} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial b'} \frac{\partial b'}{\partial x_l'} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial c'} \frac{\partial c'}{\partial x_l'} - 1$$

---

[36]) Man beachte, daß $\varrho_{l-1} = \varrho_l$ ist.

$$= \frac{1}{\Delta_l'}\left\{\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial a'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial b'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial c'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(a', b')}\right\} - \frac{\Delta_{l-1}'}{\Delta_{l-1}'}$$

$$= \frac{1}{\Delta_l'}\left\{\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial a'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial b'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial c'}\frac{\partial(y_l', z_l')}{\partial(a', b')}\right\}$$

$$- \frac{1}{\Delta_{l-1}'}\left\{\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial a'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial b'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial x_{l-1}'}{\partial c'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(a', b')}\right\}$$

Wie man sich nunmehr ohne Schwierigkeiten überzeugt, ist wegen (41′) und (43′) in jedem Bereiche T_{0i}, die Randflächen eingeschlossen

$$(65') \quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1\right| \leqq \mathfrak{e}_{19}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1\right)^{(2)}\right| \leqq \mathfrak{e}_{20}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} \\ &\qquad + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

In ähnlicher Weise überzeugt man sich ohne Mühe, daß in jedem Bereiche T_{0i}

$$(66') \quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial y_{l-1}'}{\partial x_l'}\right|, \left|\frac{\partial z_{l-1}'}{\partial x_l'}\right| \leqq \mathfrak{e}_{21}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial y_{l-1}'}{\partial x_l'}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial y_{l-1}'}{\partial x_l'}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{22}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} \\ &\qquad + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

gilt. Man wird diesmal von den Beziehungen

$$\frac{\partial y_{l-1}'}{\partial a'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial y_{l-1}'}{\partial b'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial y_{l-1}'}{\partial c'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(a', b')} = 0,$$

$$\frac{\partial z_{l-1}'}{\partial a'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(b', c')} + \frac{\partial z_{l-1}'}{\partial b'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(c', a')} + \frac{\partial z_{l-1}'}{\partial c'}\frac{\partial(y_{l-1}', z_{l-1}')}{\partial(a', b')} = 0$$

Gebrauch machen.

Es sei vorübergehend zur Abkürzung

$$(67') \quad \int_{\infty_l} \frac{1}{\varrho_l'}\frac{\partial p_{l-1}'}{\partial x_{l-1}'}\left(\frac{\partial x_{l-1}'}{\partial x_l'} - 1\right)\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) d\tau_l' = -\frac{\partial}{\partial x_l}\int_{\infty_l} \varkappa_l'\,\frac{1}{r_l}\,d\tau_l' = J_1$$

gesetzt. Die Belegungsdichte $\varkappa_l$ ist in jedem Bereiche T_{0i} stetig und erfüllt daselbst eine H-Bedingung. Wegen (50′) und (65′) ist, wie sich ohne Mühe zeigen läßt,

$$(68') \quad \begin{aligned} &|\varkappa_l| \leqq \mathfrak{e}_{23}\,\Omega(1+R)^{-4}; \\ &|\varkappa_l^{(1)} - \varkappa_l^{(2)}| \leqq \mathfrak{e}_{24}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Nach bekannten Sätzen[36a]) ist also J_1 überall stetig und hat im Innern und auf dem Rande eines jeden Bereiches T_{0i} stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Es gelten Ungleichheiten von der Form

$$(69') \quad \begin{aligned} &|J_1| \leqq e_{25}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \quad \left|\frac{\partial J_1}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq e_{26}\,\Omega(1+R_0)^{-3}, \\ &\left|\left(\frac{\partial J_1}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial J_1}{\partial x_l}\right)^{2}\right|, \ldots \leqq e_{27}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-3-\lambda} + (1+R_{02})^{-3-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Ganz analoge Beziehungen erfüllt augenscheinlich der Integralausdruck L_3:

$$(70') \quad \begin{aligned} &|L_3| \leqq e_{28}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \quad \left|\frac{\partial L_3}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq e_{29}\,\Omega(1+R_0)^{-3}, \\ &\left|\left(\frac{\partial L_3}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial L_3}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq e_{30}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-3-\lambda} + (1+R_{02})^{-3-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wie man sich ohne weiteres überzeugt, läßt sich auf die Differenz $L_4 - L_5$ der loc. cit.[29]) S. 232—238 angegebene Satz anwenden. In der Tat erfüllt $\frac{1}{\varrho_l}\frac{\partial p_{l-1}}{\partial x_{l-1}} = \frac{1}{\varrho_{l-1}}\frac{\partial p_{l-1}}{\partial x_{l-1}}$ alle a. a. O. der mit ϑ bezeichneten Funktion auferlegten Bedingungen. Wir finden also

$$(71') \quad \begin{aligned} &|L_4 - L_5| \leqq e_{31}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_l}(L_4 - L_5)\right|, \ldots \leqq e_{32}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_4 - L_5)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_4 - L_5)\right)^{(2)}\right|, \ldots \\ &\qquad \leqq e_{33}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (70′), (71′) und den analogen Beziehungen, die man erhält, wenn man x_l, x_{l-1} durch y_l, y_{l-1} bzw. z_l, z_{l-1} ersetzt, folgt jetzt unmittelbar

$$(72') \quad \begin{aligned} &|L_1 - L_2| \leqq e_{34}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_l}(L_1 - L_2)\right|, \ldots \leqq e_{35}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_1 - L_2)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_1 - L_2)\right)^{(2)}\right|, \ldots \\ &\qquad \leqq e_{36}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Betrachten wir endlich den Ausdruck

$$(73') \quad \begin{aligned} L_6 &= f_l(x_l, y_l, z_l) - f_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) \\ &= -\int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\, g_l(x_l', y_l', z_l')\, d\tau_l' + \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{r_{l-1}}\, g_{l-1}(x_{l-1}', y_{l-1}', z_{l-1}')\, d\tau_{l-1}' \\ &= -\int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\,[g_l(x_l', y_l', z_l') - g_{l-1}(x_{l-1}', y_{l-1}', z_{l-1}')]\, d\tau_l' \\ &\quad + \int_{\infty_{l-1}} \frac{1}{r_{l-1}}\, g_{l-1}(x_{l-1}', y_{l-1}', z_{l-1}')\, d\tau_{l-1}' - \int_{\infty_l} \frac{1}{r_l}\, g_{l-1}(x_{l-1}', y_{l-1}', z_{l-1}')\, d\tau_l' \\ &= L_7 + L_8 - L_9. \end{aligned}$$

[36a]) Vgl. loc. cit.[27]) S. 232.

Wegen (58′) und (59′) ist vor allem gewiß

$$(74') \quad \begin{gathered} |L_7| \leqq \mathfrak{e}_{37}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial L_7}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{38}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ \left|\left(\frac{\partial L_7}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial L_7}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{39}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Auf die Differenz $L_8 - L_9$ läßt sich ein Hilfssatz meiner dritten Abhandlung zur Potentialtheorie anwenden[37]). Wir finden

$$(75') \quad \begin{gathered} |L_8 - L_9| \leqq \mathfrak{e}_{40}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_l}(L_8 - L_9)\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{41}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ \left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_8 - L_9)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(L_8 - L_9)\right)^{(2)}\right|, \ldots \\ \leqq \mathfrak{e}_{42}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Aus (73′), (74′) und (75′) folgen die weiteren Ungleichheiten

$$(76') \quad \begin{gathered} |L_6| \leqq \mathfrak{e}_{43}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial L_6}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{44}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ \left|\left(\frac{\partial L_6}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial L_6}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{45}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

§ 9.

Fortsetzung.

Wir kehren jetzt zu der Integralgleichung (61′), die wir in der Form

$$(77') \quad \begin{gathered} 4\pi\frac{p_l - p_{l-1}}{\varrho_l} = \int_{\mathfrak{o}_l} (p_l' - p_{l-1}')\left\{\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial x_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial y_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right)\right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{\varrho_l'}\right)\frac{\partial}{\partial z_l'}\left(\frac{1}{r_l}\right)\right\} d\tau_l' + F_l(x_l, y_l, z_l), \\ F_l(x_l, y_l, z_l) = -L_1 + L_2 + L_6 \end{gathered}$$

schreiben, zurück. Aus (72′) und (76′) folgt

$$(78') \quad \begin{gathered} |F_l| \leqq \mathfrak{e}_{46}\,\Omega(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial F_l}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{47}\,\Omega(1+R_0)^{-2}, \\ \left|\left(\frac{\partial F_l}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial F_l}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{48}\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Den Ergebnissen des § 6 zufolge ist

$$(79') \quad |p_l - p_{l-1}| \leqq \mathfrak{e}_{49}\,\Omega(1+R_0)^{-1}.$$

---

[37]) Vgl. loc. cit. [29]) S. 232—238. Die an der bezeichneten Stelle angegebenen Formeln liefern unmittelbar Abschätzungen für

$$\left|\frac{\partial L_9}{\partial x_l} - \frac{\partial L_8}{\partial x_{l-1}}\right| \quad \text{sowie} \quad \left|\left(\frac{\partial L_9}{\partial x_l} - \frac{\partial L_8}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial L_9}{\partial x_l} - \frac{\partial L_8}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}\right|.$$

Der Übergang zu den Formeln (75′) bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Der Integralausdruck

$$(80') \qquad L_{10} = \int_{\infty_l} (p_l' - p_{l-1}') \left\{ \frac{\partial}{\partial x_l'} \left(\frac{1}{\varrho_l'}\right) \frac{\partial}{\partial x_l'} \left(\frac{1}{r}\right) + \ldots \right\} d\tau_l'$$

erfüllt wegen (1), (41′) und (79′) gewiß die Beziehungen

$$(81') \qquad \begin{aligned} &|L_{10}| \leqq \mathfrak{e}_{50}\, \Omega (1+R_0)^{-1}, \quad |(L_{10}(x_l, y_l, z_l))^{(1)} - (L_{10}(x_l, y_l, z_l))^{(2)}| \\ &\qquad \leqq \mathfrak{e}_{51}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-1-\lambda} + (1+R_{02})^{-1-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.\ ^{38}) \end{aligned}$$

Aus (77′), (81′) und (78′) ergibt sich ohne Schwierigkeiten

$$(82') \qquad \begin{aligned} &|(p_l - p_{l-1})^{(1)} - (p_l - p_{l-1})^{(2)}| \\ &\qquad \leqq \mathfrak{e}_{52}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-1-\lambda} + (1+R_{01})^{-1-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Den wiederholt zitierten potentialtheoretischen Sätzen gemäß (vgl. loc. cit. [29]) S. 213—231) folgt hieraus

$$(83') \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial L_{10}}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{53}\, \Omega (1+R)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial L_{10}}{\partial x_l}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial L_{10}}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{54}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (78′) und (83′) schließen wir nunmehr, daß

$$(84') \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial x_l}(p_l - p_{l-1})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{55}\, \Omega (1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}(p_l - p_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}(p_l - p_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \\ &\qquad \leqq \mathfrak{e}_{56}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

gilt.

Die vorstehenden Ergebnisse kann man ohne Schwierigkeiten auch auf die folgende Form bringen.

Für alle (a, b, c) ist

$$(85') \qquad |p_l - p_{l-1}| \leqq \mathfrak{e}_{49}\, \Omega (1+R_0)^{-1}.$$

Für alle (a, b, c) in jedem Bereiche T_{0i} mit Einschluß der Randflächen ist

$$(86') \qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial}{\partial a}(p_l - p_{l-1})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{57}\, \Omega (1+R_0)^{-2}, \\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(p_l - p_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(p_l - p_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \\ &\qquad \leqq \mathfrak{e}_{58}\, \Omega \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Wir versuchen jetzt die Ausdrücke $\xi_l - \xi_{l-1}$, $\eta_l - \eta_{l-1}$, $\zeta_l - \zeta_{l-1}$ abzuschätzen und beginnen mit den Größen

---

[38]) Vgl. loc. cit. [29]) S. 238—239.

$$2\xi_{*l} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_l}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_l}{\partial c} \right\} dt, \ \ldots$$

(87′)

$$2\xi_{*l-1} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_{l-1}}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_{l-1}}{\partial c} \right\} dt, \ \ldots .$$

Aus (86′) und (87′) folgt ohne weiteres für alle (a, b, c)

$$(88') \qquad |\xi_{*l} - \xi_{*l-1}|, \ \ldots \leqq e_{59}\,\Omega\,|t - t_0|\,(1 + R_0)^{-4},$$

sowie für alle (a, b, c) in jedem Bereiche T_{0i}

$$(89') \qquad |(\xi_{*l} - \xi_{*l-1})^{(1)} - (\xi_{*l} - \xi_{*l-1})^{(2)}|, \ \ldots$$
$$\leqq e_{60}\,\Omega\,|t - t_0|\,\{(1 + R_{01})^{-4-\lambda} + (1 + R_{02})^{-4-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda}.$$

Wir gehen jetzt zu den Größen $\xi_l^* - \xi_{l-1}^*, \ldots$ über. Hier handelt es sich um eine Abschätzung der Ausdrücke von der Form

$$(90') \qquad \frac{\partial Z_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c} = \frac{\partial Z_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} + \frac{\partial Z_l}{\partial y_l}\frac{\partial y_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} + \frac{\partial Z_l}{\partial z_l}\frac{\partial z_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c}$$
$$- \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\frac{\partial y_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c}$$

Es genügt etwa die Teildifferenz

$$(91') \qquad \frac{\partial Z_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c} = \left(\frac{\partial Z_l}{\partial x_l} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c}$$
$$+ \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\left(\frac{\partial x_l}{\partial b} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\right)\frac{\partial z_l}{\partial c} + \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\left(\frac{\partial z_l}{\partial c} - \frac{\partial z_{l-1}}{\partial c}\right)$$

zu betrachten. Beachtet man die vorhin bewiesenen Beziehungen (52) und (55′) sowie die Ungleichheiten (19) und (43′), so findet man fast unmittelbar

$$(92') \qquad \left|\frac{\partial Z_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial e} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c}\right| \leqq e_{61}\,\Omega\,(1 + R_0)^{-6},$$

$$(93') \qquad \left|\left(\frac{\partial Z_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial Z_l}{\partial x_l}\frac{\partial x_l}{\partial b}\frac{\partial z_l}{\partial c} - \frac{\partial Z_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\frac{\partial x_{l-1}}{\partial b}\frac{\partial z_{l-1}}{\partial c}\right)^{(2)}\right|$$
$$\leqq e_{62}\,\Omega\,\{(1 + R_{01})^{-6-\lambda} + (1 + R_{02})^{-6-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda}.$$

Aus diesen und den hierzu analogen Beziehungen folgen unmittelbar die weiteren Ungleichheiten

$$|\xi_l^* - \xi_{l-1}^*|, \ \ldots \leqq e_{63}\,\Omega\,|t - t_0|\,(1 + R_0)^{-6}, \quad \text{für alle } (a, b, c)$$

$$(94') \qquad |(\xi_l^* - \xi_{l-1}^*)^{(1)} - (\xi_l^* - \xi_{l-1}^*)^{(2)}|, \ \ldots$$
$$\leqq e_{64}\,\Omega\,|t - t_0|\,\{(1 + R_{01})^{-6-\lambda} + (1 + R_{02})^{-6-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda}$$

für alle (a, b, c) in jedem Bereiche T_{0i}.

Faßt man alles, was bis jetzt gewonnen wurde, zusammen, so findet man für alle (a, b, c)

$$(95') \qquad |\xi_l - \xi_{l-1}|, \ldots \leqq e_{65}\, \Omega\, |t - t_0|\,(1+R)^{-4},$$

sowie für alle (a, b, c) in jedem Bereiche T_{0i}

$$(96') \quad |(\xi_l - \xi_{l-1})^{(1)} - (\xi_l - \xi_{l-1})^{(2)}|, \ldots \leqq e_{66}\, \Omega\, |t - t_0|\,\{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Aus (1), (19), (35*), (41′) und (50′)[39]) folgt weiter für alle $n \leqq l$

$$|\xi_{n*}|, \ldots \leqq e_{67}\,|t-t_0|\,(1+R_0)^{-4}, \quad |(\xi_{n*})^{(1)} - (\xi_{n*})^{(2)}|, \ldots \leqq e_{68}\,|t-t_0|\,\{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda},$$

$$(97') \quad |\xi_n^*|, \ldots \leqq e_{69}\,|t-t_0|\,(1+R_0)^{-4}, \quad |(\xi_n^*)^{(1)} - (\xi_n^*)^{(2)}|, \ldots \leqq e_{70}\,|t-t_0|\,\{(1+R_{01})^{-4-\lambda} + (1+R_{02})^{-4-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$

darum nach (36)[39])

$$(98') \quad |\xi_n|, \ldots \leqq e_{71}(1+R_0)^{-2}, \quad |(\xi_n)^{(1)} - (\xi_n)^{(2)}|, \ldots \leqq e_{72}\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Die bekannten Hilfssätze der Potentialtheorie von O. Hölder, A. Liapounoff und A. Korn[40]) ergeben jetzt Beziehungen von der Form

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{\infty_n}\frac{1}{r_n}\eta_n'\,d\tau_n'\right|, \ldots \leqq e_{73}\,(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial z_n^2}\int_{\infty_n}\right|, \ldots \leqq e_{74}(1+R_0)^{-2},$$

$$(99') \quad \left|\left(\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\int_{\infty_n}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z_n^2}\int_{\infty_n}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq e_{75}\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda} \qquad (n \leqq l).$$

Wir stützen uns wieder einmal auf einen Hilfssatz meiner dritten potentialtheoretischen Abhandlung (vgl. loc. cit.[29]) S. 232—238) und gewinnen die Beziehungen

---

[39]) Wir denken uns in den Formeln (19), (35*), (36) $x, y, z, X, \ldots$ allemal durch $x_n, y_n, z_n, X_n, \ldots$ ersetzt.

[40]) Die Literatur findet sich in meinem Encyklopädieartikel II C 3, S. 199—209 angegeben. Man vergleiche ferner loc. cit.[29]), woselbst das Verhalten im Unendlichen eingehend diskutiert wird.

[40a]) Wir setzen auch hier zur Abkürzung $\int_{\infty_n}\eta_n'\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{1}{r_n}\right)d\tau_n' = \frac{\partial}{\partial z_n}\int_{\infty_n}\frac{1}{r_n}\eta_n'\,d\tau_n'$ u. dergl. Dementsprechend bedeutetet beispielsweise $\frac{\partial^2}{\partial z_n}\int_{\infty_n}\frac{1}{r_n}\eta_n'\,d\tau_n'$ den Ausdruck $\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{\infty_n}\eta_n'\frac{\partial}{\partial z_n}\left(\frac{1}{r_n}\right)d\tau_n'$.

$$\left|\frac{\partial}{\partial z_l}\int\limits_{\infty_l}\frac{1}{r_l}\eta_l'\,d\tau_l' - \frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\frac{1}{r_{l-1}}\eta_{l-1}'\,d\tau_{l-1}'\right|, \ldots \leqq e_{76}\,\Omega\,|t-t_0|\,(1+R_0)^{-1},$$

$$(100') \qquad \left|\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int\limits_{\infty_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right|, \ldots \leqq e_{77}\,\Omega\,|t-t_0|\,(1+R_0)^{-2},$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int\limits_{\infty_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int\limits_{\infty_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq e_{78}\,\Omega\,|t-t_0|\,\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})\}\,d_{12}^{\lambda}$$

Der fragliche Hilfssatz lautet wie folgt:

Der allseitig unbegrenzte Raum ∞_0 der Variablen a, b, c möge au die ebenfalls allseitig unbegrenzten Räume ∞_l und ∞_{l-1} topologisch ab gebildet sein, wobei (a, b, c) entsprechend in (x_l, y_l, z_l) und $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}$ übergeht. Bekannt ist, daß die Funktionen x_l, y_l, z_l und x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-} die Beziehungen (41′) für $n = l$ und (43′) erfüllen. Betrachten wir di Ausdrücke

$$(101') \qquad \frac{\partial}{\partial y_l}\int\limits_{\infty_l}\frac{1}{r_l}\xi_l'\,d\tau_l' \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial y_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\frac{1}{r_{l-1}}\xi_{l-1}'\,d\tau_{l-1}'.\ ^{41})$$

Erfüllen noch die Dichten ξ_l' und ξ_{l-1}' die Beziehungen (95′) und (96′) so gelten Ungleichheiten von der Form (100′).[42])

Es ist nun weiter z. B.

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int\limits_{\infty_l}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right) = \frac{\partial z_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int\limits_{\infty_l} + \frac{\partial y_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l\,\partial y_l}\int\limits_{\infty_l} + \frac{\partial x_l}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_l\,\partial x_l}\int\limits_{\infty_l}$$

$$(102') \quad - \frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}} - \frac{\partial y_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}\,\partial y_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}} - \frac{\partial x_{l-1}}{\partial a}\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}\,\partial x_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}$$
$$= \left(\frac{\partial^2}{\partial z_l^2}\int\limits_{\infty_l} - \frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)\frac{\partial z_l}{\partial a} + \left(\frac{\partial z_l}{\partial a} - \frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}\right)\frac{\partial^2}{\partial z_{l-1}^2}\int\limits_{\infty_{l-1}} + \ldots.$$

Mit Rücksicht auf (100′), (41′), (43′), (99′) folgt hieraus

$$(103') \qquad \left|\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int\limits_{\infty_l}\right) - \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)\right| \leqq e_{79}\,|t-t_0|\,\Omega\,(1+R_0)^{-2}.$$

---

[41]) Sowie die Ausdrücke, die man erhält, wenn man ξ_1, ξ_{l-1} entsprechend durch $\eta_l, \eta_{l-1}; \zeta_l, \zeta_{l-1}$ ersetzt.

[42]) A. a. O. treten für (a, b, c), (x_l, y_l, z_l) und $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ entsprechend (x, y, z), $(x+\hat{\xi}, y+\hat{\eta}, z+\hat{\zeta})$ und $(x+\xi, y+\dot{\eta}, z+\dot{\zeta})$ ein. Was jetzt $\Omega\,|t-t_0$ bedeutet, hieß dort einfach Ω.

In ähnlicher Weise gelangt man zu der Ungleichheit

$$(104') \quad \left|\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int\limits_{\infty_l}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_l}\int\limits_{\infty_l}\right)-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\partial}{\partial z_{l-1}}\int\limits_{\infty_{l-1}}\right)\right)^{(2)}\right|$$
$$\leqq \mathfrak{e}_{80}|t-t_0|\,\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda}+(1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda}.$$

Analoge Beziehungen gelten für die anderen in (38′) vorkommenden Volumintegrale. Aus (38′) mit $n=l$, (100′), (103′) und (104′) ergeben sich die weiteren Beziehungen

$$(105') \quad \begin{aligned} &|u_{l+1}-u_l| \leqq \mathfrak{e}_{81}\,\Omega\,|t-t_0|(1+R_0)^{-1},\\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)\right|,\ldots \leqq \mathfrak{e}_{81}\,\Omega\,|t-t_0|(1+R_0)^{-2},\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{l+1}-u_l)\right)^{(2)}\right|,\ldots\\ &\qquad \leqq \mathfrak{e}_{81}\,\Omega\,|t-t_0|\{(1+R_{01})^{-2-\lambda}+(1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

sowie die analogen Beziehungen für $|v_{l+1}-v_l|,\ldots,|w_{l+1}-w_l|,\ldots$.

Für alle $t-t_0 \leqq \bar{t}$, unter $\bar{t}$ einen hinreichend kleinen Wert verstanden, ist gewiß

$$(106') \quad \begin{aligned} &|u_2-u_1|,\ldots \leqq \Omega(1+R_0)^{-1},\\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)\right|,\ldots \leqq \Omega(1+R_0)^{-2},\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_2-u_1)\right)^{(2)}\right|,\ldots\\ &\qquad \leqq \Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda}+(1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Um sich hiervon zu überzeugen, genügt es, die Betrachtungen, die zu Formeln (105′) führten, auf die Beziehungen (13′) und (24′), die u_1, v_1, w_1 bzw. u_2, v_2, w_2 geben, anzuwenden. Setzt man t^* gleich der kleinsten der vier Zahlen $1, \bar{t}, \frac{\Omega_0}{\Omega_*}, \frac{1}{2\,\mathfrak{e}_{81}}$, so findet man fast unmittelbar, daß die Beziehungen (39′) und (42′) für alle l erfüllt sind.

In der Tat findet man wegen (105′) sukzessive für alle $m \geqq 2$

$$(107') \quad \begin{aligned} &|u_{m+1}-u_m|,\ldots \leqq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\Omega(1+R_0)^{-1},\\ &\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_{m+1}-u_m)\right|,\ldots \leqq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\Omega(1+R_0)^{-2},\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{m+1}-u_m)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_{m+1}-u_m)\right)^{(2)}\right|,\ldots\\ &\qquad \leqq \left(\tfrac{1}{2}\right)^{m-1}\Omega\{(1+R_{01})^{-2-\lambda}+(1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\,d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

und darum beispielsweise wegen (11′), (3), (106′) und (107′)

$$
\begin{aligned}
|u_m| &\leqq |u_1| + |u_2 - u_1| + \ldots + |u_m - u_{m-1}| \\
&\leqq \left\{c_2 + \Omega + \frac{1}{2}\Omega + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\Omega\right\}(1+R_0)^{-1} \\
&< \{c_2 + 2\Omega\}(1+R_0)^{-1} < \{c_2 + \Omega_0\}(1+R_0)^{-1} \\
&< 2c_2(1+R_0)^{-1} = \Omega_*(1+R_0)^{-1}
\end{aligned} \tag{108′}
$$

und analog

$$
\left|\frac{\partial u_m}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega_*(1+R_0)^{-2}, \tag{109′}
$$

$$
\left|\left(\frac{\partial u_m}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_m}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega_*\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\}\, d_{12}^{\lambda}
$$

Die unendlichen Reihen

$$
u_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \qquad \frac{\partial u_1}{\partial a} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}(u_n - u_{n-1}), \ldots
$$

konvergieren wegen (107′) *in jedem beschränkten Bereiche des Raume* (a, b, c) *für alle* t *in* $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ *wie geometrische Reihen mit de* *Quotienten* $\frac{1}{2}$. *Augenscheinlich konvergieren auch die unendlichen Reihe*

$$
x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \ \ldots, \ z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(z - z_{n-1})
$$

wie geometrische Reihen. Es sei

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \ \ldots, \quad z = z_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(z_n - z_{n-1}), \\
u &= u_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \ \ldots, \quad w = w_1 + \sum_{n=2}^{\infty}(w_n - w_{n-1}).
\end{aligned} \tag{110′}
$$

Offenbar haben x, y, z für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ und alle $(a, b,$ im Innern und auf dem Rande eines jeden Bereiches T_{0i} stetige Ab leitungen erster Ordnung. Es ist

$$
\frac{dx}{dt} = u, \qquad \frac{dy}{dt} = v, \qquad \frac{dz}{dt} = w.
$$

Auch die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial a}\frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial}{\partial c}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial w}{\partial c}$ sind i jedem der obigen Bereiche vorhanden und stetig. Aus den Ungleich heiten (39′) und (41′), die für alle n gelten, folgen durch Grenzübergan für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ die weiteren Beziehungen

$$|x-a|, \ldots, |z-c| \leqq \Omega_0 (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x-a)\right|, \ldots, \left|\frac{\partial}{\partial c}(z-c)\right| \leqq \Omega_0 (1+R_0)^{-2},$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-a)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x-a)\right)^{(2)}\right|, \ldots$$

(111′)
$$\leqq \Omega_0 \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\} d_{12}^{\lambda},$$

$$|u|, |v|, |w| \leqq \Omega_* (1+R_0)^{-1},$$

$$\left|\frac{\partial u}{\partial a}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w}{\partial c}\right| \leqq \Omega_* (1+R_0)^{-2},$$

$$\left|\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega_* \{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\} d_{12}^{\lambda}.$$

Aus (13′), (16′), (22′), (23′), (24′), (27′), (28′), (29), (30′), (31′) und den analogen Gleichungen für p_3; x_4, y_4, z_4; p_5, x_5, y_5, z_5; ... folgt für $n \to \infty$ mit Rücksicht auf den vorhin bereits benutzten fundamentalen Hilfssatz für alle (a, b, c)

(112′)
$$x = a + \int_{t_0}^{t} dt \left\{ -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\zeta' d\tau' \right\},$$

. . . . . .

mit

$$\xi = \xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \qquad \eta = \xi_0 \frac{\partial y}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial y}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial y}{\partial c},$$

$$\zeta = \xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c},$$

$$\xi_0 = \xi_0 + \xi^* + \xi_*, \quad \eta_0 = \eta_0 + \eta^* + \eta_*, \quad \zeta_0 = \zeta_0 + \zeta^* + \zeta_*,$$

(113′)
$$2\xi_* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial x}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a} \right\} dt, \ldots,$$

$$2\xi^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} \right\} dt, \ldots,$$

sowie

$$4\pi \frac{p}{\varrho} = \int \bar{p}' \left\{ \frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{\varrho'}\right) \right\} d\tau'$$

(114′)
$$- \int \frac{1}{r}\left\{ \frac{\partial X'}{\partial x'} + \frac{\partial Y'}{\partial y'} + \frac{\partial Z'}{\partial z'} \right\} d\tau'$$

$$+ \int \frac{1}{r}\left\{ \left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2 + 2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'} + 2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'} + 2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'} \right\} d\tau'.$$

In der Tat besagt dieser Hilfssatz unter anderem folgendes.

Der Raum der Variablen $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ möge durch die topologische Abbildung $\tilde{x} = \tilde{x}(a, b, c, t), \ldots, \tilde{z} = \tilde{z}(a, b, c, t)$ auf den Raum (a, b, c) bezogen sein. Es wird angenommen, daß $\tilde{x} - a$, $\tilde{y} - b$, $\tilde{z} - c$ den Be-

ziehungen genügen, die man erhält, wenn man in (41′) x_n, y_n, z_n durch $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ ersetzt, und daß ferner die weiteren Ungleichheiten

$$|x-\tilde{x}|, \ldots, \leqq \overline{\Omega}(1+R_0)^{-1}, \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x-\tilde{x})\right|, \ldots \leqq \overline{\Omega}(1+R_0)^{-2}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x-\tilde{x})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x-\tilde{x})\right)^{(2)}\right|, \ldots \tag{115′}$$

$$\leqq \overline{\Omega}\{(1+R_{01})^{-2-\lambda} + (1+R_{02})^{-2-\lambda}\} d_{12}^{\lambda} \qquad (\overline{\Omega} \leqq \tfrac{1}{2}\Omega_{0}$$

gelten. Alsdann ist beispielsweise in naheliegender Schreibweise

$$\left|\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\int\frac{1}{\tilde{r}}\tilde{\eta}'\,d\tilde{\tau}'\right| \leqq e_{82}\,\overline{\Omega}(1+R_0)^{-1}.$$

Für $\overline{\Omega} \to 0$ folgt hieraus

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{z}}\int\frac{1}{\tilde{r}}\tilde{\eta}'\,d\tilde{\tau}' \to \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'.$$

§ 10.

Schluß des Existenzbeweises und der Unitätssatz.

Aus (112′) folgt durch Differentiation

$$u = \frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau',$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau', \tag{116′}$$

$$w = \frac{dz}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'.$$

Offenbar sind u, v, w überall stetig und haben in jedem Bereiche T_i dem Bilde von T_{0i} im Raume x, y, z, stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Die Tangentialableitungen erster Ordnung ändern sich beim Durchgang durch S stetig, während die Normalableitungen auf S im allgemeinen einen Sprung erleiden. Das Verhalten im Unendlichen ist durch die Beziehungen (111′) charakterisiert.

Es gilt, wie man aus (116′) unmittelbar sieht, für alle nicht auf S befindlichen (x, y, z)

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{117′}$$

darum, zunächst außer auf S_0, da es sich also um eine Bewegung inkompressibler Flüssigkeit handelt,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(a, b, c)} = 1.$$

Aus Gründen der Stetigkeit gelten diese sowie die vorhergehende Beziehung auch noch auf S.

Aus (116′) und (117′) folgt, wie wir jetzt zeigen wollen,

$$(118') \qquad 2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \qquad 2\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Dies ließe sich wie auf S. 110—111 der ersten Abhandlung beweisen, wenn die Funktionen x, y, z auch noch abteilungsweise stetige Ableitungen zweiter Ordnung hätten[43]). Tatsächlich ist aber nur bekannt, daß $\frac{\partial x}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial c}$ in jedem Bereiche T_{0i} einer H-Bedingung genügen. Man muß sich darum nach anderen Hilfsmitteln umsehen.

Es sei $\mathfrak{K}_1$, wie auf S. 213, ein Kugelkörper vom Radius r_1 um den Koordinatenursprung, und es möge (x, y, z) einen Punkt im Innern von $\mathfrak{K}_1$ bezeichnen. Es gilt dann

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' \\
&\quad - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' - \frac{1}{2\pi}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau' \\
&\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau' - \frac{1}{2\pi}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\xi'\,d\tau' \\
(119') \quad &= \frac{1}{2\pi}\Delta\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial y}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial z}\int_{\mathfrak{K}_1}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right) + \frac{1}{2\pi}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\Delta\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau' - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\infty-\mathfrak{K}_1}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi'\right. \\
&\quad \left. + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\right\}d\tau' \\
&= -2\zeta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right).
\end{aligned}$$

Der Klammerausdruck rechts verschwindet. In der Tat ist zunächst wegen

$$\begin{aligned}
(120') \qquad &\int\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\right\}d\tau' \\
&\quad = -\int\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\xi_0'\frac{\partial x'}{\partial a'} + \eta_0'\frac{\partial x'}{\partial b'} + \zeta_0'\frac{\partial x'}{\partial c'}\right]\right. \\
&\left. + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\xi_0'\frac{\partial y'}{\partial a'} + \eta_0'\frac{\partial y'}{\partial b'} + \zeta_0'\frac{\partial y'}{\partial c'}\right] + \frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\xi_0'\frac{\partial z'}{\partial a'} + \eta_0'\frac{\partial z'}{\partial b'} + \zeta_0'\frac{\partial z'}{\partial c'}\right]\right\}d\tau_0' \\
&\quad = -\int\left\{\xi_0'\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right) + \eta_0'\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta_0'\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau_0' \\
&\quad = -\int\left\{\xi_0'\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right) + \eta_0'\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right) + \zeta_0'\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau_0'
\end{aligned}$$

[43]) Vgl. die „Ergänzungen“ S. 311—315.

$$-\int\left\{\xi^{*\prime}\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right)+\eta^{*\prime}\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right)+\zeta^{*\prime}\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau_0'$$

$$-\int\left\{\xi_*'\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right)+\eta_*'\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right)+\zeta_*'\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau_0'$$

$$=N_1+N_2+N_3. \qquad (d\tau_0'=da'\,db'\,dc')$$

Betrachten wir den Integralausdruck N_1 etwas näher. Nach bekanntem Sätzen können die Funktionen u_0, v_0, w_0 durch Folgen analytischer, im Unendlichen wie R_0^{-1} verschwindender Funktionen $u_0^{(n)}$, $v_0^{(n)}$, $w_0^{(n)}$ beliebig gleichmäßig approximiert werden. Man kann sich dabei so einrichten, daß sich für $\left|\frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial a}\right|,\ldots,\left|\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial c}\right|$ eine für alle n geltende Schranke von der Form

$$\left|\frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial a}\right|\leqq e_{88}(1+R_0)^{-3}$$

ergibt und in jedem ganz im Innern eines Bereiches T_{0i} liegenden Bereiche

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\partial u_0^{(n)}}{\partial a}=\frac{\partial u_0}{\partial a},\ldots,\lim_{n\to\infty}\frac{\partial w_0^{(n)}}{\partial c}=\frac{\partial w_0}{\partial c}$$

gilt. Augenscheinlich ist

$$N_1=\lim_{n\to\infty}N_1^{(n)},\quad N_1^{(n)}=-\frac{1}{2}\int\left\{\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial w_0^{(n)\prime}}{\partial b'}-\frac{\partial v_0^{(n)\prime}}{\partial c'}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial u_0^{(n)\prime}}{\partial c'}-\frac{\partial w_0^{(n)\prime}}{\partial a'}\right)+\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial v_0^{(n)\prime}}{\partial a'}-\frac{\partial v_0^{(n)\prime}}{\partial b'}\right)\right\}d\tau_0'$$

und nach einer teilweisen Integration, wie man sich ohne Mühe überzeugt,

$$N_1^{(n)}=\frac{1}{2}\int\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{\partial w_0^{(n)\prime}}{\partial b'}-\frac{\partial v_0^{(n)\prime}}{\partial c'}\right)+\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{\partial u_0^{(n)\prime}}{\partial c'}-\frac{\partial w_0^{(n)\prime}}{\partial a'}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{\partial v_0^{(n)\prime}}{\partial a'}-\frac{\partial u_0^{(n)\prime}}{\partial b'}\right)\right\}d\tau_0'=0.$$

Demnach ist auch

$$\lim_{n\to\infty}N_1^{(n)}=N_1=0.$$

In ganz ähnlicher Weise finden wir in naheliegender Schreibweise

$$N_2=\lim_{n\to\infty}N_2^{(n)},\quad N_2^{(n)}=-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}dt\int\left\{\frac{\partial}{\partial a'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial b'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial c'}-\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial c'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial b'}+\ldots\right]\right.$$

$$+\frac{\partial}{\partial b'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial c'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial a'}-\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial a'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial c'}+\ldots\right]$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial c'}\left(\frac{1}{r}\right)\left[\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial a'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial b'}-\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial b'}\frac{\partial x^{(n)\prime}}{\partial a'}+\ldots\right]\right\}d\tau_0',$$

und auch jetzt ergibt eine teilweise Integration

$$N_2^{(n)} = 0, \quad \text{mithin} \quad N_2 = 0.$$

Ebenso findet man

$$N_3 = 0,$$

darum, wie behauptet,

$$\int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta' \right\} d\tau' = 0.$$

Die Formel (119′) ergibt jetzt

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta. \tag{121′}$$

In ähnlicher Weise findet man

$$2\xi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad 2\eta = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{$\overline{121}$′}$$

Es ist nicht schwer zu sehen, daß für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ die Beschleunigungskomponenten $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ vorhanden und stetig sind. Des weiteren sind die Funktionen $\frac{d}{dx}\frac{du}{dt}, \ldots$ vorhanden und abteilungsweise stetig (vgl. die Fußnote 16[a]). Aus (113′) und (116′) folgt beispielsweise

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)\eta' d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\right)\zeta' d\tau'$$
$$- \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\eta'}{dt} d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\zeta'}{dt} d\tau', \text{[44]}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi_0 \frac{\partial v}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial v}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{d\eta_0}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{d\zeta_0}{dt}$$
$$= \xi_0 \frac{\partial v}{\partial a} + \eta_0 \frac{\partial v}{\partial b} + \zeta_0 \frac{\partial v}{\partial c}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial y}{\partial a}\left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a} + \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b}$$
$$+ \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} \right\} + \ldots. \tag{122′}$$

Wir finden ohne Mühe

$$\left|\frac{d\xi}{dt}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{e}_{84}(1 + R_0)^{-4}.$$

Wie man weiter unmittelbar findet, ist

$$\left|\frac{du}{dt}\right|, \left|\frac{dv}{dt}\right|, \left|\frac{dw}{dt}\right| \leqq \mathfrak{e}_{85}(1 + R_0)^{-1}. \text{[44a]} \tag{123′}$$

---

[44]) Es gilt beispielsweise

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = -\frac{d}{dt}\frac{z-z'}{r^3} = -\frac{1}{r^3}\left(\frac{dz}{dt} - \frac{dz'}{dt}\right) + \frac{3}{2}\frac{z-z'}{r^3}\frac{dr^2}{dt} = -\frac{1}{r^3}(w-w')$$
$$+ 3\frac{z-z'}{r^5}\{(x-x')(u-u') + (y-y')(v-v') + (z-z')(w-w')\}.$$

[44a]) Bei dem Beweise der Ungleichheiten (123′) kommen die Hilfssätze loc. cit. [20]), S. 213—231 und S. 232 zur Anwendung. Wie sich alsbald zeigen wird, verschwinden $\frac{du}{dt}, \ldots$ im Unendlichen wie R_0^{-2}.

Wir beweisen jetzt, daß die Funktionen $x(a,b,c,t)$, $y(a,b,c,t)$, $z(a,b,c,t)$, $p(a,b,c,t)$ den Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen (20) genügen.

Aus den Gleichungen

$$(124') \qquad \begin{aligned} 2\xi &= \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi_0 \frac{\partial x}{\partial a} + 2\eta_0 \frac{\partial x}{\partial b} + 2\zeta_0 \frac{\partial x}{\partial c}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ 2\zeta &= \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\xi_0 \frac{\partial z}{\partial a} + 2\eta_0 \frac{\partial z}{\partial b} + 2\zeta_0 \frac{\partial z}{\partial c} \end{aligned}$$

folgen durch Auflösung nach $2\xi_0$, $2\eta_0$, $2\zeta_0$ nach einer einfachen Umformung die weiteren Beziehungen

$$(125') \qquad \begin{aligned} Q_1 &\equiv \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b} \\ &= 2\xi_0 = 2\xi_0 + 2\xi^* + 2\xi_*, \\ Q_2 &\equiv \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial a} - \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial c} + \frac{\partial v}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial a} - \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial c} + \frac{\partial w}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial c} \\ &= 2\eta_0 = 2\eta_0 + 2\eta^* + 2\eta_*, \\ Q_3 &\equiv \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial x}{\partial b} - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial a} + \frac{\partial v}{\partial a}\frac{\partial y}{\partial b} - \frac{\partial v}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial a} + \frac{\partial w}{\partial a}\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{\partial w}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial a} \\ &= 2\zeta_0 = 2\zeta_0 + 2\zeta^* + 2\zeta_*. \end{aligned}$$

Sie besagen, daß der Ausdruck

$$(126') \qquad \begin{aligned} &P_1\,da + P_2\,db + P_3\,dc \equiv \left(u\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a}\right)da \\ &+\left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} - v_0 + w\frac{\partial z}{\partial b}\right)db + \left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0\right)dc \\ -(&A_1\,da + B_1\,db + C_1\,dc) - \left(da\int_{t_0}^{t} p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt + db\int_{t_0}^{t} p\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt + dc\int_{t_0}^{t} p\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right. \end{aligned}$$

ein vollständiges Differential ist. Es sei in der Tat $\tilde{\Gamma}$ irgendeine geschlossene, etwa stetig gekrümmte Raumkurve, die mit S_0 keinen Punkt gemeinsam hat und so beschaffen ist, daß gewiß ein von $\tilde{\Gamma}$ umspanntes doppelpunktfreies, stetig gekrümmtes Flächenstück $\tilde{\Lambda}$ in dem Raume der Variablen a, b, c existiert, das S_0 weder trifft noch berührt. Bei geeigneter Wahl des Fortschreitungsinnes auf $\tilde{\Gamma}$ ist

$$(127') \qquad \begin{aligned} &\int_{\tilde{\Gamma}} P_1\,da + P_2\,db + P_3\,dc \\ &= \int_{\tilde{\Lambda}} [(Q_1 - 2\xi_0)\cos\tilde{\alpha} + (Q_2 - 2\eta_0)\cos\tilde{\beta} + (Q_3 - 2\zeta_0)\cos\tilde{\gamma})]\,d\tilde{\sigma} \end{aligned}$$

unter $\cos\tilde{\alpha}$, $\cos\tilde{\beta}$, $\cos\tilde{\gamma}$ die Richtungskosinus der Normale zu $\tilde{\Lambda}$ verstanden. Die Formel (127') ergibt sich unmittelbar aus dem Stokesschen

Satze, falls die Funktionen x, y, z, ϱ in jedem Bereiche T_{0i} auch noch stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen haben. Die Ausdrücke $Q_1 - 2\xi_0$, $Q_2 - 2\eta_0$, $Q_3 - 2\zeta_0$ sind einfach Komponenten des Wirbels des Vektors P_1, P_2, P_3. Ist, wie im vorliegenden Falle, über die Existenz der obigen Ableitungen nichts bekannt, so gelangt man zu der Gleichung (127′), indem man x, y, z, ϱ durch analytische Funktionen approximiert und zur Grenze übergeht (vgl. die Fußnote [12]), wo sich analoge Betrachtungen finden). Wegen (125′) ist

$$\int_{\bar{\Gamma}} P_1\,da + P_2\,db + P_3\,dc = 0,$$

womit unsere Behauptung bewiesen ist.

Offenbar ist auch der Ausdruck (28) ein vollständiges Differential. Er verschwindet, wie man leicht sieht, für $t = t_0$ identisch. Wir können darum, unter F eine geeignete, im Endlichen überall stetige Funktion, die in jedem Bereiche T_{0i} stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat, verstehend, schreiben

$$u\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 + v\frac{\partial y}{\partial a} + w\frac{\partial z}{\partial a} - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial a}(u^2+v^2+w^2)\,dt - A_1 - \int_{t_0}^{t} p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt$$

$$= -\frac{\partial}{\partial a}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varrho}F\,dt,$$

(128′) . . . . . .

$$u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + w\frac{\partial z}{\partial c} - w_0 - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\frac{\partial}{\partial c}(u^2+v^2+w^2)\,dt - C_1 - \int_{t_0}^{t} p\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)dt$$

$$= -\frac{\partial}{\partial c}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{\varrho}F\,dt\ ^{15})$$

---

[15]) Die Ausdrücke auf der linken Seite der Formeln (128′) besitzen stetige Ableitungen in bezug auf t. Die Funktion $\frac{1}{\varrho}F$ hat den Wert

(129′)
$$\frac{1}{\varrho}F = -\int_{(a_0,b_0,c_0)}^{(a,b,c)} da\left[\frac{d}{dt}\left(u\frac{\partial x}{\partial a} - u_0 + \ldots\right) - \ldots - p\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]$$
$$+ db\left[\frac{d}{dt}\left(u\frac{\partial x}{\partial b} + v\frac{\partial y}{\partial b} - \ldots\right) - \ldots - p\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right]$$
$$+ dc\left[\frac{d}{dt}\left(u\frac{\partial x}{\partial c} + v\frac{\partial y}{\partial c} + \ldots\right) - \ldots - p\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\right].$$

Wegen (123′) wird $\frac{1}{\varrho}F$ für $R_0 \to \infty$ höchstens wie $\log R_0$ unendlich. Wie sich alsbald zeigen wird, konvergiert $\frac{1}{\varrho}F_0$ für $R_0 \to \infty$ gegen einen festen Wert.

oder nach einer Differentiation in bezug auf t wegen (22)

$$\left(\frac{du}{dt}-X\right)\frac{\partial x}{\partial a}+\left(\frac{dv}{dt}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial a}+\left(\frac{dw}{dt}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial a}-p\,\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=-\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{\varrho}F\right)$$

$$\left(\frac{du}{dt}-X\right)\frac{\partial x}{\partial b}+\left(\frac{dv}{dt}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial b}+\left(\frac{dw}{dt}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial b}-p\,\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=-\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}F\right)\tag{130'}$$

$$\left(\frac{du}{dt}-X\right)\frac{\partial x}{\partial c}+\left(\frac{dv}{dt}-Y\right)\frac{\partial y}{\partial c}+\left(\frac{dw}{dt}-Z\right)\frac{\partial z}{\partial c}-p\,\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)=-\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}F\right)$$

und nach Auflösung in bezug auf $\frac{du}{dt}-X$, $\frac{dv}{dt}-Y$, $\frac{dw}{dt}-Z$ nach einer leichten Umformung

$$\begin{aligned}
&\frac{du}{dt}-X+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}F-\frac{1}{\varrho}p\right),\\
&\frac{dv}{dt}-Y+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}F-\frac{1}{\varrho}p\right),\\
&\frac{dw}{dt}-Z+\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}F-\frac{1}{\varrho}p\right).
\end{aligned}\tag{131'}$$ [46])

Aus (131') folgt nach Differentiation, da $\frac{du}{dt}, \ldots, \frac{\partial p}{\partial x}, \ldots$ stetige partielle Ableitungen erster Ordnung haben,

$$\Delta\left\{\frac{1}{\varrho}(F-p)\right\}=0.\tag{132'}$$

Im Unendlichen wird $\frac{1}{\varrho}(F-p)$ höchstens wie $\log R_0$ unendlich. Nach bekannten Sätzen ist

$$\frac{1}{\varrho}(F-p)=\text{Const.}\tag{133'}$$

Die Gleichungen (131') nehmen nunmehr die Gestalt

$$\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=X-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
\frac{dv}{dt}&=Y-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},\\
\frac{dw}{dt}&=Z-\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}
\end{aligned}\tag{134'}$$

---

[46]) Daß die Gleichungen (131') den Gleichungen (130') äquivalent sind, sieht man am einfachsten, wenn man ihre beiden Seiten entsprechend mit $\frac{\partial x}{\partial a}, \frac{\partial y}{\partial a}, \frac{\partial z}{\partial a}$; $\frac{\partial x}{\partial b}, \frac{\partial y}{\partial b}, \frac{\partial z}{\partial b}$; $\frac{\partial x}{\partial c}, \frac{\partial y}{\partial c}, \frac{\partial z}{\partial c}$ multipliziert und addiert.

an. Sie bilden, vereint mit der Kontinuitätsgleichung (117′), die Eulerschen hydrodynamischen Gleichungen des Problems. Aus (134′) folgt jetzt unmittelbar, daß $\frac{du}{dt}, \ldots$ im Unendlichen wie R_0^{-2} verschwinden.

Daß die Lösungen x, y, z, p, deren Existenz in dem vorstehenden bewiesen worden ist, die einzigen ihrer Art sind, ließe sich durch sinngemäße Abänderung des in der ersten Abhandlung durchgeführten Unitätsbeweises zeigen (vgl. a. a. O. S. 113—116).

Zweites Kapitel.

Eine in einem zwangläufig bewegten Gefäß eingeschlossene Flüssigkeitsmasse.

§ 1.

Problemstellung. Umformung der Bewegungsgleichungen.

Es handelt sich um eine ganz im Endlichen befindliche zusammenhängende Masse nicht notwendig homogener, inkompressibler, ideeller Flüssigkeit, die in ein Gefäß eingeschlossen ist, das sich in vorgeschriebener Weise bewegt und das wir der Einfachheit halber zunächst als einfach zusammenhängend und von einer einzigen Wandfläche begrenzt annehmen. Ist (x, y, z) ein Punkt auf der Innenseite Σ der Gefäßwand, so gilt für alle t in einem Intervalle $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ eine Gleichung

$$\Psi(x, y, z, t) = 0, \tag{1}$$

unter Ψ eine gegebene, etwa analytische und reguläre Funktion ihrer vier Argumente für alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ und alle (x, y, z) in einem dreidimensionalen Bereiche, der die Innenseite Σ_0 der Gefäßwand zur Zeit t_0 ganz in seinem Innern enthält, verstanden. Wir nehmen an, daß

$$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 > 0 \tag{1*}$$

ist[47]). Ist das Gefäß starr, so hängt Ψ in bekannter Weise von sechs

[47]) Statt durch eine Gleichung (1) kann die Bewegung der Gefäßwand natürlich auch durch Beziehungen von der Form

$$x = \xi(p, q, t), \qquad y = \eta(p, q, t), \qquad z = \zeta(p, q, t) \tag{1**}$$

gegeben sein. Hierbei bezeichnen in der üblichen Weise p, q ein geeignetes System

Parametern ab, die vorgeschriebene Funktionen der Zeit sind. Ruht das Gefäß, so ist Ψ von t unabhängig. Aus (1) folgt, wie man weiß, für alle (x, y, z) auf Σ die Beziehung

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} u + \frac{\partial \Psi}{\partial y} v + \frac{\partial \Psi}{\partial z} w = 0, \tag{2}$$

oder, wenn mit u_n die Komponente der Geschwindigkeit in der Richtung der Innennormale zu Σ bezeichnet wird,

$$u_n = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\ ^{48}). \tag{3}$$

Da das Gefäß von einer inkompressiblen Flüssigkeit voll erfüllt ist, so muß

$$\int_\Sigma u_n \, d\sigma = 0, \quad \text{demnach} \quad \int_\Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma = 0 \tag{4}$$

sein.

Die Dichte ϱ wird als eine stetige Funktion, die stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \varrho}{\partial a}, \frac{\partial \varrho}{\partial b}, \frac{\partial \varrho}{\partial c}$ haben, vorausgesetzt. Es wird weiter angenommen, daß die Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit t_0: u_0, v_0, w_0 in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig sind und dort stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung haben. Auf Σ_0 ist natürlich

$$\frac{\partial \Psi_0}{\partial t} + \frac{\partial \Psi_0}{\partial a} u_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial b} v_0 + \frac{\partial \Psi}{\partial c} w_0 = 0, \quad \Psi_0 = \Psi(a, b, c, t_0). \tag{5}$$

Im Gegensatz zu den Betrachtungen des ersten Kapitels wird jetzt von Unstetigkeitsflächen S_0, auf denen $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ sich sprungweise ändern könnten, abgesehen. *Die Wirbellinien können im übrigen beliebig verlaufen, u. a. auch auf Σ_0 endigen.* Natürlich kann in einem Teil des von Σ_0 begrenzten endlichen Bereiches Θ_0, oder auch überall in Θ_0 ein Geschwindigkeitspotential existieren[49]). Im übrigen wird vorausgesetzt, daß

auf Σ_0 erklärter Gaußscher Parameter; ξ, η, ζ sind analytische und reguläre Funktionen ihrer Argumente für alle (p, q) auf Σ_0 und alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t} \rangle$. Die weiteren Betrachtungen würden durch Einführung der Beziehungen (1*) an Stelle der Gleichung (1) eine nur unwesentliche Modifikation erfahren.

[48]) Es wird dabei vorausgesetzt, daß beim Übergang von Σ in das Innere der Flüssigkeitsmasse, Θ, längs einer Normale zu Σ die Funktion Ψ allemal positive Werte erhält. Diese Annahme bildet natürlich keine Einschränkung der Allgemeinheit.

[49]) Ist in einem Teil $\mathfrak{T}$ von Θ_0 die Bewegung irrotationell, so geht also der Wirbelvektor auf dem Rande von $\mathfrak{T}$ stetig in Null über. In der ersten Abhandlung ist ein Bewegungsproblem behandelt worden, wo demgegenüber der Wirbelvektor sich sprungweise ändern konnte (vgl. a. a. O. S. 116–121). Dort wurde eine geschlossene Wirbelröhre, die ganz im Innern von Θ_0 enthalten war, betrachtet, während jetzt Wirbelfäden auf Σ_0 endigen können.

$\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ in $\Theta_0 + \Sigma_0$ einer H-Bedingung genügen. Desgleichen wird angenommen, daß $\frac{du}{dt}, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ in $\Theta + \Sigma$ (dem von Σ begrenzten Bereiche) stetig sind und der H-Bedingung genügen.

Was schließlich die Komponenten der Einheitskräfte X, Y, Z betrifft, die auf die Flüssigkeitsteilchen wirken, so wird diesbezüglich vorausgesetzt, daß X, Y, Z, die von x, y, z und t abhängen, in einem Bereich erklärt sind, der $\Theta_0 + \Sigma_0$ ganz in seinem Innern enthält, und sich daselbst nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen stetig verhalten, sowie daß $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial z^2}$ einer H-Bedingung genügen.

Wir gehen auch diesmal von den in dem ersten Kapitel abgeleiteten Gleichungen (29), (35*), (36) und (37) aus, die, wie man unmittelbar sieht, für alle (x, y, z) in $\Theta + \Sigma$ gelten.

Um eine Bestimmungsgleichung für den Druck p zu gewinnen, überlegen wir jetzt wie folgt. Haben $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial t}$ stetige Ableitungen in bezug auf die Ortsvariablen, so sind gewiß auch $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}$ vorhanden und stetig. Aus den Eulerschen Gleichungen (134′) (vgl. S. 269) folgt wegen

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\, \partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\, \partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0, \tag{6}$$

wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned} L\{p\} \equiv{}& \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right) \\ ={}& \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) \\ & - \frac{\partial}{\partial y}\left(u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right). \end{aligned} \tag{7}$$

Diese Beziehung gilt für alle (x, y, z) in $\Theta + \Sigma$. Auf Σ ist ferner, wenn mit α, β, γ die von der Innennormale (n) mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel bezeichnet werden,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial p}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial p}{\partial z}\cos\gamma\right) \\ &= (X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma) - \left(\frac{du}{dt}\cos\alpha + \frac{dv}{dt}\cos\beta + \frac{dw}{dt}\cos\gamma\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung (8) steht als Minuend die Normalkomponente der Einheitskraft, als Subtrahend die Normalkomponente der Beschleunigung.

Es sei (x, y, z) ein Punkt im Innern von Θ, und es mögl $K(x, y, z; x', y', z')$ die zu der zweiten Randwertaufgabe gehörige Greens sche Funktion der Differentialgleichung $L\{u\} = 0$ bezeichnen. Al Funktion von x', y', z' aufgefaßt, ist K diejenige, außer in (x, y, z), stetig Lösung der Gleichung $L\{u\} = 0$, die in (x, y, z) wie

$$\varrho(x, y, z)[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$$

unendlich wird und der Randbedingung

$$\frac{1}{\varrho'}\frac{\partial}{\partial n'}K = \frac{4\pi}{D_*} \qquad (D_* = \text{Flächeninhalt von } \Sigma \tag{9}$$

sowie der Nebenbedingung

$$\int_\Sigma K(x, y, z; \sigma')\, d\sigma' = 0 \tag{10}$$

genügt. Wie man weiß, ist

$$K(x, y, z;\ x', y'; z') = K(x', y', z';\ x, y, z). \tag{11}$$

Nach bekannten Sätzen (vgl. die Formel (18) auf S. 79 und die Fußnote [51]) ist identisch

$$\begin{aligned} p(x, y, z) = &-\frac{1}{4\pi}\int_\Theta K(x, y, z;\ x', y', z')\, L\{p'\}\, d\tau' \\ &-\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma \frac{1}{\varrho'} K(x, y, z;\ \sigma')\frac{\partial p'}{\partial n'}\, d\sigma' + \frac{1}{D_*}\int_\Sigma p'\, d\sigma', \end{aligned} \tag{12}$$

mithin wegen (7) und (8)

$$\begin{aligned} p(x, y, z) = &-\frac{1}{4\pi}\int_\Theta K(x, y, z;\ x', y', z')\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right) d\tau' \\ &+\frac{1}{4\pi}\int_\Theta K(x, y, z;\ x', y', z')\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}+w'\frac{\partial u'}{\partial z'}\right)\right. \\ &\left.+\frac{\partial}{\partial y'}\left(u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}+w'\frac{\partial v'}{\partial z'}\right)+\frac{\partial}{\partial z'}\left(u'\frac{\partial w'}{\partial x'}+v'\frac{\partial w'}{\partial y'}+w'\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)\right\} d\tau' \\ &-\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma K(x, y, z;\ \sigma')\left\{X'\cos\alpha'+Y'\cos\beta'+Z'\cos\gamma'\right. \\ &\left.-\frac{du'}{dt}\cos\alpha'-\frac{dv'}{dt}\cos\beta'-\frac{dw'}{dt}\cos\gamma'\right\} d\sigma'+\frac{1}{D_*}\int_\Sigma p'\, d\sigma' \end{aligned} \tag{13}$$

Beachten wir, daß beispielsweise

$$u'\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y'\,\partial x'}+\frac{\partial^2 w'}{\partial z'\,\partial x'}\right) = u'\frac{\partial}{\partial x'}\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right) = 0 \tag{14}$$

ist, so finden wir, wenn wir überdies

$$\int_{\Sigma} p'\, d\sigma' = D_* p_0 > 0$$

festsetzen[50]),

$$p(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x,y,z;\, x',y',z')\left(\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right)d\tau'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x,y,z;\, x',y',z')\left\{\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial v'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)^2\right.$$

(15)
$$\left.+\,2\frac{\partial u'}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial x'}+2\frac{\partial u'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial x'}+2\frac{\partial v'}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial y'}\right\}d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} K(x,y,z;\, \sigma')\left\{X'\cos\alpha'+Y'\cos\beta'+Z'\cos\gamma'\right.$$

$$\left.-\frac{du'}{dt}\cos\alpha'-\frac{dv'}{dt}\cos\beta'-\frac{dw'}{dt}\cos\gamma'\right\}d\sigma'+p_0.$$

Diese Formel gilt, auch wenn bezüglich der Existenz der partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots$ *nichts bekannt ist.* Man kann dies wie folgt zeigen. Es sei Σ_* eine im Abstande h zu Σ parallele Fläche im Innern von Θ, und es möge Θ_* das von Σ_* begrenzte endliche Gebiet bezeichnen. Es sei schließlich K_* die zu K analoge, zu Θ_* gehörige Greensche Funktion der Differentialgleichung $L(u)=0$. Wir denken uns, ähnlich wie in § 3 des ersten Kapitels (vgl. S. 20) u, v, w, p und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung für alle (x,y,z) in $\Theta_*+\Sigma_*$ und für alle t in $\langle t_0+k,\ t_0+t_*-k\rangle$ $(k>0)$ durch analytische und reguläre Funktionen $u^{(n)}, v^{(n)}, w^{(n)}, p^{(n)}$ von x, y, z, t und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig approximiert und setzen

(16) $$\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p^{(n)}}{\partial x}+\frac{du^{(n)}}{dt}=X^{(n)},\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p^{(n)}}{\partial y}+\frac{dv^{(n)}}{dt}=Y^{(n)},\quad \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p^{(n)}}{\partial z}+\frac{dw^{(n)}}{dt}=Z^{(n)}$$

mit

$$\frac{du^{(n)}}{dt}=\frac{\partial u^{(n)}}{\partial t}+u^{(n)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}+v^{(n)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial y}+w^{(n)}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial z},\ldots.$$

Offenbar ist

(17) $$\lim_{n\to\infty} X^{(n)}=X,\quad \lim_{n\to\infty} Y^{(n)}=Y,\quad \lim_{n\to\infty} Z^{(n)}=Z.$$

---

[50]) Wir dürfen dies tun, da im vorliegenden Falle der Druck nur bis auf eine willkürliche additive Funktion der Zeit bestimmt ist.

Die bekannte Identität

$$p^{(n)}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta_*} K_*(x,y,z;\,x',y',z')\,L\{p^{(n)}\}\,d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_*}\frac{1}{\varrho'}\,K_*(x,y,z;\,\sigma')\frac{\partial p^{(n)\prime}}{\partial n'}\,d\sigma' + \frac{1}{D_*}\int_{\Sigma_*} p^{(n)\prime}\,d\sigma' \quad (18)$$

liefert [51]) (D_* = Flächeninhalt von Σ_*)

$$p^{(n)}(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta_*} K_*(x,y,z;\,x',y',z')\left\{\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial x'} + \frac{\partial Y^{(n)\prime}}{\partial y'} + \frac{\partial Z^{(n)\prime}}{\partial z'}\right\}d\tau'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta_*} K_*(x,y,z;\,x',y',z')\left\{\frac{\partial^2 u^{(n)\prime}}{\partial x'\,\partial t} + \frac{\partial^2 v^{(n)\prime}}{\partial y'\,\partial t} + \frac{\partial^2 w^{(n)\prime}}{\partial z'\,\partial t}\right\}d\tau'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta_*} K_*(x,y,z;\,x',y'\,z')\left\{\frac{\partial}{\partial x'}\left(u^{(n)\prime}\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial x'} + \ldots\right)\right. \quad (19)$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y'}\left(u^{(n)\prime}\frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial x'} + \ldots\right) + \frac{\partial}{\partial z'}\left(u^{(n)\prime}\frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial x'} + \ldots\right)\right\}d\tau'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma_*} K_*(x,y,z;\,\sigma')\left\{X^{(n)\prime}\cos\alpha' + \ldots - \frac{du^{(n)\prime}}{dt}\cos\alpha' - \ldots\right\}d\sigma' + \frac{1}{D_*}\int_{\Sigma_*} p^{(n)\prime}\,d\sigma'$$

Nun finden wir ohne Mühe

$$\int_{\Theta_*} K_*\left\{\frac{\partial^2 u^{(n)\prime}}{\partial x'\,\partial t} + \frac{\partial^2 v^{(n)\prime}}{\partial y'\,\partial t} + \frac{\partial^2 w^{(n)\prime}}{\partial z'\,\partial t}\right\}d\tau' = \frac{\partial}{\partial t}\int_{\Theta_*} K_*\left\{\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial x'} + \frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial y'} + \frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial z'}\right\}d\tau'$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}u^{(n)\prime} + \frac{\partial K_*}{\partial y'}v^{(n)\prime} + \frac{\partial K_*}{\partial z'}w^{(n)\prime}\right\}d\tau'$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_*}\left\{K_*(u^{(n)\prime}\cos\alpha' + v^{(n)\prime}\cos\beta' + w^{(n)\prime}\cos\gamma'\right\}d\sigma'$$

$$= -\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial t} + \frac{\partial K_*}{\partial y'}\frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial t} + \frac{\partial K_*}{\partial z'}\frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial t}\right\}d\tau'$$

$$-\int_{\Sigma_*} K_*\left(\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial t}\cos\alpha' + \frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial t}\cos\beta' + \frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial t}\cos\gamma'\right)d\sigma' \quad (20)$$

$$\to -\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}\frac{\partial u'}{\partial t} + \frac{\partial K_*}{\partial y'}\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial K_*}{\partial z'}\frac{\partial w'}{\partial t}\right\}d\tau'$$

$$-\int_{\Sigma_*} K_*\left(\frac{\partial u'}{\partial t}\cos\alpha' + \frac{\partial v'}{\partial t}\cos\beta' + \frac{\partial w'}{\partial t}\cos\gamma'\right)d\sigma'$$

$$= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}u' + \frac{\partial K_*}{\partial y'}v' + \frac{\partial K_*}{\partial z'}w'\right\}d\tau'$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma_*} K_*(u'\cos\alpha' + v'\cos\beta' + w'\cos\gamma')\,d\sigma' = 0$$

---

[51]) Sie folgt in bekannter Weise aus den Greenschen Sätzen. Vgl. z. B. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, zweite Mitteilung, Gött. Nachrichten 1904, S. 213–259, insb. S. 234–239.

weil offenbar

$$\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}u'+\frac{\partial K_*}{\partial y'}v'+\frac{\partial K_*}{\partial z'}w'\right\}d\tau'$$

(21)
$$+\int_{\Sigma_*}K_*(u'\cos\alpha'+v'\cos\beta'+w'\cos\gamma')\,d\sigma'$$
$$=-\int_{\Theta_*}K_*\left(\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}+\frac{\partial w'}{\partial z'}\right)d\tau'=0$$

ist. Des weiteren findet man beispielsweise

$$\int_{\Theta_*}K_*u^{(n)\prime}\left\{\frac{\partial^2u^{(n)\prime}}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2v^{(n)\prime}}{\partial x'\partial y'}+\frac{\partial^2w^{(n)\prime}}{\partial x'\partial z'}\right\}d\tau'$$
$$=\int_{\Theta_*}K_*u^{(n)\prime}\frac{\partial}{\partial x'}\left\{\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial x'}+\frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial y'}+\frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial z'}\right\}d\tau'$$
$$=-\int_{\Theta_*}\frac{\partial}{\partial x'}(K_*u^{(n)\prime})\left(\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial x'}+\frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial y'}+\frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial z'}\right)d\tau'$$
$$-\int_{\Sigma_*}K_*u^{(n)\prime}\cos\alpha'\left(\frac{\partial u^{(n)\prime}}{\partial x'}+\frac{\partial v^{(n)\prime}}{\partial y'}+\frac{\partial w^{(n)\prime}}{\partial z'}\right)d\sigma'\to 0.$$

Schließlich ist

$$\int_{\Theta_*}K_*\left\{\frac{\partial X^{(n)\prime}}{\partial x'}+\frac{\partial Y^{(n)\prime}}{\partial y'}+\frac{\partial Z^{(n)\prime}}{\partial z'}\right\}d\tau'$$
$$=-\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}X^{(n)\prime}+\frac{\partial K_*}{\partial y'}Y^{(n)\prime}+\frac{\partial K_*}{\partial z'}Z^{(n)\prime}\right\}d\tau'$$
$$-\int_{\Sigma_*}K_*(x,y,z;\sigma')\{X^{(n)\prime}\cos\alpha'+Y^{(n)\prime}\cos\beta'+Z^{(n)\prime}\cos\gamma'\}\,d\sigma'$$
$$\to-\int_{\Theta_*}\left\{\frac{\partial K_*}{\partial x'}X'+\frac{\partial K_*}{\partial y'}Y'+\frac{\partial K_*}{\partial z'}Z'\right\}d\tau'$$
$$-\int_{\Sigma_*}K_*(x,y,z;\sigma')\{X'\cos\alpha'+Y'\cos\beta'+Z'\cos\gamma'\}\,d\sigma'$$
$$=\int_{\Theta_*}K_*\left\{\frac{\partial X'}{\partial x'}+\frac{\partial Y'}{\partial y'}+\frac{\partial Z'}{\partial z'}\right\}d\tau'.$$

Führt man darum in (19) den Grenzübergang $n\to\infty$, sodann den Grenzübergang $h\to 0$ aus, so gelangt man in der Tat zu der Formel (15). Sie gilt zunächst für alle t in $\langle t_0+k,\ t_0+t^*-k\rangle$. Läßt man jetzt k gegen Null konvergieren, so überzeugt man sich, daß die gleiche Beziehung in $\langle t_0, t_0+t^*\rangle$ besteht.

Sie läßt sich noch unter Zuhilfenahme der Gleichung (3) wie folgt umformen. Wegen

$$(22)\quad u\cos\alpha + v\cos\beta + w\cos\gamma = -\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

ist nämlich

$$(23)\quad \begin{aligned}&\frac{du}{dt}\cos\alpha+\frac{dv}{dt}\cos\beta+\frac{dw}{dt}\cos\gamma+u\frac{d}{dt}\cos\alpha+v\frac{d}{dt}\cos\beta+w\frac{d}{dt}\cos\gamma\\ &=-\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

mithin

$$(24)\quad \begin{aligned}&\frac{du}{dt}\cos\alpha+\frac{dv}{dt}\cos\beta+\frac{dw}{dt}\cos\gamma=-u\frac{d}{dt}\cos\alpha-v\frac{d}{dt}\cos\beta-w\frac{d}{dt}\cos\gamma\\ &-\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

mit etwa

$$(25)\quad \frac{d}{dt}\cos\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Ersetzt man in (15) rechts die Normalkomponente der Beschleunigung durch ihren Wert (24), so sieht man, daß in dem Ausdruck für den Flüssigkeitsdruck $p(x, y, z)$ nur noch die Komponenten der Geschwindigkeit und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen auftreten.

Es ist leicht zu zeigen, daß p in $\Theta+\Sigma$ stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$(*)\quad \begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\\ &-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right\}\\ &=Q\{X, Y, Z; u, v, w\}\end{aligned}$$

genügt. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial x\partial y}, \ldots$ genügen ferner in $\Theta+\Sigma$ einer H-Bedingung. Auf Σ ist

$$(**)\quad \begin{aligned}&\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma+u\frac{d}{dt}\cos\alpha+v\frac{d}{dt}\cos\beta+w\frac{d}{dt}\cos\gamma\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}\\ &=R\{X, Y, Z; u, v, w\}\end{aligned}$$

mit

$$\frac{d}{dt}\cos\alpha=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}, \ldots.$$

Dies alles sieht man so ein. Die homogene Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial U}{\partial z}\right)=0$$

hat eine nicht identisch verschwindende, der Randbedingung $\frac{\partial U}{\partial n} = 0$ und der Normierungsbedingung $\frac{1}{D_*}\int_{\Sigma} U\,d\sigma = 1$ genügende Lösung, nämlich die Lösung $U = 1$. Für die Lösbarkeit des nichthomogenen Problems (*), (**) ist, wie die Theorie der elliptischen Differentialgleichungen lehrt, notwendig und hinreichend, daß

$$\int_{\Theta} Q\{X, Y, Z; u, v, w\}\,d\tau = -\int_{\Sigma} R(X, Y, Z; u, v, w\}\,d\sigma$$

gilt. Diese Bedingung ist im vorliegenden Falle erfüllt.

Man überzeugt sich hiervon, indem man unter Benutzung analytischer Funktionen, die u, v, w und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung gleichmäßig approximieren, wie wiederholt früher, zeigt, daß

$$\int_{\Theta}\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}+\ldots\right\}d\tau$$

$$= -\int_{\Sigma}\left\{\frac{du}{dt}\cos\alpha+\frac{dv}{dt}\cos\beta+\frac{dw}{dt}\cos\gamma\right\}d\sigma$$

$$+\int_{\Sigma}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}\cos\alpha+\frac{\partial v}{\partial t}\cos\beta+\frac{\partial w}{\partial t}\cos\gamma\right\}d\sigma$$

$$= -\int_{\Sigma}\left\{\frac{du}{dt}\cos\alpha+\frac{dv}{dt}\cos\beta+\frac{dw}{dt}\cos\gamma\right\}d\sigma$$

$$+\frac{\partial}{\partial t}\int_{\Sigma}\{u\cos\alpha+v\cos\beta+w\cos\gamma\}\,d\sigma$$

ist. Der zweite Summand rechts verschwindet, da es sich um eine inkompressible Flüssigkeit handelt, der erste wird nach (24) umgeformt, worauf sich wegen

$$\int_{\Sigma}\{X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma\}\,d\sigma = -\int_{\Theta}\left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}d\tau$$

die zu beweisende Beziehung ergibt. Für die Lösung erhält man nach bekannten Sätzen der Theorie elliptischer Differentialgleichungen gerade den Ausdruck (15)[52]).

Aus (**) ergibt sich, daß $\frac{\partial p}{\partial n}$, als Ortsfunktion auf Σ aufgefaßt, stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat. Hieraus

[52]) Die in Betracht kommenden Existenzsätze unter den Stetigkeitsvoraussetzungen des Textes ergeben sich beispielsweise aus den Ausführungen meiner Note, Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus, Math. Zeitschrift 20 (1924), S. 194–212, insbes. S. 193–196.

folgt aber, daß $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}, \ldots$ auch noch auf Σ existieren und in $\Theta + \Sigma$ einer H-Bedingung genügen[52]). Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Die Gleichungen (29), (35*), (36) und (37) des ersten Kapitels sowie die eben bewiesene Formel (15) oder vielmehr die aus diesen Gleichungen alsbald abzuleitenden Integro-Differentialgleichungen werden zum Existenzbeweis der Lösung führen.

Auf der Wandfläche Σ ist die Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ im allgemeinen von Null verschieden. Sie heiße Ξ_n,

$$\Xi_n = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma. \tag{26}$$

Aus dem Stokesschen Satze folgt bekanntlich

$$\int_{\Sigma} \Xi_n \, d\sigma = 0. \tag{27}$$

Es gibt darum eine, bis auf eine additive Konstante bestimmte, in dem zu Θ komplementären Bereiche $\Theta_a + \Sigma$ (übrigens auch im unendlich fernen Punkte) reguläre, auf Σ nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion $\psi(x, y, z)$, die daselbst der Bedingung

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = \Xi_n \tag{28}$$

genügt[53]). Erfüllt Ξ_n, wie dies unseren Voraussetzungen entspricht, auf Σ eine H-Bedingung, so hat ψ im Innern und auf dem Rande von $\Theta_a + \Sigma$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen erster Ordnung. Wir denken uns die Ortsfunktionen ξ, η, ζ den Gleichungen

$$\xi = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \eta = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \zeta = \frac{\partial \psi}{\partial z} \tag{29}$$

gemäß über Σ hinaus fortgesetzt. Der nunmehr in dem Gesamtraume erklärte Vektor ξ, η, ζ erleidet im allgemeinen auf Σ eine sprungweise Unstetigkeit, doch ändert sich seine Normalkomponente stetig. Im Unendlichen verhalten sich ξ, η, ζ wie $O(R^{-3})$.

Es sei jetzt

$$\begin{aligned} \hat{u}(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{1}{r} \eta' \, d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{1}{r} \zeta' \, d\tau', \\ \hat{v}(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{r} \zeta' \, d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{1}{r} \xi' \, d\tau', \\ \hat{w}(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{1}{r} \xi' \, d\tau' + \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{1}{r} \eta' \, d\tau' \end{aligned} \tag{30}$$

---

[53]) In (28) bezeichnet das Symbol $\frac{\partial}{\partial n}$ die Ableitung in der Richtung der in das Innere von Θ hinein weisenden Normale zu Σ. Die Feststellung, ψ sei im Unendlichen regulär, besagt, daß $\frac{\partial \psi}{\partial x}, \frac{\partial \psi}{\partial y}, \frac{\partial \psi}{\partial z}$ sich im Unendlichen wie $O(R^{-3})$ verhalten.

gesetzt, wo die Integration über den gesamten Raum der Variablen (x, y, z) erstreckt zu denken ist. Die Funktionen $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ sind überall stetig. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind sowohl in $\Theta + \Sigma$ als auch in $\Theta_a + \Sigma$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Sie genügen überall, also insbesondere in $\Theta + \Sigma$ den Beziehungen

$$(31) \qquad \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} - \frac{\partial \hat{v}}{\partial z} = 2\xi, \quad \frac{\partial \hat{u}}{\partial z} - \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} = 2\eta, \quad \frac{\partial \hat{v}}{\partial x} - \frac{\partial \hat{u}}{\partial y} = 2\zeta.$$

Augenscheinlich ist in $\Theta + \Sigma$

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial x} + \frac{\partial \hat{v}}{\partial y} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial z} = 0$$

und darum

$$(32) \qquad \int_{\Sigma} (\hat{u}\cos\alpha + \hat{v}\cos\beta + \hat{w}\cos\gamma)\, d\sigma = 0.$$

Betrachten wir die Funktionen $u - \hat{u}$, $v - \hat{v}$, $w - \hat{w}$. Aus (31) folgt wegen

$$(33) \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta,$$

daß sie partielle Ableitungen erster Ordnung derjenigen bis auf eine belanglose additive Konstante bestimmten, in Θ regulären, auch noch auf Σ nebst ihrer Normalableitung stetigen Potentialfunktion φ sind, die auf Σ der Bedingung

$$(34) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = (u - \hat{u})\cos\alpha + (v - \hat{v})\cos\beta + (w - \hat{w})\cos\gamma$$
$$= -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} - (\hat{u}\cos\alpha + \hat{v}\cos\beta + \hat{w}\cos\gamma)$$

genügt. Wegen (4) und (32) ist, wie zu erwarten war,

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, d\sigma = 0.$$

Die Funktion φ ist nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in $\Theta + \Sigma$ stetig, ihre partiellen Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Für u, v, w finden wir jetzt augenscheinlich die Beziehungen

$$(35) \qquad \begin{aligned} u(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\eta'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\zeta'\, d\tau' + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \\ v(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\zeta'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int \frac{1}{r}\xi'\, d\tau' + \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \\ w(x,y,z) &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int \frac{1}{r}\xi'\, d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int \frac{1}{r}\eta'\, d\tau' + \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \end{aligned}$$

Die Ausdrücke (30) lassen sich auf eine für das folgende bequemere Form bringen. Es ist z. B.

$$\hat{u}(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_a}\eta'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau' - \frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_a}\zeta'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)d\tau'$$

und, unter $\bar{\Sigma}$ eine zu Σ in hinreichend kleinem Abstande h in Θ_a parallele Fläche, unter $\bar{\Theta}_a + \bar{\Sigma}$ den Außenbereich von $\bar{\Sigma}$ verstehend,

$$N = \frac{1}{2\pi}\int_{\Theta_a}\left\{\eta'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right) - \zeta'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau' = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\Theta}_a}\left\{\eta'\frac{\partial}{\partial z'}\left(\frac{1}{r}\right) - \zeta'\frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}d\tau'$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\Theta}_a}\left\{\frac{\partial}{\partial z'}\left(\eta'\frac{1}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial y'}\left(\zeta'\frac{1}{r}\right) - \frac{1}{r}\frac{\partial\eta'}{\partial z'} + \frac{1}{r}\frac{\partial\zeta'}{\partial y'}\right\}d\tau'.\ ^{54})$$

Wegen (29) heben sich die beiden letzten Summanden des Klammerausdruckes fort. Es ist darum

$$N = \lim_{h\to 0}\frac{1}{2\pi}\int_{\bar{\Sigma}}\frac{1}{r}(\eta'\cos\gamma' - \zeta'\cos\beta')\,d\sigma' = \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}(\eta'\cos\gamma' - \zeta'\cos\beta')\,d\sigma'.$$

In den Oberflächenintegralen sind wohlbemerkt ξ, η, ζ die durch (29) erklärten Werte.

Wir finden so alles in allem wegen (29)

$$\hat{u}(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\beta'\right)d\sigma',$$

$$\hat{v}(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' \tag{36}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\alpha' - \frac{\partial\psi'}{\partial x'}\cos\gamma'\right)d\sigma',$$

$$\hat{w}(x,y,z) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_{\Theta}\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\cos\beta' - \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\alpha'\right)d\sigma'.$$

---

54) Man beachte, daß ξ, η, ζ im Innern von Θ_a stetige Ableitungen aller Ordnungen haben.

Es sei (x, y, z) irgendein Punkt im Innern von Θ_a, und es möge $G_a^{II}(x, y, z; x', y', z')$ die zu Θ_a und dem zweiten Randwertproblem gehörige Greensche Funktion der Laplaceschen Gleichung $\Delta u = 0$ bezeichnen; G_a^{II} ist diejenige, außer in (x, y, z) und in dem unendlich fernen Punkte, reguläre Potentialfunktion, die sich in (x, y, z) wie $[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{-\frac{1}{2}}$ verhält, im Unendlichen wie $\frac{1}{R}$ verschwindet und der Randbedingung $\frac{\partial G_a^{II}}{\partial n} = 0$ genügt[55]). Nach (28) und (27) ist, wenn wir ψ der Bedingung $\psi \to 0$ für $R \to \infty$ gemäß normieren,

$$(37)\quad \psi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G_a^{II}(x,y,z;\sigma')\,[\xi'\cos\alpha' + \eta'\cos\beta' + \zeta'\cos\gamma']\,d\sigma'.$$

Der Klammerausdruck unter dem Integralzeichen ist die, wie wir wissen, auf Σ stetige Normalkomponente des Vektors ξ, η, ζ.

Es sei weiter $G^{II}(x, y, z; x', y', z')$ die zu dem Bereiche Θ und dem zweiten Randwertproblem gehörige Greensche Funktion der Gleichung $\Delta u = 0$.[56]) Wir denken uns φ der Beziehung $\int_{\Sigma} \varphi\, d\sigma = 0$ gemäß normiert. Nach bekannten Sätzen erhalten wir für φ wegen (34) den Ausdruck

$$(38)\quad \varphi(x,y,z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G^{II}(x,y,z;\sigma')(\hat{u}'\cos\alpha' + \hat{v}'\cos\beta' + \hat{w}'\cos\gamma')\,d\sigma'$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G^{II}(x,y,z;\sigma')\frac{\partial \Psi'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi'}{\partial z'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma'.$$

§ 2.

Sukzessive Approximationen.

Der Existenzbeweis der Lösung wird, wie bei dem in dem ersten Kapitel betrachteten Problem, durch sukzessive Approximationen erbracht.

Es sei $\Theta^* + \Sigma^*$ irgendein Bereich, der alle zu einem Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \underline{t}\rangle$ $(\underline{t} \leqq \hat{t})$ gehörigen Bereiche $\Theta + \Sigma$, insbesondere $\Theta_0 + \Sigma_0$, ganz in seinem Innern enthält. Um zu einer ersten Approximation zu gelangen, denken wir uns vor allem die Funktionen u_0, v_0, w_0, Komponenten der Geschwindigkeit zur Zeit t_0, die ursprünglich nur in $\Theta_0 + \Sigma_0$ erklärt waren, irgendwie über Σ hinaus in $\Theta^* - \Theta_0$ stetig fortgesetzt, so daß $\frac{\partial u_0}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w_0}{\partial c}$ sich in jedem der beiden Bereiche, in die Θ^* durch Σ_0 zerlegt wird (die

---

[55]) Die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial G_a^{II}}{\partial x'}, \frac{\partial G_a^{II}}{\partial y'}, \frac{\partial G_a^{II}}{\partial z'}$ verschwinden im Unendlichen wie R^{-2}.

[56]) Wird $\varrho = 1$ gesetzt, so geht $K(x, y, z; x', y', z')$ in G^{II} über.

Grenzflächen allemal eingeschlossen), stetig verhalten und der H-Bedingung genügen. Für hinreichend kleine $\underline{t}$ kann man für Θ^* beispielsweise einen von einer Parallelfläche von Σ_0 begrenzten Bereich annehmen. Es sei P_0' ein Punkt auf Σ_0, und es sei P ein beliebiger Punkt außerhalb von Θ_0 auf der Normale zu Σ_0 in P_0. Wir setzen etwa

$$u_0(P) = u_0(P_0), \quad v_0(P) = v_0(P_0), \quad w_0(P) = w_0(P_0). \tag{39}$$

Beim Passieren von Σ_0 werden die Normalableitungen von u_0, v_0, w_0 im allgemeinen einen Sprung erleiden. Wir setzen nun

$$\begin{aligned} u_1(x, y, z, t) &= u_0(x, y, z), \quad v_1(x, y, z, t) = v_0(x, y, z), \\ w_1(x, y, z, t) &= w_0(x, y, z). \end{aligned} \tag{40}$$

Das Geschwindigkeitsfeld u_1, v_1, w_1 genügt im allgemeinen nicht der Grenzbedingung (2), auch wird in Θ^* außerhalb von Θ_0 die Kontinuitätsgleichung nicht notwendig erfüllt sein.

Durch (40) ist das Geschwindigkeitsfeld in einer ersten Approximation bestimmt. Die die Lage des Teilchens (a, b, c) zur Zeit t bestimmenden Funktionen $x_1(a, b, c, t)$, $y_1(a, b, c, t)$, $z_1(a, b, c, t)$ werden wie folgt festgelegt. Es sei $\Pi(x, y, z, t)$ diejenige in Θ reguläre, auf Σ nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion, die der Randbedingung

$$\frac{\partial \Pi}{\partial n} = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} \tag{41}$$

genügt. Wegen (4) ist Π gewiß vorhanden und bis auf eine willkürliche additive Konstante bestimmt. Wir setzen

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x_1} \Pi(x_1, y_1, z_1, t) = u^0(x_1, y_1, z_1, t), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial \Pi}{\partial y_1} = v^0, \qquad \frac{dz_1}{dt} = \frac{\partial \Pi}{\partial z_1} = w^0, \end{aligned} \tag{42}$$

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c \quad \text{für} \quad t = t_0. \tag{43}$$

Es ist nicht schwer zu zeigen, daß $x_1(a, b, c, t)$, $y_1(a, b, c, t)$, $z_1(a, b, c, t)$ für alle t in $\langle t_0; t_0 + \underline{t}\rangle$ und alle a, b, c in $\Theta_0 + \Sigma_0$ analytische und reguläre Funktionen ihrer vier Argumente darstellen und für alle a, b, c auf Σ_0 der Bedingung $\Psi(x_1, y_1, z_1, t) = 0$ genügen. Durch die Funktionen $x_1(a, b, c, t)$, $y_1(a, b, c, t)$, $z_1(a, b, c, t)$ ist eine topologische Abbildung des Bereiches Θ_0 auf den Bereich Θ des Raumes (x_1, y_1, z_1) gegeben. Offenbar ist durch (42) diejenige Potentialströmung unserer Flüssigkeit gegeben, die durch die Grenzbedingung (1) bestimmt ist[57]). —

[57]) Wesentlich für das weitere ist freilich nur der im Text angegebene analytische Charakter der Funktionen x_1, y_1, z_1 und das Erfülltsein der Beziehung $\Psi(x_1, y_1, z_1, t) = 0$ für alle a, b, c auf Σ_0. Man hätte x_1, y_1, z_1 auch anders diesen Bedingungen gemäß wählen können.

Handelt es sich speziell um ein starres ruhendes Gefäß, so ist Π konstant, darum

(44) $$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad z_1 = c.$$

Wir begnügen uns mit dem ausdrücklichen Beweis des Erfülltseins der Grenzbedingung

(45) $$\Psi(x_1, y_1, z_1, t) = 0.$$

Dieser kann wie folgt geführt werden. Wir können vor allem das Geschwindigkeitsfeld u^0, v^0, w^0, das jeweils nur in $\Theta + \Sigma$ erklärt war, über Σ hinaus analytisch fortsetzen. Betrachten wir jetzt die Bahn eines Flüssigkeitsteilchens (a, b, c), das sich zur Zeit t_0 auf Σ_0 befand. Sie ist durch die Gleichungen

(46) $$\frac{dx_1}{dt} = u^0, \quad \frac{dy_1}{dt} = v^0, \quad \frac{dz_1}{dt} = w^0; \quad x_1 = a, y_1 = b, z_1 = c \text{ für } t = t_0$$

definiert und läßt sich gewiß in einem Intervall $\langle t_0, t_0 + \underline{t}\rangle$ mit $\underline{t} \leqq \underline{t}$ verfolgen. Auch hat die für alle (x_1, y_1, z_1) in einer gewissen Umgebung von Σ erklärte Funktion $\Psi(x_1, y_1, z_1, t)$ für die betrachteten Lagen des Teilchens (a, b, c) eine bestimmte Bedeutung. Es gilt

(47) $$\begin{aligned}\frac{d\Psi}{dt} &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}\frac{dz_1}{dt} + \frac{\partial \Psi}{\partial t} \\ &= \frac{\partial \Psi}{\partial x_1}u^0 + \frac{\partial \Psi}{\partial y_1}v^0 + \frac{\partial \Psi}{\partial z_1}w^0 + \frac{\partial \Psi}{\partial t} = S(x_1, y_1, z_1, t).\end{aligned}$$

Wir behaupten, daß $\frac{d\Psi}{dt} = 0$, mithin

$$\Psi(x_1, y_1, z_1, t) = \Psi(a, b, c, t_0) = 0$$

ist; unser Teilchen liegt auf Σ.

Wir bemerken, daß jedenfalls die Ableitungen $\frac{\partial u^0}{\partial x_1}, \frac{\partial u^0}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial w^0}{\partial t}$ existieren und sich stetig verhalten. Das gleiche gilt also für die Funktion $S(x_1, y_1, z_1, t)$.

Wir wählen jetzt $\bar{\bar{t}} \leqq \underline{t}$ so klein, daß für alle t in $\langle t_0, t_0 + \bar{\bar{t}}\rangle$ eine Ungleichheit von der Form

(48) $$\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 \geqq q^2 > 0$$

in allen Punkten (x, y, z) auf der Normale zu Σ durch die augenblickliche Lage (x_1, y_1, z_1) des Teilchens (a, b, c), die zwischen (x_1, y_1, z_1) und Σ liegen, besteht. Dies läßt sich gewiß erreichen (vgl. die Fußnote [48]).

Es sei weiter $q_1 > 0$ der Höchstwert des Ausdruckes $\left|\frac{\partial}{\partial l} S(x, y, z, t)\right|$

für alle soeben betrachteten Wertsysteme (x, y, z, t), unter dem Symbol $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ die Ableitung in einer beliebigen Richtung verstanden.

Es ist nun

$$\Psi = 0 \quad \text{für} \quad t = t_0. \tag{49}$$

Hieraus folgt, daß für alle t in dem Intervall $\langle t_0, t_0 + \bar{\bar{t}} \rangle$

$$|\Psi| \leqq p_*(t - t_0) \qquad (p_* \text{ konstant}).^{58})$$

Wegen (48) ist, wie man leicht sieht, der Abstand des Punktes (x_1, y_1, z_1) von Σ gewiß $\leqq \frac{p_*}{q}(t - t_0)$. Da auf Σ wegen (41) stets $S(x_1, y_1, z_1, t) = 0$ ist, so ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + \bar{\bar{t}} \rangle$

$$\left| \frac{d\Psi}{dt} \right| = |S(x_1, y_1, z_1, t)| \leqq \frac{p_*}{q} q_1 (t - t_0), \tag{50}$$

mithin

$$|\Psi| = \left| \int_{t_0}^{t} \frac{d\Psi}{dt}\, dt \right| \leqq \frac{p_*}{q} q_1 \frac{(t - t_0)^2}{2!}. \tag{51}$$

Eine Wiederholung der vorstehenden Überlegungen liefert

$$|\Psi| \leqq p_* \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 \frac{(t - t_0)^3}{3!}, \qquad |\Psi| \leqq p_* \left(\frac{q_1}{q}\right)^3 \frac{(t - t_0)^4}{4!} \text{ usw.} \tag{52}$$

Augenscheinlich ist für alle t in $\langle t_0, t_0 + \bar{\bar{t}} \rangle$, wie behauptet, $\Psi = 0$.

So sieht man also, daß die Bahn des betrachteten Teilchens in dem Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \underline{t} \rangle$ auf Σ gelegen ist. Da sich unsere Überlegungen, von dem Zeitpunkt $t_0 + \underline{t}$ ausgehend, wiederholen lassen, so gilt die vorstehende Behauptung, wie sich unschwer zeigen läßt, für alle t in $\langle t_0, t_0 + \underline{\bar{t}} \rangle$.

Es ist leicht zu sehen, daß für hinreichend kleine Werte $\underline{t}$ der Bereich Θ_0 des Raumes a, b, c auf einen gewissen Bereich, sagen wir, $\tilde{\Theta}$ im Raume x_1, y_1, z_1 topologisch abgebildet wird[58a]). Wie soeben bewiesen, liegen alle Randpunkte von $\tilde{\Theta}$ auf Σ. Also ist $\tilde{\Theta}$ mit Θ identisch.

Dem Punkte (x_1, y_1, z_1), dem Bilde des Teilchens (a, b, c) in der ersten Annäherung, ordnen wir den Wert

$$\varrho_1(x_1, y_1, z_1) = \varrho(a, b, c) \tag{53}$$

der Dichte zu. Ferner nehmen wir an, daß in (x_1, y_1, z_1) die Einheitskraft (X_1, Y_1, Z_1) wirkt,

$$X_1 = X_1(x_1, y_1, z_1, t), \quad Y_1 = Y(x_1, y_1, z_1, t), \quad Z_1 = Z(x_1, y_1, z_1, t). \tag{54}$$

---

[58]) Es ist $p_* = \text{Max} \left| \frac{d\Psi}{dt} \right| = \text{Max} |S(x_1, y_1, z_1, t)|$ für alle t in $\langle t_0, t_0 + \bar{\bar{t}} \rangle$.

[58a]) Man vergleiche hierzu die Ausführungen meiner Abhandlung, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie II. Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), S. 147—212, insb. S. 148—151.

Der Wert des Druckes in der ersten Approximation ist den Formeln (15), (24), (25) gemäß

$$p_1(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{4\pi}\int_\Theta K(x_1, y_1, z_1; x_1', y_1', z_1')\left(\frac{\partial X_1'}{\partial x_1'}+\frac{\partial Y_1'}{\partial y_1'}+\frac{\partial Z_1'}{\partial z_1'}\right)d\tau_1'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_\Theta K(x_1, y_1, z_1; x_1', y_1', z_1')\left\{\left(\frac{\partial u_1'}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial v_1'}{\partial y_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial w_1'}{\partial z_1'}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial u_1'}{\partial y_1'}\frac{\partial v_1'}{\partial x_1'}+2\frac{\partial u_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial x_1'}+2\frac{\partial v_1'}{\partial z_1'}\frac{\partial w_1'}{\partial y_1'}\right\}d\tau_1'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma K(x_1, y_1, z_1; \sigma_1')\left\{X_1'\cos\alpha_1'+Y_1'\cos\beta_1'+Z_1'\cos\gamma_1'\right.$$

$$\left.+u_1'\frac{d}{dt_1}\cos\alpha_1'+v_1'\frac{d}{dt_1}\cos\beta_1'+w_1'\frac{d}{dt_1}\cos\gamma_1'\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1'\frac{\partial}{\partial x_1'}+v_1'\frac{\partial}{\partial y_1'}+w_1'\frac{\partial}{\partial z_1'}\right)\frac{\partial\Psi_1'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi_1'}{\partial x_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1'}{\partial y_1'}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1'}{\partial z_1'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\}d\sigma_1'+p_0$$

mit

$$\cos\alpha_1=\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\left[\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial z_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},\ \ldots$$

$$\Psi_1'=\Psi(x_1', y_1', z_1', t).\ ^{59})$$

Die Funktion p_1, die natürlich auch von t abhängt, ist nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial p_1}{\partial x_1}, \frac{\partial p_1}{\partial y_1}, \frac{\partial p_1}{\partial z_1}$ in $\Theta+\Sigma$ stetig, die genannten Ableitungen erfüllen eine H-Bedingung. Im Innern von Θ hat p_1 abteilungsweise stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung[60]). Der Beweis wäre wie auf S. 276—277 zu führen. Man hat auch hier von der Differentialgleichung (*) (mit $p_1, x_1, y_1, z_1, u_1, \ldots$ statt $p, x, y, z, u, \ldots$) auszugehen, doch lautet die Randbedingung für p_1 jetzt

$$(56)\qquad \frac{1}{\varrho_1}\frac{\partial p_1}{\partial n_1}=X_1\cos\alpha_1+\ldots+u_1\frac{d}{dt_1}\cos\alpha_1+\ldots$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_1\frac{\partial}{\partial x_1}+v_1\frac{\partial}{\partial y_1}+w_1\frac{\partial}{\partial z_1}\right)\frac{\partial\Psi_1}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial y_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi_1}{\partial z_1}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}+C_1$$

$$=P_1(x_1, y_1, z_1, t)+C_1$$

---

[59]) In (55) bezeichnet beispielsweise α_1' den von der Innennormale in (x_1', y_1', z_1') zu Σ mit der x-Achse eingeschlossenen Winkel.

[60]) Auf Σ_0 können $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x_1^2}, \ldots$ sprungweise Änderungen erleiden.

mit

$$(56^*)\quad C_1 = -\frac{1}{D_*}\int_{\Sigma} P_1(x_1, y_1, z_1, t)\, d\sigma_1 - \frac{1}{D_*}\int_{\Theta}\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \ldots\right) d\tau_1$$

$$+ \frac{1}{D_*}\int_{\Theta}\left\{\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial y_1}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial v_1}{\partial z_1}\frac{\partial w_1}{\partial y_1}\right\} d\tau_1 \quad [61])$$

$$(D_* = \text{Flächeninhalt von } \Sigma).$$

Als Funktion von a, b, c, t aufgefaßt, ist offenbar p_1 nebst seinen Ableitungen erster Ordnung in bezug auf die Ortsvariablen in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig; $\frac{\partial p_1}{\partial a}, \frac{\partial p_1}{\partial b}, \frac{\partial p_1}{\partial c}$ genügen daselbst einer H-Bedingung.

Wir gehen jetzt zu der zweiten Approximation über und bilden hierzu, wie auf S. 44—45, zunächst die Funktionen

$$2\xi_1^* = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial X_1}{\partial b}\frac{\partial x_1}{\partial c} - \frac{\partial X_1}{\partial c}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \frac{\partial Y_1}{\partial b}\frac{\partial y_1}{\partial c} - \frac{\partial Y_1}{\partial c}\frac{\partial y_1}{\partial b} + \frac{\partial Z_1}{\partial b}\frac{\partial z_1}{\partial c} - \frac{\partial Z_1}{\partial c}\frac{\partial z_1}{\partial b}\right\} dt,$$

. . . . . .

$$(57)\quad 2\xi_{*1} = \int_{t_0}^{t}\left\{\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_1}{\partial c}\right\} dt, \ldots$$

$$\xi_{01} = \xi_0 + \xi_1^* + \xi_{*1}, \ldots$$

$$\xi_1 = \xi_{01}\frac{\partial x_1}{\partial a} + \eta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial b} + \zeta_{01}\frac{\partial x_1}{\partial c}, \ldots.$$

Die Funktionen ξ_1, η_1, ζ_1 sind, als Funktionen von a, b, c, t aufgefaßt, in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Sie sind auch, als Funktionen von x_1, y_1, z_1, t betrachtet, stetig und haben in $\Theta + \Sigma$ stetige, der H-Bedingung genügende partielle Ableitungen $\frac{\partial \xi_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \zeta_1}{\partial z_1}$.

Wir bilden ferner, unter (x_1, y_1, z_1) einen beliebigen Punkt im Außenbereich Θ_a verstehend, den Ausdruck

$$(58)\quad \psi_1(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G_a^{II}(x_1, y_1, z_1; \sigma_1')(\xi_1' \cos\alpha_1' + \eta_1' \cos\beta_1'$$

$$+ \zeta_1' \cos\gamma_1')\, d\sigma_1',$$

d. h. diejenige in Θ_a (außer im unendlich fernen Punkte) reguläre, auf Σ

---

[61]) Man beachte, daß die auf S. 82 für die Lösbarkeit der Differentialgleichung (*) unter Zugrundelegung der Randbedingung (**) angegebene notwendige und hinreichende Bedingung im vorliegenden Falle im allgemeinen nicht erfüllt ist. Die Funktion p_1 erfüllt die Gleichung (*) und genügt der Randbedingung (56), die ihrerseits die Lösbarkeitsbedingung befriedigt.

nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion, die der Randbedingung

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial n} = \xi_1 \cos\alpha_1 + \eta_1 \cos\beta_1 + \zeta_1 \cos\gamma_1$$

genügt und im Unendlichen wie $\frac{1}{R_1}$ $(R_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$ verschwindet. Die partiellen Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial y_1}, \frac{\partial \psi_1}{\partial z_1}$ verhalten sich im Unendlichen wie $\frac{1}{R_1^2}$. Sie sind übrigens in $\Theta_a + \Sigma$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

Es sei weiter

$$\hat{u}_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\eta_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\zeta_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial y_1'}\cos\gamma_1' - \frac{\partial \psi_1'}{\partial z_1'}\cos\beta_1'\right) d\sigma_1',$$

$$\hat{v}_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\zeta_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\xi_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial z_1'}\cos\alpha_1' - \frac{\partial \psi_1'}{\partial x_1'}\cos\gamma_1'\right) d\sigma_1', \tag{58}$$

$$\hat{w}_2(x_1, y_1, z_1) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\xi_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_1}\int_\Theta \frac{1}{r_1}\eta_1' d\tau_1' + \frac{1}{2\pi}\int_\Sigma \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial \psi_1'}{\partial x_1'}\cos\beta_1' - \frac{\partial \psi_1'}{\partial y_1'}\cos\alpha_1'\right) d\sigma_1'$$

und

$$\varphi_2(x_1, y_1, z_1) = \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G^{II}(x_1, y_1, z_1; \sigma_1')(\hat{u}_2' \cos\alpha_1' + \hat{v}_2' \cos\beta_1' + \hat{w}_2' \cos\gamma_1')\, d\sigma_1' + \frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G^{II}(x_1, y_1, z_1; \sigma_1')\frac{\partial \Psi_1'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi_1'}{\partial x_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1'}{\partial y_1'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1'}{\partial z_1'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma_1'. \tag{59}$$

Aus (58) folgt unmittelbar

$$\frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \hat{v}_2}{\partial y_1} + \frac{\partial \hat{w}_2}{\partial z_1} = 0,$$

mithin

$$\int_\Sigma (\hat{u}_2 \cos\alpha_1 + \hat{v}_2 \cos\beta_1 + \hat{w}_2 \cos\gamma_1)\, d\sigma_1 = 0. \tag{59}$$ [62])

Berücksichtigt man (59) sowie die Gleichung (4), so sieht man, daß φ_2 diejenige in Θ reguläre Potentialfunktion darstellt, die der Randbedingung

---

[62]) Man beachte, daß den Entwicklungen auf S. 85 gemäß die Formeln (30) und (36) gleichwertig sind.

$$(60)\qquad \frac{\partial \varphi_2}{\partial n_1} = -(\hat{u}_2 \cos\alpha_1 + \hat{v}_2 \cos\beta_1 + \hat{w}_2 \cos\gamma_1) - \frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

und der Normierungsbedingung $\int_{\Sigma} \psi_2(x_1, y_1, z_1)\, d\sigma_1 = 0$ genügt[63]).

Nach bekannten Sätzen sind, da die rechte Seite der Gleichung (60) als Ortsfunktion auf Σ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung hat, $\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x_1^2}, \ldots$ in $\Theta + \Sigma$ vorhanden und stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

In der zweiten Approximation wird das Geschwindigkeitsfeld durch die Gleichungen

$$(61)\qquad u_2 = \hat{u}_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1}, \qquad v_2 = \hat{v}_2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_1}, \qquad w_2 = \hat{w} + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z_1}$$

festgelegt. Offenbar haben u_2, v_2, w_2 in $\Theta + \Sigma$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Augenscheinlich ist wegen (60) auf Σ allemal

$$(62)\qquad u_2 \cos\alpha_1 + v_2 \cos\beta_1 + w_2 \cos\gamma_1 = -\frac{\partial \Psi_1}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial z_1}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

Die die Lage des Teilchens (a, b, c) zur Zeit t in der zweiten Approximation ergebenden Funktionen $x_2(a, b, c, t), y_2(a, b, c, t), z_2(a, b, c, t)$ bestimmen sich durch Auflösung der Differentialgleichungen

$$(63)\qquad \frac{dx}{dt} = u_2(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt} = v_2(x, y, z, t), \qquad \frac{dz}{dt} = w_2(x, y, z, t)$$

den Anfangsbedingungen

$$(64)\qquad x = a, \qquad y = b, \qquad z = c \quad \text{für} \quad t = t_0$$

gemäß. Die Funktionen $x_2(a, b, c, t), \ldots$ existieren für alle (a, b, c) in $\Theta_0 + \Sigma_0$ und alle t in $\langle t_0, t_0 + \underline{t}\rangle$ und verhalten sich in bezug auf ihre vier Argumente stetig.

Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x_2}{\partial a}, \frac{\partial x_2}{\partial b}, \ldots, \frac{\partial z_2}{\partial c}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dy_2}{dt}, \frac{dz_2}{dt}$ sind in $\Theta_0 + \Sigma_0$ vorhanden und stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

Für alle (a, b, c) auf Σ_0 ist $\Psi(x_2, y_2, z_2, t) = 0$, d. h. (x_2, y_2, z_2) liegt auf Σ.

Dies alles folgt ohne Mühe aus den bekannten Sätzen über die Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen von den

---

[63]) Das Symbol $\frac{\partial}{\partial n_1}$ bezeichnet die Ableitung in der Richtung der Innennormale im Punkte $\sigma_1 = (x_1, y_1, z_1)$ auf Σ.

Anfangswerten[64]), wenn man sich überdies der Überlegungen bedient, die bereits auf S. 283—284 angewandt worden sind. (Man vgl. hierzu übrigens die Ausführungen auf S. 292—294, wo es sich um ähnliche, sogar etwas weitergehende Betrachtungen handelt.)

Dem Punkte (x_2, y_2, z_2), dem Bilde des Teilchens (a, b, c) in der zweiten Annäherung, ordnen wir den Wert

$$\varrho_2(x_2, y_2, z_2) = \varrho(a, b, c)$$

der Dichte zu. Ferner nehmen wir an, daß in (x_2, y_2, z_2) die Einheitskraft (X_2, Y_2, Z_2) wirkt,

$$X_2 = X(x_2, y_2, z_2, t), \quad Y_2 = Y(x_2, y_2, z_2, t), \quad Z_2 = Z(x_2, y_2, z_2, t).$$

Der Wert des Druckes in der zweiten Näherung ist den Beziehungen 15), (24), (25) gemäß:

$$p_2(x_2, y_2, z_2) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x_2, y_2, z_2; x_2', y_2', z_2')\left(\frac{\partial X_2'}{\partial x_2'} + \frac{\partial Y_2'}{\partial y_2'} + \frac{\partial Z_2'}{\partial z_2'}\right) d\tau_2'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x_2, y_2, z_2; x_2', y_2', z_2')\left\{\left(\frac{\partial u_2'}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2'}{\partial y_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_2'}{\partial z_2'}\right)^2 + 2\frac{\partial u_2'}{\partial y_2'}\frac{\partial v_2'}{\partial x_2'}\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial u_2'}{\partial z_2'}\frac{\partial w_2'}{\partial x_2'} + 2\frac{\partial v_2'}{\partial z_2'}\frac{\partial w_2'}{\partial y_2'}\right\} d\tau_2'$$

5) $$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} K(x_2, y_2, z_2; \sigma_2')\left\{X_2' \cos\alpha_2' + Y_2' \cos\beta_2' + Z_2' \cos\gamma_2' + u_2'\frac{d}{dt_2}\cos\alpha_2'\right.$$

$$+ v_2'\frac{d}{dt_2}\cos\beta_2' + w_2'\frac{d}{dt_2}\cos\gamma_2$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_2'\frac{\partial}{\partial x_2'} + v_2'\frac{\partial}{\partial y_2'} + w_2'\frac{\partial}{\partial z_2'}\right)\frac{\partial \Psi_2'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial y_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial z_2'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} d\sigma_2' + p_0$$

mit

$$\frac{d}{dt_2}\cos\alpha_2' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_2'\frac{\partial}{\partial x_2'} + v_2'\frac{\partial}{\partial y_2'} + w_2'\frac{\partial}{\partial z_2'}\right)\frac{\partial \Psi_2'}{\partial x_2'}\left[\left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial y_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial z_2'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \ldots$$

Die Funktion p_2 ist, wie man sich durch eine Betrachtung nach Muster der auf S. 285—286 skizzierten überzeugt, nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in bezug auf die Ortsvariablen in $\Theta + \Sigma$ stetig, die Ableitungen zweiter Ordnung erfüllen daselbst eine H-Bedingung. Als Funktion von a, b, c aufgefaßt, ist p_2 nebst seinen Ableitungen $\frac{\partial p_2}{\partial a}, \frac{\partial p_2}{\partial b}, \frac{p_2}{c}$ in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig; $\frac{\partial p_2}{\partial a}, \frac{\partial p_2}{\partial b}, \frac{\partial p_2}{\partial c}$ erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

---

[64]) Man vergleiche beispielsweise L. Lichtenstein, Zur Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, 28 (1909), S. 267—306, insb. S. 271 bis 280. Dort findet sich auch die weitere Literatur angegeben.

Um zu der dritten Approximation zu gelangen, bilden wir die Funktionen

$$2\xi_2^* = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial X_2}{\partial b}\frac{\partial x_2}{\partial c} - \frac{\partial X_2}{\partial c}\frac{\partial x_2}{\partial b} + \frac{\partial Y_2}{\partial b}\frac{\partial y_2}{\partial c} - \frac{\partial Y_2}{\partial c}\frac{\partial y_2}{\partial b} + \frac{\partial Z_2}{\partial b}\frac{\partial z_2}{\partial c} - \frac{\partial Z_2}{\partial c}\frac{\partial z_2}{\partial b} \right\} dt,$$

. . . . . .

$$2\xi_{*2} = \int_{t_0}^{t} \left\{ \frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_2}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p_2}{\partial c} \right\} dt, \ldots \tag{66}$$

$$\xi_{02} = \xi_0 + \xi_2^* + \xi_{*2}, \ldots$$

$$\xi_2 = \xi_{02}\frac{\partial x_2}{\partial a} + \eta_{02}\frac{\partial x_2}{\partial b} + \zeta_{02}\frac{\partial x_2}{\partial c}, \ldots$$

Die Funktionen ξ_2, η_2, ζ_2 sind, als Funktionen von a, b, c aufgefaßt, in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

Wir bilden ferner, unter (x_2, y_2, z_2) einen beliebigen Punkt im Innern von Θ_a verstehend, den Ausdruck

$$\psi_2(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G_a^{II}(x_2, y_2, z_2; \sigma_2')(\xi_2' \cos\alpha_2' + \eta_2' \cos\beta_2' + \zeta_2' \cos\gamma_2')\,d \tag{67}$$

d. h. diejenige in Θ_a (außer im Unendlichen) reguläre, auf Σ nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion, die der Randbedingung

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial n} = \xi_2 \cos\alpha_2 + \eta_2 \cos\beta_2 + \zeta_2 \cos\gamma_2$$

genügt und im Unendlichen wie $\frac{1}{R_2}$ $(R_2^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)$ verschwindet. Die Funktionen $\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}, \frac{\partial \psi_2}{\partial y_2}, \frac{\partial \psi_2}{\partial z_2}$ verhalten sich für $R_2 \to \infty$ wie $O\left(\frac{1}{R_2^2}\right)$. Sie sind übrigens in $\Theta_a + \Sigma$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

Es sei weiter

$$\begin{aligned}
\hat{u}_3(x_2, y_2, z_2) = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\eta_2'\,d\tau_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\zeta_2'\,d\tau_2' \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial y_2'}\cos\gamma_2' - \frac{\partial \psi_2'}{\partial z_2'}\cos\beta_2'\right)d\sigma_2' \\
\hat{v}_3(x_2, y_2, z_2) = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\zeta_2'\,d\tau_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\xi_2'\,d\tau_2' \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial z_2'}\cos\alpha_2' - \frac{\partial \psi_2'}{\partial x_2'}\cos\gamma_2'\right)d\sigma_2' \\
\hat{w}_3(x_2, y_2, z_2) = &-\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\xi_2'\,d\tau_2' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x_2}\int_{\Theta}\frac{1}{r_2}\eta_2'\,d\tau_2' \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r_2}\left(\frac{\partial \psi_2'}{\partial x_2'}\cos\beta_2' - \frac{\partial \psi_2'}{\partial y_2'}\cos\alpha_2'\right)d\sigma_2'
\end{aligned} \tag{68}$$

und

$$\varphi_3(x_2, y_2, z_2) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G^{II}(x_2, y_2, z_2; \sigma_2')\,(\hat{u}_3' \cos\alpha_2' + \hat{v}_3' \cos\beta_2' + \hat{w}_3' \cos\gamma_2')\,d\sigma_2'$$

$$(69)\quad + \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G^{II}(x_2, y_2, z_2; \sigma_2')\frac{\partial \Psi_2'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial y_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial z_2'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma_2'.$$

Wie auf S. 92 sieht man, daß φ_3 diejenige in Θ reguläre Potentialfunktion darstellt, die der Randbedingung

$$(70)\quad \frac{\partial \varphi_3}{\partial n_2} = -(\hat{u}_3 \cos\alpha_2 + \hat{v}_3 \cos\beta_2 + \hat{w}_3 \cos\gamma_2) - \frac{\partial \Psi_2'}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial x_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial y_2'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_2'}{\partial z_2'}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$$

und der Normierungsbedingung

$$\int_{\Sigma} \varphi_3(x_2, y_2, z_2)\,d\sigma_2 = 0$$

genügt. Die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung $\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z_2^2}$ sind in $\Theta + \Sigma$ vorhanden und stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

In der dritten Approximation wird das Geschwindigkeitsfeld durch die Gleichungen

$$(71)\quad u_3 = \hat{u}_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_2}, \quad v_3 = \hat{v}_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_2}, \quad w_3 = \hat{w}_3 + \frac{\partial \varphi_3}{\partial z_2}$$

festgelegt. Offenbar haben u_3, v_3, w_3 in $\Theta + \Sigma$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung. Auf Σ ist allemal

$$(72)\quad u_3 \cos\alpha + v_3 \cos\beta + w_3 \cos\gamma = -\frac{\partial \Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Was die Funktionen $x_3(a, b, c, t), \ldots$ betrifft, so bestimmen sich diese als diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(73)\quad \frac{dx}{dt} = u_3(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_3(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w_3(x, y, z, t),$$

die den Anfangsbedingungen $x = a, y = b, z = c$ für $t = t_0$ genügen.

Schließlich bestimmen wir den Druck $p_3(x_3, y_3, z_3)$ in der dritten Näherung aus einer zu (65) analogen Gleichung. Es ist einleuchtend, wie die vierte und die weiteren Näherungen zu bilden sind.

§ 3.

Konvergenzbeweis.

Der Konvergenzbeweis ist mutatis mutandis wie in der ersten Abhandlung und in dem ersten Kapitel der vorliegenden Arbeit durch Untersuchung der Differenzen $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$, $z_{n+1} - z_n$ zu führen. Gegen-

über den Ausführungen im ersten Kapitel tritt jetzt insofern eine Vereinfachung ein, als diesmal das Verhalten in dem unendlich fernen Punkte nicht gesondert betrachtet zu werden braucht. Auch tritt zur Bestimmung des Druckes $p(x, y, z)$ an Stelle der Integralgleichung (43) des ersten Kapitels der explizite Ausdruck (15) ein. Dafür sind die Ausdrücke (36) für u, v, w komplizierter als die entsprechenden Formeln (38) des I. Kapitels. Neben dem Newtonschen Potential gewisser Volumladungen gehen jetzt in die Formeln Newtonsche Potentiale geeigneter Flächenbelegungen sowie Lösungen der zweiten Randwertaufgabe der Potentialtheorie in beschränkten sowie unendlichen Bereichen ein. In der Formel (15) haben wir mit der Lösung der zweiten Randwertaufgabe in der Theorie elliptischer Differentialgleichungen zu tun. Demgemäß sind beim Konvergenzbeweis außer den a. a. O. gebrauchten Hilfssätzen analoge Hilfssätze für die Lösungen der zweiten Randwertaufgabe heranzuziehen. Sie finden sich neben anderen Resultaten in meiner zweiten Abhandlung zur Potentialtheorie (Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 78 (1926), S. 147–212).

Wir wollen den Beweis in seinen Hauptlinien durchführen. Es sei l irgendeine ganze Zahl $\geqq 2$. Gesetzt, für alle $n \leqq l$, alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle (t^* \leqq t$ und alle (x, y, z) in Θ ist

$$|u_n|, |v_n|, |w_n| \leqq \Omega_*; \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right|, \ldots, \left|\frac{\partial w_n}{\partial z}\right| \leqq \Omega_*;$$

$$\left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega_* D_{12}^{\lambda}, \tag{74}$$

$\left(D_{12}^2 = (x^{(1)} - x^{(2)})^2 + (y^{(1)} - y^{(2)})^2 + (z^{(1)} - z^{(2)})^2,\ \Omega_*$ konstant$\right)$[65].

Die Funktionen $x_n(a, b, c, t), y_n, z_n$ sind nun diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{dt} = u_n(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_n(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w_n(x, y, z, t),$$

die den Anfangsbedingungen $x_n = a$, $y_n = b$, $z_n = c$ für $t = t_0$ genügen.

Es ist wegen (74) einleuchtend, daß

$$|x_n - a|, |y_n - b|, |z_n - c| \leqq \Omega_* |t - t_0| \tag{75}$$

gilt.

Nach bekannten Sätzen sind weiter die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial a}(x_n - a) = \mathfrak{X}_n, \quad \frac{\partial y_n}{\partial a} = \mathfrak{Y}_n, \quad \frac{\partial z_n}{\partial a} = \mathfrak{Z}_n \tag{76}$$

---

[65]) In (74) bezeichnet beispielsweise $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)}$ den Wert der Funktion $\frac{\partial}{\partial x} u_n(x, y, z, t$ im Punkte $(x^{(1)}, y^{(1)}, z^{(1)})$ zur Zeit t. Man beachte, daß die Funktionen u_n, v_n, w durch den vorhin auseinandergesetzten Iterationsprozeß in dem Raume der Variablen $x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1}$ erklärt sind.

diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(77)\qquad \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{X}_n}{dt} &= \frac{\partial u_n}{\partial x}(\mathfrak{X}_n+1)+\frac{\partial u_n}{\partial y}\mathfrak{Y}_n+\frac{\partial u_n}{\partial z}\mathfrak{Z}_n,\\ \frac{d\mathfrak{Y}_n}{dt} &= \frac{\partial v_n}{\partial x}(\mathfrak{X}_n+1)+\frac{\partial v_n}{\partial y}\mathfrak{Y}_n+\frac{\partial v_n}{\partial z}\mathfrak{Z}_n,\\ \frac{d\mathfrak{Z}_n}{dt} &= \frac{\partial w_n}{\partial x}(\mathfrak{X}_n+1)+\frac{\partial w_n}{\partial y}\mathfrak{Y}_n+\frac{\partial w_n}{\partial z}\mathfrak{Z}_n, \end{aligned}$$

die für $t=t_0$ verschwinden[66]). Neben (77) betrachten wir diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(78)\qquad \frac{d\bar{\mathfrak{X}}_n}{dt}=\Omega_*(\bar{\mathfrak{X}}_n+\bar{\mathfrak{Y}}_n+\bar{\mathfrak{Z}}_n+1),\quad \frac{d\bar{\mathfrak{Y}}_n}{dt}=\Omega_*(\bar{\mathfrak{X}}_n+\bar{\mathfrak{Y}}_n+\bar{\mathfrak{Z}}_n+1),$$
$$\frac{d\bar{\mathfrak{Z}}_n}{dt}=\Omega_*(\bar{\mathfrak{X}}_n+\bar{\mathfrak{Y}}_n+\bar{\mathfrak{Z}}_n+1),$$

die für $t=t_0$ gleich Null sind. Es ist wegen (74) einleuchtend, daß

$$(79)\qquad |\mathfrak{X}_n|\leqq|\bar{\mathfrak{X}}_n|,\quad |\mathfrak{Y}_n|\leqq|\bar{\mathfrak{Y}}_n|,\quad |\mathfrak{Z}_n|\leqq|\bar{\mathfrak{Z}}_n|$$

ist. Nun ist gewiß

$$\bar{\mathfrak{X}}_n=\bar{\mathfrak{Y}}_n=\bar{\mathfrak{Z}}_n=\frac{1}{3}\,(e^{3\,\Omega_*(t-t_0)}-1),$$

darum

$$|\mathfrak{X}_n|\leqq\frac{1}{3}(e^{3\,\Omega_*(t-t_0)}-1),$$

mithin für

$$(80)\qquad t-t_0\leqq t^*$$

gewiß

$$(81)\qquad |\mathfrak{X}_n|\leqq\mathfrak{h}_1\,\Omega_*(t-t_0).$$

Wir finden also für alle t in $\langle t_0, t_0+t^*\rangle$

$$(82)\qquad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_n-a)\right|\leqq\mathfrak{h}_1\,\Omega_*(t-t_0).$$

Ebenso ergeben sich die weiteren Ungleichheiten

$$(83)\qquad \left|\frac{\partial y_n}{\partial a}\right|,\ \left|\frac{\partial z_n}{\partial a}\right|,\ \left|\frac{\partial x_n}{\partial b}\right|,\ \ldots,\ \left|\frac{\partial}{\partial c}(z_n-c)\right|\leqq\mathfrak{h}_1\,\Omega_*(t-t_0),$$

unter $\mathfrak{h}_1$ eine positive Konstante verstanden, wie später unter $\mathfrak{h}_2, \mathfrak{h}_3, \ldots$.

Es gelten ferner Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$(84)\qquad \left|\left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(2)}\right|,\ \ldots\leqq\mathfrak{h}_2\,\Omega_*(t-t_0)\,d_{12}^{\lambda}.$$

---

[66]) Vgl. loc. cit. [64]), S. 271—280. Ausführlich geschrieben, ist hierbei beispielsweise $\frac{\partial u_n}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}u_n(x_n, y_n, z_n, t)$.

Man gewinnt diese, wenn man von den folgenden Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{X}_n^{1,2} = \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)}\mathfrak{X}_n^{1,2} + (\mathfrak{X}_n+1)^{(2)}\left\{\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(2)}\right\} + \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^{(1)}\mathfrak{Y}_n^{1,2}$$

$$+ \mathfrak{Y}_n^{(2)}\left\{\left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial y}\right)^{(2)}\right\} + \left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)^{(1)}\mathfrak{Z}_n^{1,2} + \mathfrak{Z}_n^{(2)}\left\{\left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial z}\right)^{(2)}\right\} \tag{85}$$

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{Y}_n^{1,2} = \left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^{(1)}\mathfrak{X}_n^{1,2} + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\mathfrak{X}_n^{1,2} = \mathfrak{X}_n^{(1)} - \mathfrak{X}_n^{(2)} = \left(\frac{\partial x_n}{\partial a} - 1\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial x_n}{\partial a} - 1\right)^{(2)}, \dots,$$

die sich unmittelbar aus (77) ergeben, ausgeht und ähnlich wie auf S. 98 überlegt.

In (85) bezeichnet beispielsweise $\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)}$ den Wert der Ableitung $\frac{\partial u_n}{\partial x}$ im Punkte $(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}, z_n^{(1)})$ mit $x_n^{(1)} = x_n(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)}, t), \dots$ Man beachte, daß wegen (74) sowie (80) bis (83) z. B.

$$\left|\left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_n}{\partial x}\right)^{(2)}\right| \leqq \Omega_* D_{12}^{\lambda} \leqq \mathfrak{h}_3\,\Omega_*\, d_{12}^{\lambda}$$

gilt und für $t = t_0$ natürlich $\mathfrak{X}_n^{1,2} = \mathfrak{Y}_n^{1,2} = \mathfrak{Z}_n^{1,2} = 0$ ist.

Es sei Ω_0 ein Wert $\leqq \mathrm{Min}\,(\Omega_*, \frac{1}{4})$. Aus (75), (82), (83), (84) folgt, sofern

$$t^* \leqq {}^1t, \quad {}^1t = \mathrm{Min}\left(\frac{\Omega_0}{\Omega_*}, \frac{\Omega_0}{\mathfrak{h}_1\,\Omega_*}, \frac{\Omega_0}{\mathfrak{h}_2\,\Omega_*}\right) \tag{86}$$

angenommen wird, für alle $n \leqq l$

$$|x_n - a|, \dots, |z_n - c| \leqq \Omega_0; \quad \left|\frac{\partial x_n}{\partial a} - 1\right|, \left|\frac{\partial y_n}{\partial a}\right|, \dots \leqq \Omega_0,$$

$$\left|\left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \dots \leqq \Omega_0\, d_{12}^{\lambda}. \tag{87}$$

Es möge jetzt weiter

$$|u_l - u_{l-1}|, \dots, |w_l - w_{l-1}| \leqq \Omega; \left|\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|, \dots \leqq \Omega;$$

$$\left|\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}\right|, \dots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda} \qquad \left(\Omega \leqq \frac{1}{4}\Omega_0\right) \tag{88}$$

sein. Für hinreichend kleine $t - t_0$, etwa $t - t_0 \leqq {}^2t \leqq {}^1t$, ist, wie wir sogleich zeigen werden,

$$|x_l - x_{l-1}|, \dots, |z_l - z_{l-1}| \leqq \mathfrak{h}_4\,\Omega\,|t - t_0|;$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \dots \leqq \mathfrak{h}_4\,\Omega\,|t - t_0|; \tag{89}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \dots \leqq \mathfrak{h}_4\,\Omega\,|t - t_0|\, d_{12}^{\lambda}.$$

Aus (82), (88), (89) und (74) folgt fast unmittelbar

$$|(x_l - x_{l-1})^{(1)} - (x_l - x_{l-1})^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_4^* \Omega |t - t_0| d_{12};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_4^* \Omega; \tag{90}$$

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(u_l - u_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_4^* \Omega d_{12}^{\lambda}.$$

Zwecks Beweis der Beziehungen (89) bemerken wir zunächst, daß

$$\frac{dx_l}{dt} = u_l(x_l, y_l, z_l, t), \ldots; \quad \frac{dx_{l-1}}{dt} = u_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}, t), \ldots$$

ist, darum jedenfalls

$$\left|\frac{d}{dt}(x_l - x_{l-1})\right| \leqq \Omega, \ldots,$$

mithin, wegen $x_l - x_{l-1} = 0$ für $t = t_0$,

$$|x_l - x_{l-1}|, \ldots \leqq \Omega |t - t_0| \tag{91}$$

gilt. Sodann ist, wenn wir zur Abkürzung

$$\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1}) = \mathfrak{P}, \quad \frac{\partial}{\partial a}(y_l - y_{l-1}) = \mathfrak{Q}, \quad \frac{\partial}{\partial a}(z_l - z_{l-1}) = \mathfrak{R} \tag{92}$$

setzen, wie man leicht sieht,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathfrak{P} &= \frac{\partial u_l}{\partial x_l}\mathfrak{P} + \left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)\frac{\partial x_{l-1}}{\partial a} + \frac{\partial u_l}{\partial y_l}\mathfrak{Q} + \left(\frac{\partial u_l}{\partial y_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\right)\frac{\partial y_{l-1}}{\partial a} \\
&\quad + \frac{\partial u_l}{\partial z_l}\mathfrak{R} + \left(\frac{\partial u_l}{\partial z_l} - \frac{\partial u_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)\frac{\partial z_{l-1}}{\partial a}, \\
\frac{d}{dt}\mathfrak{Q} &= \frac{\partial v_l}{\partial x_l}\mathfrak{P} + \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} - \frac{\partial v_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)\frac{\partial x_{l-1}}{\partial a} + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathfrak{P} &= \mathfrak{Q} = \mathfrak{R} = 0 \quad \text{für } t = t_0.
\end{aligned} \tag{93}$$

Wegen (87) und (88) folgt hieraus, ähnlich wie auf S. 98—99,

$$|\mathfrak{P}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_5 \Omega |t - t_0|; \quad |\mathfrak{P}^{(1)} - \mathfrak{P}^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_5 \Omega |t - t_0| d_{12}^{\lambda}. \tag{94}$$

Mit $\mathfrak{h}_4 = \mathrm{Max}(1, \mathfrak{h}_5)$ folgen aus (91) und (94) tatsächlich die behaupteten Ungleichheiten (89).

Aus (89) ergibt sich für $t^* \leqq {}^3t = \mathrm{Min}\left({}^2t, \frac{1}{\mathfrak{h}_4}\right)$

$$\begin{aligned}
&|x_l - x_{l-1}|, \ldots \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right|, \ldots \leqq \Omega; \\
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial a}(x_l - x_{l-1})\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned} \tag{95}$$

Betrachten wir jetzt den Wert des Druckes in der l-ten Approximation.

$$p_l(x_l, y_l, z_l) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x_l, y_l, z_l;\ x_l', y_l', z_l')\left(\frac{\partial X_l'}{\partial x_l'} + \frac{\partial Y_l'}{\partial y_l'} + \frac{\partial Z_l'}{\partial z_l'}\right) d\tau_l'$$

$$+\frac{1}{4\pi}\int_{\Theta} K(x_l, y_l, z_l;\ x_l', y_l', z_l')\left\{\left(\frac{\partial u_l'}{\partial x_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_l'}{\partial y_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_l'}{\partial z_l'}\right)^2\right.$$

(96)
$$\left. + 2\frac{\partial u_l'}{\partial y_l'}\frac{\partial v_l'}{\partial x_l'} + 2\frac{\partial u_l'}{\partial z_l'}\frac{\partial w_l'}{\partial x_l'} + 2\frac{\partial v_l'}{\partial z_l'}\frac{\partial w_l'}{\partial y_l'}\right\} d\tau_l'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} K(x_l, y_l, z_l;\ \sigma_l')\left\{X_l'\cos\alpha_l' + Y_l'\cos\beta_l' + Z_l'\cos\gamma_l'\right.$$

$$+ u_l'\frac{d}{dt_l}\cos\alpha_l' + v_l'\frac{d}{dt_l}\cos\beta_l' + w_l'\frac{d}{dt_l}\cos\gamma_l'$$

$$\left. + \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_l'\frac{\partial}{\partial x_l'} + v_l'\frac{\partial}{\partial y_l'} + w_l'\frac{\partial}{\partial z_l'}\right)\frac{\partial \Psi_l'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial x_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial y_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial z_l'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}\right\} d\sigma_l' +$$

mit

$$\frac{d}{dt_l}\cos\alpha_l' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u_l'\frac{\partial}{\partial x_l'} + v_l'\frac{\partial}{\partial y_l'} + w_l'\frac{\partial}{\partial z_l'}\right)\frac{\partial \Psi_l'}{\partial x_l'}\left[\left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial x_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial y_l'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l'}{\partial z_l'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}},\ldots$$

$p_l(x_l, y_l, z_l)$ ist (für $l \geqq 2$) diejenige nebst ihren partiellen Ableitungen der beiden ersten Ordnungen in $\Theta + \Sigma$ stetige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial x_l}\left(\frac{1}{\varrho_l}\frac{\partial p_l}{\partial x_l}\right) + \frac{\partial}{\partial y_l}\left(\frac{1}{\varrho_l}\frac{\partial p_l}{\partial y_l}\right) + \frac{\partial}{\partial z_l}\left(\frac{1}{\varrho_l}\frac{\partial p_l}{\partial z_l}\right)$$

(97)
$$= \frac{\partial X_l}{\partial x_l} + \frac{\partial Y_l}{\partial y_l} + \frac{\partial Z_l}{\partial z_l} - \left\{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_l}{\partial y_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_l}{\partial z_l}\right)^2\right.$$

$$\left. + 2\frac{\partial u_l}{\partial y_l}\frac{\partial v_l}{\partial x_l} + 2\frac{\partial u_l}{\partial z_l}\frac{\partial w_l}{\partial x_l} + 2\frac{\partial v_l}{\partial z_l}\frac{\partial w_l}{\partial y_l}\right\} = L_l(x_l, y_l, z_l, t),$$

die der Randbedingung

$$\frac{1}{\varrho_l}\frac{\partial p_l}{\partial n_l} = X_l\cos\alpha_l + Y_l\cos\beta_l + Z_l\cos\gamma_l + u_l\frac{d}{dt_l}\cos\alpha_l + v_l\frac{d}{dt_l}\cos\beta_l + w_l\frac{d}{dt_l}\cos$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_l\frac{\partial}{\partial x_l} + v_l\frac{\partial}{\partial y_l} + w_l\frac{\partial}{\partial z_l}\right)\frac{\partial \Psi_l}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial \Psi_l}{\partial x_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l}{\partial y_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi_l}{\partial z_l}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} +$$

(98) mit
$$= P_l(x_l, y_l, z_l, t) +$$

$$C_l = -\frac{1}{D_*}\int_{\Sigma} P_l(x_l, y_l, z_l, t)\, d\sigma_l - \frac{1}{D_*}\int_{\Theta}\left(\frac{\partial X_l}{\partial x_l} + \ldots\right) d\tau_l$$

$$+\frac{1}{D_*}\int_{\Theta}\left\{\left(\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^2 + \ldots + 2\frac{\partial v}{\partial z_l}\frac{\partial w_l}{\partial y_l}\right\} d$$

und der Normierungsbedingung $\int_{\Sigma} p_l\, d\sigma_l = p_0$ genügt[67]). Die Funktionen

---

[67]) Für $l = 1$ können $\frac{\partial^2 p_l}{\partial x_l^2}, \ldots$ auf Σ_0 sprungweise Unstetigkeiten erleiden. (Vgl. die Fußnote [60])).

$\frac{\partial^2 p_l}{\partial x_l^2}, \ldots$ genügen in $\Theta + \Sigma$ einer H-Bedingung. Natürlich genügt p_n für alle $n \leqq l$ einer zu (96) ähnlichen Differentialgleichung nebst zugehöriger Randbedingung und Normierungsgleichung.

Wegen (74) ist nach bekannten Sätzen der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus für alle x_n, y_n, z_n) in $\Theta + \Sigma$, alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ und $1 < n \leqq l$

$$99) \quad \left| p_n \right| \leqq \mathfrak{h}_6; \quad \left| \frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_6; \quad \left| \frac{\partial^2 p_n}{\partial x_n^2} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_6;$$

$$\left| \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial x_n^2} \right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 p_n}{\partial x_n^2} \right)^{(2)} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_6 D_{12}^{\lambda} \leqq \mathfrak{h}_7 d_{12}^{\lambda}.$$ [68])

In den folgenden Entwicklungen wird von den Ungleichheiten für die Ableitungen zweiter Ordnung kein Gebrauch gemacht, es wird vielmehr genügen zu wissen, daß

$$100) \quad \left| p_n \right| \leqq \mathfrak{h}_8; \left| \frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_8; \left| \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right)^{(1)} - \left(\frac{\partial p_n}{\partial x_n} \right)^{(2)} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_8 D_{12}^{\lambda} \leqq \mathfrak{h}_9 d_{12}^{\lambda}$$

ist. Diese Beziehungen gelten übrigens für alle $n \geqq 1$.

Der Druck in der $(l-1)$-ten Approximation, p_{l-1}, ist (für $l - 1 \geqq 2$) eine in $\Theta + \Sigma$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetige Lösung einer zu (97) analogen Differentialgleichung und genügt einer zu (98) ähnlichen Randbedingung.

Aus einem in meiner zweiten Abhandlung zur Potentialtheorie abgeleiteten Hilfssatze [69]) folgt jetzt wegen (87), (88) und (95) für alle a, b, c) in $\Theta_0 + \Sigma_0$ und alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$

$$\left| p_l(x_l, y_l, z_l) - p_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) \right| \leqq \mathfrak{h}_{10} \Omega;$$

$$101) \quad \left| \frac{\partial p_l}{\partial x_l} - \frac{\partial p_{l-1}}{\partial x_{l-1}} \right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{10} \Omega, \quad \left| \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_l} - \frac{\partial p_{l-1}}{\partial x_{l-1}} \right)^{(1)} - \left(\frac{\partial p_l}{\partial x_l} - \frac{\partial p_{l-1}}{\partial x_{l-1}} \right)^{(2)} \right|, \ldots$$

$$\leqq \mathfrak{h}_{10} \Omega d_{12}^{\lambda}.$$ [70])

---

[68]) Vgl. meinen Artikel „Neuere Entwicklung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus", Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften II C 12, S. 1277—1334, passim. Für $n = 1$ können $\frac{\partial^2 p_n}{\partial x_n^2}, \ldots,$ die im Innern von Θ gewiß existieren, auf Σ_0 sprungweise Unstetigkeiten erleiden. (Vgl. die Fußnote [60])).

[69]) Vgl. L. Lichtenstein, Über einige Hilfssätze der Potentialtheorie. II, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften, 78 (1926), S. 147—212, insb. S. 205—212.

[70]) Sie gelten für alle $l \geqq 2$. Für $l - 1 \geqq 2$ lassen sich analoge Beziehungen für partielle Ableitungen zweiter Ordnung aufstellen, doch wird von diesen in dem folgenden kein Gebrauch gemacht.

Daß die Voraussetzungen jenes Satzes im vorliegenden Falle erfüllt sind, überzeugt man sich leicht, wenn man beachtet, daß für alle (a, b, c) in $\Theta_0 + \Sigma_0$

$$|L_l(x_l, y_l, z_l, t) - L_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}, t)| \leqq \mathfrak{h}^{(1)}\,\Omega,$$
$$|(L_l - L_{l-1})^{(1)} - (L_l - L_{l-1})^{(2)}| \leqq \mathfrak{h}^{(2)}\,\Omega\, d_{12}^{\lambda},$$

sowie für alle (a, b, c) auf Σ_0

$$|P_l + C_l - P_{l-1} - C_{l-1}| \leqq \mathfrak{h}^{(3)}\,\Omega, \quad |(P_l - P_{l-1})^{(1)} - (P_l - P_{l-1})^{(2)}| \leqq \mathfrak{h}^{(4)}\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}$$

ist.

Sind die Beziehungen (101) einmal gewonnen, so folgen aus (101), (99), (87) und (89) [71]) für $\xi_l^*, \ldots; \xi_{*l}, \ldots$ genau wie auf S. 256 die Ungleichheiten

$$(102)\quad |\xi_{*l} - \xi_{*,l-1}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{11}\,|t - t_0|\,\Omega, \quad |\xi_l^* - \xi_{l-1}^*|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{11}\,|t - t_0|\,\Omega,$$

sowie für alle $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$ in $\Theta_0 + \Sigma_0$

$$(103)\quad \begin{aligned} &|(\xi_{*l} - \xi_{*,l-1})^{(1)} - (\xi_{*l} - \xi_{*,l-1})^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{12}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}, \\ &|(\xi_l^* - \xi_{l-1}^*)^{(1)} - (\xi_l^* - \xi_{l-1}^*)^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{12}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (102), (103) und (89) ergibt sich, wie man sich leicht überzeugt,

$$(104)\qquad |\xi_l - \xi_{l-1}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{13}\,|t - t_0|\,\Omega,$$

und für alle $(a^{(1)}, b^{(1)}, c^{(1)})$ und $(a^{(2)}, b^{(2)}, c^{(2)})$ in $\Theta_0 + \Sigma_0$

$$(105)\qquad |(\xi_l - \xi_{l-1})^{(1)} - (\xi_l - \xi_{l-1})^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{13}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}.$$

Des weiteren ist für alle $n \leqq l$

$$(106)\quad \begin{aligned} &|\xi_{*n}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{14}\,|t - t_0|, \quad |(\xi_{*n})^{(1)} - (\xi_{*n})^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{14}\,|t - t_0|\,d_{12}^{\lambda}, \\ &|\xi_n^*|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{14}\,|t - t_0|, \quad |(\xi_n^*)^{(1)} - (\xi_n^*)^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{14}\,|t - t_0|\,d_{12}^{\lambda}, \end{aligned}$$

darum, wie man unmittelbar sieht,

$$(107)\qquad |\xi_n|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{15}, \quad |(\xi_n)^{(1)} - (\xi_n)^{(2)}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{15}\,d_{12}^{\lambda}.$$

Wir gehen jetzt zu den Ausdrücken

$$(108)\quad \psi_l(x_l, y_l, z_l) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G_a^{\mathrm{II}}(x_l, y_l, z_l; \sigma_l')(\xi_l' \cos\alpha_l' + \eta_l' \cos\beta_l' + \zeta_l' \cos\gamma_l')$$

und

$$(109)\quad \psi_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) = \frac{1}{4\pi}\int_{\Sigma} G_a^{\mathrm{II}}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}; \sigma_{l-1}')(\xi_{l-1}' \cos\alpha_{l-1}' + \eta_{l-1}' \cos\beta_{l-1}' + \zeta_{l-1}' \cos\gamma_{l-1}')\, d$$

---

[71]) Und den zu (57) analogen Gleichungen für $\xi_l^*, \ldots; \xi_{l*}, \ldots; \xi_l, \ldots; \xi_l, \ldots$

über; $\psi_l(x_l, y_l, z_l)$ ist diejenige in Θ_a, außer höchstens im unendlich fernen Punkte, reguläre, auf Σ nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion, die der Randbedingung

$$\frac{\partial \psi_l}{\partial n_l} = \xi_l \cos\alpha_l + \eta_l \cos\beta_l + \zeta_l \cos\gamma_l \tag{110}$$

genügt und im Unendlichen wie $\frac{1}{R_l}$ verschwindet[72]). Eine analoge Bedeutung hat $\psi_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$. Wegen (104), (105), (89) und (90) ist, wie man sich ohne Mühe überzeugt,

$$\left|\frac{\partial}{\partial n_l}\psi_l(x_l, y_l, z_l) - \frac{\partial}{\partial n_{l-1}}\psi_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\right| \leqq \mathfrak{h}_{16}\,|t - t_0|\,\Omega, \tag{111}$$

und in abgekürzter Schreibweise

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial n_l}\psi_l - \frac{\partial}{\partial n_{l-1}}\psi_{l-1}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial n_l}\psi_l - \frac{\partial}{\partial n_{l-1}}\psi_{l-1}\right)^{(2)}\right| \leqq \mathfrak{h}_{16}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}. \tag{112}$$

Natürlich gilt eine zu (108) analoge Formel für alle $n \leqq l$. Nach bekannten Sätzen der Potentialtheorie ist nun wegen (107), wenn (x_n, y_n, z_n) den zu einem Punkte (a, b, c) auf Σ_0 in der n-ten Approximation gehörigen Punkt auf Σ bezeichnet,

$$|\psi_n|, \left|\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{17}, \quad \left|\left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \psi_n}{\partial x_n}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{17}\, d_{12}^{\lambda}. \tag{113}$$

Einem in der wiederholt genannten Arbeit bewiesenen Satze zufolge (vgl. loc. cit. [69]) S. 195—197) ist ferner, unter (x_l, y_l, z_l) und $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ irgendein Paar korrespondierender Punkte auf Σ verstehend,

$$\begin{gathered}\left|\frac{\partial \psi_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{18}\,|t - t_0|\,\Omega, \\ \left|\left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \psi_l}{\partial x_l} - \frac{\partial \psi_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{18}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}.\end{gathered} \tag{114}$$

Die bisher aufgestellten Beziehungen gestatten eine Abschätzung der Differenzen

$$|\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l) - \hat{u}_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})|,$$
$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l) - \frac{\partial}{\partial x_{l-1}}\hat{u}_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\right|, \ldots.$$

---

[72]) Nach der von uns im Anschluß an Plemelj benutzten Nomenklatur (vgl. die Fußnote [58])) ist ψ_l im unendlich fernen Punkte im allgemeinen nicht regulär. Das Gegenteil ist nur dann der Fall, wenn $\int_{\Sigma}(\xi_l \cos\alpha_l + \eta_l \cos\beta_l + \zeta_l \cos\gamma_l)\, d\sigma_l = 0$ gilt.

Man geht dabei von den Ausdrücken

$$\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l) = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_l}\int_{\Theta}\frac{1}{r_l}\eta_l'\,d\tau_l' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_l}\int_{\Theta}\frac{1}{r_l}\zeta_l'\,d\tau_l'$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r_l}\left(\frac{\partial\psi_l'}{\partial y_l'}\cos\gamma_l' - \frac{\partial\psi_l'}{\partial z_l'}\cos\beta_l'\right)d\sigma_l', \tag{115}$$

. . . . . .

und den analogen Formeln für $\hat{u}_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}), \ldots$ aus und wende auf die Volumintegrale den wiederholt gebrauchten Satz des § 3, auf di Flächenintegrale den Satz des § 1 meiner ersten Abhandlung zur Potential theorie an. Es ist dabei zu beachten, daß auf Σ beispielsweise

$$\left|\frac{\partial\psi_l}{\partial y_l}\cos\gamma_l - \frac{\partial\psi_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\cos\gamma_{l-1}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{19}\,|t - t_0|\,\Omega,$$

$$\left|\left(\frac{\partial\psi_l}{\partial y_l}\cos\gamma_l - \frac{\partial\psi_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\cos\gamma_{l-1}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial\psi_l}{\partial y_l}\cos\gamma_l - \frac{\partial\psi_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\cos\gamma_{l-1}\right)^{(2)}\right| \tag{116}$$

$$\leqq \mathfrak{h}_{19}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}$$

gilt. Wir finden

$$|\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l) - \hat{u}_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{20}\,|t - t_0|\,\Omega,$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l) - \frac{\partial}{\partial x_{l-1}}\hat{u}_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{20}\,|t - t_0|\,\Omega$$

(117)

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1} - \frac{\partial}{\partial x_{l-1}}\hat{u}_l\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1} - \frac{\partial}{\partial x_{l-1}}\hat{u}_l\right)^{(2)}\right|, \ldots$$

$$\leqq \mathfrak{h}_{20}\,|t - t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}$$

sowie die analogen Beziehungen für $\hat{v}_{l+1} - \hat{v}_l$ und $\hat{w}_{l+1} - \hat{w}_l$. Aus (115) ergeben sich darüber hinaus die Beziehungen

$$|\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l)|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{21}; \quad \left|\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l)\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{21};$$

(118)

$$\left|\left(\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l)\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial}{\partial x_l}\hat{u}_{l+1}(x_l, y_l, z_l)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{21}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Der nächste Schritt führt uns zu $\varphi_{l+1}(x_l, y_l, z_l)$ und $\varphi_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$. Es sind dies diejenigen in Θ regulären Potentialfunktionen, die den Rand bedingungen

$$\frac{\partial\varphi_{l+1}}{\partial n_l} = \chi_l(x_l, y_l, z_l) = -(\hat{u}_{l+1}\cos\alpha_l + \hat{v}_{l+1}\cos\beta_l + \hat{w}_{l+1}\cos\gamma_l)$$

$$-\frac{\partial\Psi_l}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi_l}{\partial x_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi_l}{\partial y_l}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi_l}{\partial z_l}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}, \tag{119}$$

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial n_{l-1}} = \chi_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}) = -(\hat{u}_l\cos\alpha_{l-1} + \hat{v}_l\cos\beta_{l-1} + \hat{w}_l\cos\gamma_{l-1}$$

$$-\frac{\partial\Psi_{l-1}}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi_{l-1}}{\partial y_{l-1}}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi_{l-1}}{\partial z_{l-1}}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

und den Normierungsbeziehungen

$$(120)\qquad \int_{\Sigma} \varphi_{l+1}(x_l, y_l, z_l)\, d\sigma_l = 0\,, \qquad \int_{\Sigma} \varphi_l(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})\, d\sigma_{l-1} = 0$$

genügen. Wegen (117) und (89) ist vor allem gewiß

$$(121)\qquad |\chi_l(x_l, y_l, z_l) - \chi_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1}| \leqq \mathfrak{h}_{22}\, |t - t_0|\, \Omega\,.$$

Wir denken uns vorübergehend die Punkte von Σ_0 auf irgendein System Gaußscher Parameter ω_0, ν_0 bezogen, so daß a, b, c als analytische und reguläre Funktionen von ω_0 und ν_0 erscheinen. Offenbar kann man χ_l und χ_{l-1} als Funktionen von ω_0 und ν_0 auffassen. Wie man leicht sieht, gelten alsdann die weiteren Beziehungen

$$(122)\qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial \chi_l}{\partial \omega_0} - \frac{\partial \chi_{l-1}}{\partial \omega_0}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{23}\, |t - t_0|\, \Omega\,; \\ &\left|\left(\frac{\partial \chi_l}{\partial \omega_0} - \frac{\partial \chi_{l-1}}{\partial \omega_0}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \chi_l}{\partial \omega_0} - \frac{\partial \chi_{l-1}}{\partial \omega_0}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{23}\, |t - t_0|\, \Omega\, d_{12}^{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Als Folge von (119) und (122) ergeben sich, wenn man den in § 5 meiner zweiten Abhandlung zur Potentialtheorie bewiesenen Satz zu Hilfe nimmt, für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^*\rangle$ und alle (a, b, c) in $\Theta_0 + \Sigma_0$ die Abschätzungen

$$(123)\qquad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial x_l} - \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{24}\, |t - t_0|\, \Omega\,; \quad \left|\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_{l-1}^2}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{24}\, |t - t_0|\, \Omega, \\ &\left|\left(\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_{l-1}^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2 \varphi_l}{\partial x_{l-1}^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{24}\, |t - t_0|\, \Omega\, d_{12}^{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Die Funktion φ_{l+1} erfüllt darüber hinaus wegen (118) Beziehungen von der Form

$$(124)\qquad \begin{aligned} &|\varphi_{l+1}|\,; \quad \left|\frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{25}\,; \\ &\left|\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2}\right|, \ldots; \quad \left|\left(\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2 \varphi_{l+1}}{\partial x_l^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{25}\, d_{12}^{\lambda}\,. \end{aligned}$$

Wir sind nun endlich in der Lage, die für den Konvergenzbeweis maßgebenden Ungleichheiten für das Geschwindigkeitsfeld in der $(l+1)$-ten Approximation aufzustellen. Aus (117) und (123) folgt wegen

$$(125)\qquad u_{l+1} = \hat{u}_{l+1} + \frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial x_l}\,, \quad v_{l+1} = \hat{v}_{l+1} + \frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial y_l}\,, \quad w_{l+1} = \hat{w}_{l+1} + \frac{\partial \varphi_{l+1}}{\partial z_l}$$

und

$$(126)\qquad u_l = \hat{u}_l + \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_{l-1}}\,, \qquad v_l = \hat{v}_l + \frac{\partial \varphi_l}{\partial y_{l-1}}\,, \qquad w_l = \hat{w}_l + \frac{\partial \varphi_l}{\partial z_{l-1}}$$

ohne weiteres

$$(127)\quad \begin{aligned} &|u_{l+1}-u_l| \leqq \mathfrak{h}_{26}|t-t_0|\,\Omega, \quad \left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}-\frac{\partial u_l}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{26}|t-t_0|\,\Omega,\\ &\left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}-\frac{\partial u_l}{\partial x_{l-1}}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}-\frac{\partial u_l}{\partial x_{l-1}}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{26}|t-t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

nebst den analogen Beziehungen für die beiden anderen Geschwindigkeitskomponenten. Aus (118), (124) und (125) folgt weiter

$$(128)\quad |u_{l+1}|;\ \left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{27},\ \left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{27}\, d_{12}^{\lambda}.$$

Eine unmittelbare Folge der Relationen (127) sind wegen (74), (87) und (95) die Formeln

$$(129)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a}-\frac{\partial u_l}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{28}|t-t_0|\,\Omega,\\ &\left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a}-\frac{\partial u_l}{\partial a}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial a}-\frac{\partial u_l}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{28}|t-t_0|\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Führt man unter Zugrundelegung der Ungleichheiten (127) und (128) dieselben Überlegungen wie auf S. 100, so findet man die Beziehungen

$$(130)\quad \begin{aligned} &|x_{l+1}-a|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{29}|t-t_0|;\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-a)\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{29}|t-t_0|;\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-a)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-a)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{29}|t-t_0|\, d_{12}^{\lambda} \end{aligned}$$

sowie

$$(131)\quad \begin{aligned} &|x_{l+1}-x_l|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{30}\,\Omega|t-t_0|;\ \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{30}\,\Omega|t-t_0|;\\ &\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{30}\,\Omega|t-t_0|\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Aus (129), (130) und (131) ergibt sich zuletzt ohne Schwierigkeiten

$$(132)\quad \begin{aligned} &\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{31}\,\Omega|t-t_0|;\\ &\left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{31}\,\Omega|t-t_0|\, d_{12}^{\lambda}. \end{aligned}$$

Ist

$$(133)\quad t^* \leqq {}^4t,\ {}^4t = \operatorname{Min}\left({}^3t, \frac{1}{\mathfrak{h}_{30}}, \frac{1}{\mathfrak{h}_{26}}, \frac{1}{\mathfrak{h}_{31}}\right),$$

so ist offenbar wegen (127), (131) und (132)

$$(134)\quad \begin{aligned} &|u_{l+1}-u_l|, \ldots \leqq \Omega;\quad \left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right|, \ldots \leqq \Omega;\\ &\left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&|x_{l+1}-x_l|,\ldots\leqq\Omega;\quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right|,\ldots\leqq\Omega;\\
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(2)}\right|,\ldots\leqq\Omega\, d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{135}
$$

Die Beziehungen (88) bleiben also bestehen, wenn man l durch $l+1$ ersetzt. Wählt man, wie wir es tun wollen, $t^*\leqq\frac{1}{2}{}^4t$, so finden wir sogar

$$
\begin{aligned}
&|u_{l+1}-u_l|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega;\quad \left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega;\\
&\left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)^{(2)}\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega\, d_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{136}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&|x_{l+1}-x_l|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega;\quad \left|\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega;\\
&\left|\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial}{\partial a}(x_{l+1}-x_l)\right)^{(2)}\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega\, d_{12}^{\lambda}.
\end{aligned}
\tag{137}
$$

Es möge jetzt Ω_* so groß gewählt worden sein, daß, außer den Ungleichheiten (74), auch noch die Ungleichheiten

$$
\begin{aligned}
&|u_2|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega_*;\quad \left|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega_*;\\
&\left|\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{(2)}\right|,\ldots\leqq\frac{1}{2}\Omega_*\, d_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{138}
$$

bestehen. Für hinreichend kleines t^*, etwa

$$t^*\leqq{}^5t\leqq\frac{1}{2}{}^4t,$$

ist, wie man leicht sieht, gewiß

$$
\begin{aligned}
&|u_3-u_2|,\ldots\leqq\Omega,\quad \left|\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right|,\ldots\leqq\Omega,\\
&\left|\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{(1)}-\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)^{(2)}\right|,\ldots\leqq\Omega\, d_{12}^{\lambda}.\ {}^{73})
\end{aligned}
\tag{139}
$$

Aus

$$\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)+\ldots+\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}-\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right)\tag{140}$$

folgt nach (138), (139) und (136)

$$\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right|\leqq\frac{1}{2}\Omega_*+\Omega+\frac{1}{2}\Omega+\ldots+\left(\frac{1}{2}\right)^{l-1}\Omega\leqq\frac{1}{2}\Omega_*+2\Omega$$

und wegen

$$\Omega\leqq\frac{1}{4}\Omega_0<\frac{1}{4}\Omega_*$$

---

[73]) Wir operieren hier mit $u_2,\ldots$ und nicht mit $u_1,\ldots$, weil (vgl. S. 282) $\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ldots$ auf Σ_0 sich sprungweise ändern.

offenbar

$$\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right| < \Omega_* . \tag{141}$$

Analoge Ungleichheiten ergeben sich für

$$\left|\frac{\partial u_{l+1}}{\partial y_{l+1}}\right|, \ldots; \quad |u_{l+1}|, \ldots; \quad \left|\left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial u_{l+1}}{\partial x_{l+1}}\right)^{(2)}\right|, \ldots .$$

Die Beziehungen (74) gelten auch noch $n = l+1$. Für hinreichend kleine t^*, $t^* \leqq {}^5t$ gelten also die verschiedenen vorhin abgeleiteten Ungleichheiten für alle n.

Wir können nun ganz ähnlich wie auf S. 260—262 schließen, daß die unendlichen Reihen

$$u_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \quad \frac{\partial u_2}{\partial a} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}(u_n - u_{n-1}), \ldots \tag{142}$$

für alle t in einem hinreichend kleinen Intervall $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ wie geometrische Reihen mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$ konvergieren. Auch die Reihen

$$x_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \ \ldots, \ z_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(z_n - z_{n-1}) \tag{143}$$

konvergieren wie geometrische Reihen. Die Funktionen

$$x = x_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(x_n - x_{n-1}), \ \ldots, \ z = z_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(z_n - z_{n-1}) \tag{144}$$

haben stetige Ableitungen erster Ordnung in bezug auf t und stetige, der H-Bedingung genügende erste Ableitungen in bezug auf die Ortsvariablen. Die Funktionen

$$\frac{dx}{dt} = u = u_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(u_n - u_{n-1}), \ \ldots, \ \frac{dz}{dt} = w = w_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(w_n - w_{n-1}) \tag{145}$$

haben in $\Theta_0 + \Sigma_0$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen erster Ordnung $\frac{\partial u}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial c}$. Schließlich sind, wie man ohne Mühe sieht, auch die Reihen

$$p_2 + (p_3 - p_2) + \ldots, \quad \frac{\partial p_2}{\partial a} + \left(\frac{\partial p_3}{\partial a} - \frac{\partial p_2}{\partial a}\right) + \ldots \tag{146}$$

gleichmäßig konvergent. Die Funktion

$$p = p_2 + \sum_{n=3}^{\infty}(p_n - p_{n-1}) \tag{147}$$

ist in $\Theta_0 + \Sigma_0$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig; diese Ableitungen erfüllen eine H-Bedingung. Natürlich sind darum auch $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial z}$ in $\Theta + \Sigma$ vorhanden und genügen daselbst einer H-Bedingung.

Wie a. a. O. läßt sich zeigen, daß x, y, z, u, v, w die Gesamtheit der Gleichungen (15), (24), (25), (37), (36), (38) und (35) erfüllen.

§ 4.

Fortsetzung.

Aus (35) folgt, wie wir jetzt zeigen wollen, daß in $\Theta + \Sigma$

$$(1') \qquad \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} = 2\xi, \quad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 2\eta, \quad \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 2\zeta$$

gilt. Vor allem ist, wie auf S. 263, wenn x, y, z einen Punkt im Innern von Θ bezeichnet,

$$(2') \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= -2\zeta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right) \\ &= -2\zeta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\Theta\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial y}\int_\Theta\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial z}\int_\Theta\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right) \\ &\quad - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_{\Theta_a}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial y'} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{\partial\psi'}{\partial z'}\right)d\tau' \end{aligned}$$

und nach einer teilweisen Integration wegen $\Delta\psi = 0$

$$(3') \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} &= -2\zeta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int_\Theta\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial y}\int_\Theta\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{\partial}{\partial z}\int_\Theta\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right) \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\Sigma\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial x'}\cos\alpha' + \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\beta' + \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\gamma'\right)d\sigma' \\ &= -2\zeta - \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\Theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\right)d\tau' \\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_\Sigma\frac{1}{r}(\xi'\cos\alpha' + \eta'\cos\beta' + \zeta'\cos\gamma')\,d\sigma'. \end{aligned}$$ [74])

Der Ausdruck

$$(4') \quad \begin{aligned} &\int_\Theta\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi' + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta' + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\right)d\tau' \\ &\qquad - \int_\Sigma\frac{1}{r}(\xi'\cos\alpha' + \eta'\cos\beta' + \zeta'\cos\gamma')\,d\sigma' \end{aligned}$$

verschwindet. Wendet man nämlich auf das Volumintegral in (4') sinngemäß die auf S. 263–265 durchgeführten Überlegungen an, so findet man

[74]) In dem Oberflächenintegral bezeichnen ξ, η, ζ die Randwerte der frag lichen Vektorkomponenten in Θ_a. Man beachte, daß die Normalkomponente $\xi\cos\alpha + \eta\cos\beta + \zeta\cos\gamma$ sich beim Durchgang durch Σ stetig ändert.

$$\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)\xi'+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\eta'+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\zeta'\right)d\tau'$$

$$(5') \qquad =\int_{\Sigma_0}\frac{1}{r}\left(\xi_0'\cos\alpha_0'+\eta_0'\cos\beta_0'+\zeta_0'\cos\gamma_0'\right)d\sigma_0',$$

unter $d\sigma_0'$ ein Flächenelement von Σ_0, unter $\alpha_0', \beta_0', \gamma_0'$ die von der Innennormale zu Σ_0 in σ_0' mit den Koordinatenachsen eingeschlossenen Winkel, unter ξ_0, η_0, ζ_0 die in den Formeln (36) des ersten Kapitels eingeführten Größen verstanden.

Es ist nun, wie wir jetzt zeigen wollen,

$$(6') \qquad Jd\sigma' \equiv (\xi'\cos\alpha'+\eta'\cos\beta'+\zeta'\cos\gamma')\,d\sigma'$$
$$=(\xi_0'\cos\alpha_0'+\eta_0'\cos\beta_0'+\zeta_0'\cos\gamma_0')\,d\sigma_0'.$$

Der Einfachheit halber möge die z-Achse der Innennormale zu Σ_0 in σ_0 parallel sein[75]). Augenscheinlich ist dann

$$(7') \qquad \cos\alpha'=\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}, \qquad \cos\beta'=\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}, \qquad \cos\gamma'=\frac{1}{\Delta'}\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')},$$
$$\Delta'^2=\left(\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}\right)^2+\left(\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}\right)^2+\left(\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')}\right)^2 \qquad (\Delta>0),$$

darum

$$J=\frac{1}{\Delta'}\left(\xi'\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}+\eta'\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}+\zeta'\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')}\right)$$
$$=\frac{1}{\Delta'}\left\{\xi_0'\left(\frac{\partial x'}{\partial a'}\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial y'}{\partial a'}\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial z'}{\partial a'}\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')}\right)\right.$$
$$(8') \qquad +\eta_0'\left(\frac{\partial x'}{\partial b'}\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial y'}{\partial b'}\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial z'}{\partial b'}\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')}\right)$$
$$\left.+\zeta_0'\left(\frac{\partial x'}{\partial c'}\frac{\partial(y',z')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial y'}{\partial c'}\frac{\partial(z',x')}{\partial(a',b')}+\frac{\partial z'}{\partial c'}\frac{\partial(x',y')}{\partial(a',b')}\right)\right\}.$$

Nun ist, da es sich um eine inkompressible Flüssigkeit handelt, $\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(a',b',c')}=1$, darum nach einem elementaren Satze der Determinantentheorie, angewandt auf die zu $\frac{\partial(x',y',z')}{\partial(a',b',c')}$ gehörige Matrix, der Koeffizient von ζ_0' gleich 1, die Koeffizienten von ξ_0' und η_0' gleich Null. Es ist also

$$(9') \qquad Jd\sigma'=\frac{1}{\Delta'}\zeta_0'd\sigma'=\zeta_0'd\sigma_0'.$$

---

[75]) Wir denken uns die Koordinaten x', y', z' von Σ in der Umgebung des Bildpunktes σ' von σ_0' als Funktionen der Variablen (Gaußschen Parameter) a' und b' ausgedrückt. Man beachte, daß in $\sigma_0'\ldots\frac{\partial c'}{\partial a'}=\frac{\partial c'}{\partial b'}=0$ ist. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial x'}{\partial a'}, \frac{\partial x'}{\partial b'}; \frac{\partial y'}{\partial a'}, \ldots, \frac{\partial z'}{\partial b'}$ ändern sich beim Passieren der Fläche Σ_0 in σ_0' stetig.

Dies ist aber die zu beweisende Formel (6′), da, wegen der besonderen Wahl der Koordinatenachsen, $\alpha_0' = \beta_0' = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_0' = 0$ ist. Aus (3′), (5′) und (6′) folgt jetzt, wie behauptet,

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = -2\zeta. \tag{10′}$$

Für alle t in $\langle t_0, t_0 + t^* \rangle$ sind die Beschleunigungskomponenten $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ vorhanden und stetig. Der Beweis wird durch sinngemäße Übertragung der Überlegungen auf S. 111—112 der ersten Abhandlung erbracht. Aus (36) folgt beispielsweise in naheliegender Schreibweise

$$\frac{d\hat{u}}{dt} = -\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\right)\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_{\Theta}\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r}\right)\zeta'\,d\tau' - \frac{1}{2\pi}\int_{\Theta}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\eta'}{dt}\,d\tau'$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\Theta}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\zeta'}{dt}\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\beta'\right)d\sigma' \tag{11′}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\beta'\right)d\sigma' + \frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma}\frac{1}{r}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\gamma' - \frac{\partial\psi'}{\partial z'}\cos\beta'\right)\frac{d}{dt}(d\sigma')$$

mit

$$\frac{d\eta}{dt} = \xi_0\frac{\partial v}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial v}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\frac{d\xi_0}{dt} + \frac{\partial y}{\partial b}\frac{d\eta_0}{dt} + \frac{\partial y}{\partial c}\frac{d\zeta_0}{dt}$$

$$= \xi_0\frac{\partial v}{\partial a} + \eta_0\frac{\partial v}{\partial b} + \zeta_0\frac{\partial v}{\partial c} + \frac{\partial y}{\partial a}\left\{\frac{\partial}{\partial c}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial b} - \frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{1}{\varrho}\right)\frac{\partial p}{\partial a}\right.$$

$$\left. + \frac{\partial X}{\partial b}\frac{\partial x}{\partial c} - \frac{\partial X}{\partial c}\frac{\partial x}{\partial b} + \frac{\partial Y}{\partial b}\frac{\partial y}{\partial c} - \frac{\partial Y}{\partial c}\frac{\partial y}{\partial b} + \frac{\partial Z}{\partial b}\frac{\partial z}{\partial c} - \frac{\partial Z}{\partial c}\frac{\partial z}{\partial b}\right\} + \dots. \tag{12′}$$

Bezeichnet vorübergehend ω', ν' ein System Gaußscher Parameter in der Umgebung des Punktes σ_0' auf Σ_0, so ist

$$d\sigma' = \left\{\left(\frac{\partial(x', y')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y', z')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z', x')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}} d\omega'\,d\nu', \tag{13′}$$

mithin

$$\frac{d}{dt}(d\sigma') = \left\{\left(\frac{\partial(x', y')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(y', z')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z', x')}{\partial(\omega', \nu')}\right)^2\right\}^{-\frac{1}{2}} A,$$

$$A = \left\{\frac{\partial(x', y')}{\partial(\omega', \nu')}\frac{d}{dt}\frac{\partial(x', y')}{\partial(\omega', \nu')} + \dots\right\}d\omega'\,d\nu', \tag{14′}$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(x', y')}{\partial(\omega', \nu')} = \frac{\partial u'}{\partial\omega'}\frac{\partial y'}{\partial\nu'} + \frac{\partial x'}{\partial\omega'}\frac{\partial v'}{\partial\nu'} - \frac{\partial u'}{\partial\nu'}\frac{\partial y'}{\partial\omega'} - \frac{\partial x'}{\partial\nu'}\frac{\partial v'}{\partial\omega'}, \dots.$$

Schließlich ist beispielsweise

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi'}{\partial y'}\cos\gamma'\right) = \cos\gamma'\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi'}{\partial y'} - \frac{\partial\psi'}{\partial y'}\sin\gamma'\frac{d\gamma'}{dt}. \tag{15′}$$

Die Existenz der Ableitungen $\frac{d}{dt}\frac{\partial\psi'}{\partial x'}, \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi'}{\partial y'}, \frac{d}{dt}\frac{\partial\psi'}{\partial z'}$ auf Σ folgt un-

mittelbar aus den wiederholt genannten Sätzen meiner Abhandlungen zur Potentialtheorie[76]). Aus gleichem Grunde sind die Funktionen

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad \frac{d}{dt}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{16'}$$

für alle (x, y, z) in $\Theta+\Sigma$ vorhanden und stetig[77]). Wegen $u=\hat{u}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \ldots$ existieren also in der Tat die Beschleunigungskomponenten $\frac{du}{dt}, \frac{dv}{dt}, \frac{dw}{dt}$ und verhalten sich in $\Theta+\Sigma$ stetig.

Wie bereits auf S. 276—277 gezeigt worden ist, folgt aus (15), (24) und (25), daß p in $\Theta+\Sigma$ stetige, der H-Bedingung genügende Ableitungen zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)&=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\\ &-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2+2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial z}+2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x}+2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right\}\end{aligned} \tag{17'}$$

genügt. Auf Σ ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n}&=u\frac{d}{dt}\cos\alpha+v\frac{d}{dt}\cos\beta+w\frac{d}{dt}\cos\gamma\\ &+\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}\right)\frac{\partial\Psi}{\partial t}\left\{\left(\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)^2\right\}^{-1}\\ &+X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma\\ &=-\left(\frac{du}{dt}-X\right)\cos\alpha-\left(\frac{dv}{dt}-Y\right)\cos\beta-\left(\frac{dw}{dt}-Z\right)\cos\gamma.\end{aligned} \tag{18'}$$

Nachdem dies alles gezeigt worden ist, leiten wir durch eine wortgetreue Wiederholung der Betrachtungen auf S. 266—268 für alle (x, y, z) in $\Theta+\Sigma$ die Beziehungen

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt}-X-p\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\right)&=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}F\right),\\ \frac{dv}{dt}-Y-p\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\right)&=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}F\right),\\ \frac{dw}{dt}-Z-p\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\right)&=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}F\right),\end{aligned} \tag{19'}$$

unter F eine bis auf eine belanglose additive Funktion der Zeit bestimmte in $\Theta+\Sigma$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetige Funktion verstanden. Für (19') kann man offenbar auch setzen

---

[76]) Vgl. Abhandlung I § 1 sowie §§ 5 und 6 der Abhandlung II.

[77]) Übrigens sind, was im folgenden nicht gebraucht wird, auch noch $\frac{d}{dt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{d}{dt}\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ in $\Theta+\Sigma$ vorhanden und stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung.

$$\frac{du}{dt} - X + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial W}{\partial x},$$

(20′) $$\frac{dv}{dt} - Y + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial W}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} - Z + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z} = -\frac{\partial W}{\partial z}, \qquad W = \frac{1}{\varrho}(F - p).$$

Aus (20′) folgt durch eine sinngemäße Wiederholung der Betrachtungen auf S. 271—275, daß W in $\Theta + \Sigma$ stetige partielle Ableitungen zweiter Ordnung hat und der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}$$

(21′) $$-\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 + 2\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial x} + 2\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial y}\right\}$$

$$-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}\right)\right\}$$

genügt[78]).

Wegen (21′) und (17′) ist also

(22′) $$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = 0.$$

Auf Σ ist weiter wegen (20′)

(23′) $$\frac{\partial W}{\partial n} = -\left(\frac{du}{dt} - X\right)\cos\alpha - \left(\frac{dv}{dt} - Y\right)\cos\beta - \left(\frac{dw}{dt} - Z\right)\cos\gamma - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial n},$$

mithin, mit Rücksicht auf (18′),

(24′) $$\frac{\partial W}{\partial n} = 0.$$

Aus (22′) und (24′) folgt, angesichts der vorhin angegebenen Stetigkeitseigenschaften der Funktion W,

(25′) $$W = \text{Const.}, \qquad \frac{1}{\varrho}F = \frac{1}{\varrho}p + \text{Const.},$$

demnach endgültig

$$\frac{du}{dt} - X = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

(26′) $$\frac{dv}{dt} - Y = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{dw}{dt} - Z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

---

[78]) Für X, Y, Z; $\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$ treten bei diesen Betrachtungen jetzt entsprechend $X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$, $Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}$, $Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$; $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$ ein.

§ 5.

Ergänzungen und Erweiterungen.

Damit ist der in Aussicht genommene Existenzbeweis zu Ende. Und nun noch einige Ergänzungen. Wir haben bis jetzt vorausgesetzt, daß Θ einfach zusammenhängend und von einer einzigen Randfläche begrenzt ist. Es möge demgegenüber jetzt der immer noch einfach zusammenhängende Bereich Θ mehrere getrennte Randflächen ${}^{(0)}\Sigma, {}^{(1)}\Sigma, \ldots, {}^{(n)}\Sigma$ haben. Die zu Θ komplementäre Menge besteht alsdann aus mehreren getrennten einfach zusammenhängenden Gebieten ${}^{(0)}\Theta_a, {}^{(1)}\Theta_a, \ldots, {}^{(m)}\Theta_a$, von denen eins, ${}^{(0)}\Theta_a$, den unendlich fernen Punkt enthält. Das Integral

$$(27') \qquad \int \Xi_n \, d\sigma, \qquad \Xi_n = \xi \cos\alpha + \eta \cos\beta + \zeta \cos\gamma,$$

erstreckt über jede einzelne Randkomponente von Θ, hat dem Stokesschen Satze zufolge den Wert Null. In jedem der Komplementärbereiche gibt es darum eine daselbst reguläre, auch noch auf dem Rande nebst ihrer Normalableitung stetige Potentialfunktion ${}^{(0)}\psi, {}^{(1)}\psi, \ldots, {}^{(m)}\psi$, die der Bedingung

$$(28') \qquad \frac{{}^{(k)}\partial \psi}{\partial n} = \Xi_n \qquad (k = 0, 1, \ldots, m)$$

genügt. Wir führen wie auf S. 83 die in Θ erklärten Funktionen $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ durch die Formeln (36) ein, wo diesmal die Oberflächenintegrale über die Gesamtbegrenzung von Θ zu erstrecken sind und ψ auf einer jeden Randkomponente die zugehörige, soeben genannte Potentialfunktion bezeichnet.

Es gilt

$$(29') \quad {}^{(k)}\psi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{{}^{(k)}\Sigma} {}^{(k)}G_a^{II}(x, y, z; \sigma') \left[\xi' \cos\alpha' + \eta' \cos\beta' + \zeta' \cos\gamma'\right] d\sigma'$$

$$(k = 0, 1, \ldots, m)$$

unter ${}^{(k)}G_a^{II}$ die zu ${}^{(k)}\Theta_a$ gehörige Greensche Funktion zweiter Art der Differentialgleichung $\Delta u = 0$ verstanden[79]).

Die in Θ reguläre Potentialfunktion φ hat jetzt auf jeder Randkomponente von Θ eine Beziehung von der Form (34) zu erfüllen. Das Integral der rechten Seite, erstreckt über die Gesamtbegrenzung, verschwindet, also ist φ tatsächlich vorhanden.

---

[79]) Die Funktion ${}^{(0)}G_a^{II}$ ist zu der auf S. 86 eingeführten Funktion G_a^{II} analog, während ${}^{(k)}G_a^{II}$ $(k = 1, \ldots, m)$ sich ganz wie G^{II} (vgl. S. 86) verhalten. Die Funktionen ${}^{(k)}\psi$ sind den Bedingungen $\int_{{}^{(k)}\Sigma} {}^{(k)}\psi \, d\sigma = 0$ $(k = 1, \ldots, m)$, ${}^{(0)}\psi = 0$ für $R \to \infty$ gemäß normiert.

Für die bei dem Prozeß der sukzessiven Approximationen auftretenden Funktionen ${}^{(k)}\psi_l$ erhalten wir den Ausdruck

$${}^{(k)}\psi_l(x_l, y_l, z_l) = \frac{1}{4\pi} \int_{{}^{(k)}\Sigma} {}^{(k)}G_a^{II}(x_l, y_l, z_l; \sigma_l')\,(\xi_l' \cos\alpha_l' + \eta_l' \cos\beta_l' + \zeta_l' \cos\gamma_l')\, d\sigma_l'.$$

Im allgemeinen ist

$$(31') \qquad \int_{{}^{(k)}\Sigma} (\xi_l' \cos\alpha_l' + \eta_l' \cos\beta_l' + \zeta_l' \cos\gamma_l')\, d\sigma_l' = \int_{{}^{(k)}\Sigma} h_l(\sigma_l')\, d\sigma_l' \neq 0.$$

Die Funktion ${}^{(k)}\psi_l(x_l, y_l, z_l)$ $(k > 0)$ ist darum diejenige in ${}^{(k)}\Theta_a$ reguläre Potentialfunktion, die auf ${}^{(k)}\Sigma$ nicht der Bedingung $\frac{\partial \psi_l}{\partial n} = h_l(\sigma_l)$, sondern der Randbedingung $\frac{\partial}{\partial n}\psi_l = h_l(\sigma_l) - \frac{1}{{}^{(k)}D_*} \int_{{}^{(k)}\Sigma} h_l(\sigma_l)\, d\sigma_l$ nebst der Normierungsbedingung $\int_{{}^{(k)}\Sigma} \psi_l(\sigma_l)\, d\sigma_l = 0$ (${}^{(k)}D_* =$ Flächeninhalt von ${}^{(k)}\Sigma$) genügt.

Was ${}^{(0)}\psi_l$ betrifft, so ist sie diejenige in ${}^{(0)}\Theta$, außer etwa im unendlich fernen Punkte, reguläre Potentialfunktion, die der Randbedingung $\frac{\partial {}^{(0)}\psi_l}{\partial n} = h_l(\sigma_l)$ und der Normierungsbedingung ${}^{(0)}\psi_l \to 0$ für $R_l \to \infty$ genügt.

Der Konvergenzbeweis verläuft ganz wie in dem vorhin ausführlich behandelten besonders einfachen Falle. Die ab und zu notwendigen geringfügigen Änderungen bieten nach den vorstehenden Bemerkungen keinerlei Schwierigkeiten dar.

Einige Aufmerksamkeit erheischt hingegen der andere, noch nicht berücksichtigte Fall, wenn nämlich Θ *mehrfach zusammenhängend* ist. Der Einfachheit halber sei vorausgesetzt, daß Θ_0 und darum auch Θ zweifach zusammenhängend und von einer einzigen geschlossenen analytischen und regulären Fläche begrenzt ist. Es möge etwa Θ einem Kreisringkörper topologisch äquivalent sein. Jetzt kann φ einen von Null verschiedenen Periodizitätsmodul haben und die Formel (38) nicht mehr gelten. Zur Bestimmung des Periodizitätsmoduls führt nun die folgende einfache Betrachtung.

Es sei C_0 irgendeine geschlossene Kurve mit stetiger Tangente im Innern von Θ_0, die nicht durch stetige Deformation auf einen Punkt zusammengezogen werden kann, und es sei C ihr Bild in Θ. Aus den Bewegungsgleichungen

$$(32') \qquad \frac{du}{dt} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad \frac{dv}{dt} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad \frac{dw}{dt} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}$$

folgt

$$\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz=\frac{du}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc\right)$$

$$(33')\quad +\frac{dv}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial a}da+\ldots\right)+\frac{dw}{dt}\left(\frac{\partial z}{\partial a}da+\ldots\right)=Xdx+Ydy+Zdz$$

$$-\frac{1}{\varrho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx+\frac{\partial p}{\partial y}dy+\frac{\partial p}{\partial z}dz\right),$$

oder, was dasselbe bedeutet,

$$\frac{d}{dt}\left\{u\left(\frac{\partial x}{\partial a}da+\frac{\partial x}{\partial b}db+\frac{\partial x}{\partial c}dc\right)+v\left(\frac{\partial y}{\partial a}da+\ldots\right)+w\left(\frac{\partial z}{\partial a}da\ldots\right)\right\}$$

$$(34')\quad -u\left(\frac{\partial u}{\partial a}da+\frac{\partial u}{\partial b}db+\frac{\partial u}{\partial c}dc\right)-v\left(\frac{\partial v}{\partial a}da+\ldots\right)-w\left(\frac{\partial w}{\partial a}da+\ldots\right)$$

$$=Xdx+Ydy+Zdz-d\left(\frac{1}{\varrho}p\right)+pd\left(\frac{1}{\varrho}\right),$$

oder, kürzer geschrieben,

$$(35')\quad \begin{aligned}&\frac{d}{dt}(udx+vdy+wdz)-\frac{1}{2}d(u^2+v^2+w^2)\\&=Xdx+Ydy+Zdz-d\left(\frac{1}{\varrho}p\right)+pd\left(\frac{1}{\varrho}\right).\end{aligned}$$

Integration längs C ergibt

$$(36')\quad \frac{d}{dt}\int_C udx+vdy+wdz=\int_C Xdx+Ydy+Zdz+\int_C pd\frac{1}{\varrho},$$

woraus nach einer Integration in bezug auf t folgt

$$(37')\quad \begin{aligned}&\int_C udx+vdy+wdz-\int_{C_0}u_0da+v_0db+w_0dc\\&=\int_{t_0}^{t}dt\int_C Xdx+Ydy+Zdz+\int_{t_0}^{t}dt\int_C pd\frac{1}{\varrho}.\end{aligned}$$

Handelt es sich insbesondere um eine homogene Flüssigkeit und ist eine Kräftefunktion vorhanden, so verschwindet die rechte Seite, und wir erhalten den klassischen Satz von der Invarianz der Zirkulation.

Die Formeln (35), die auch jetzt noch gelten, geben für den gesuchten Periodizitätsmodul den Wert

$$(38')\quad c=\int_C d\varphi=\int_C udx+vdy+wdz$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'd\tau'-\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'd\tau'\right)+dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\zeta'd\tau'-\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'd\tau'\right)$$

$$+dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\xi'd\tau'-\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'd\tau'\right)=\int_{C_0}u_0da+v_0db+w_0dc$$

$$+\int_{t_0}^{t} dt \int_C X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + \int_{t_0}^{t} dt \int_C p\,d\frac{1}{\varrho}$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_C dx\left(\frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau'\right) + dy\left(\frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial z}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau'\right)$$

$$+dz\left(\frac{\partial}{\partial y}\int\frac{1}{r}\xi'\,d\tau' - \frac{\partial}{\partial x}\int\frac{1}{r}\eta'\,d\tau'\right).$$

Es sei $\mathfrak{S}$ irgendein doppelpunktfreies, analytisches und reguläres Flächenstück, das Σ nirgends berührt, diese Fläche in einer analytischen und regulären Kurve trifft und so beschaffen ist, daß der ganz in $\Theta + \Sigma$ befindliche Teil von $\mathfrak{S}$, als Querschnitt aufgefaßt, den Raum Θ einfach zusammenhängend macht. Die Begrenzung von $\mathfrak{S}$ möge aus einer analytischen und regulären (außerhalb von $\Theta + \Sigma$ gelegenen) Kurve $\mathfrak{C}$ bestehen[80]). Der durch den Querschnitt einfach zusammenhängend gewordene Raum Θ heiße $\bar{\Theta}$. Das ganze Flächenstück $\mathfrak{S}$ denken wir uns jetzt mit einer homogenen Doppelschicht der Dichte $\frac{c}{4\pi}$ belegt und bezeichnen ihr Potential mit $\bar{\varphi}(x, y, z)$. Nach bekannten Sätzen ist $\bar{\varphi}$ im Innern und auf dem Rande von $\bar{\Theta}$ nebst seinen partiellen Ableitungen $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial y}, \frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial z}$; $\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z^2}$ stetig; $\frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial^2\bar{\varphi}}{\partial z^2}$ erfüllen eine H-Bedingung[81]). Schließlich ist

$$\int_C d\bar{\varphi} = c. \tag{39'}$$

Die Formel (38) ist jetzt, wie man leicht sieht, durch die Beziehung

$$\begin{aligned}\varphi(x, y, z) &= \bar{\varphi}(x, y, z)\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G^{II}(x, y, z; \sigma')\left(\hat{u}'\cos\alpha' + \hat{v}'\cos\beta' + \hat{w}'\cos\gamma' - \frac{\partial\bar{\varphi}'}{\partial n}\right)d\sigma'\\ &+\frac{1}{4\pi}\int_\Sigma G^{II}(x, y, z; \sigma')\frac{\partial\Psi'}{\partial t}\left[\left(\frac{\partial\Psi'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi'}{\partial z'}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} d\sigma'\end{aligned} \tag{40'}$$

zu ersetzen.

Der Existenzbeweis der Lösung wird jetzt unter Zugrundelegung der Formeln (38′) und (40′) im übrigen wie vorhin geführt. Sind c_l und

---

[80]) Natürlich hängt $\mathfrak{S}$ in vorgegebener Weise von t ab. Handelt es sich insbesondere um ein starres, bewegtes Gefäß, so kann man annehmen, daß $\mathfrak{S}$ mit Σ starr verbunden ist und also bei der betrachteten Bewegung mitgenommen wird.

[81]) Übrigens ist $\bar{\varphi}$ auf beiden Seiten von $\mathfrak{S}$ in $\Theta + \Sigma$ analytisch und regulär.

c_{l-1} die der l-ten und $(l-1)$-ten Approximation entsprechenden Werte des Periodizitätsmoduls, so findet man

$$|c_l - c_{l-1}| \leqq \mathfrak{h}_{33}\,\Omega, \tag{41'}$$

ferner in $\Theta + \Sigma$

$$|\bar{\varphi}_l - \bar{\varphi}_{l-1}| \leqq \mathfrak{h}_{33}\,\Omega;\ \left|\frac{\partial\bar{\varphi}_l}{\partial x_l} - \frac{\partial\bar{\varphi}_{l-1}}{\partial x_{l-1}}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{33}\,\Omega,$$

$$\left|\frac{\partial^2\bar{\varphi}_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2\bar{\varphi}_{l-1}}{\partial x_{l-1}^2}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{33}\,\Omega, \tag{42'}$$

$$\left|\left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2\bar{\varphi}_{l-1}}{\partial x_{l-1}^2}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial^2\bar{\varphi}_l}{\partial x_l^2} - \frac{\partial^2\bar{\varphi}_{l-1}}{\partial x_{l-1}^2}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{33}\,\Omega\, d_{12}^{\lambda}.$$ [82])

Berücksichtigt man (42'), so findet man wieder die Ungleichheiten (123).

In einer ganz analogen Weise erledigt sich der allgemeinere Fall, wenn die Zusammenhangszahl von Θ größer als 2 ist und Σ aus mehreren Randkomponenten besteht.

Wir haben uns in dem vorliegenden zweiten Kapitel bisher mit der Bewegung einer in einem abgeschlossenen starren oder deformierbaren Gefäß befindlichen Flüssigkeitsmasse beschäftigt. Die Flüssigkeit erfüllte das Gefäß vollständig und konnte starre oder deformierbare Körper umschließen; die Bewegung der Hülle wie der eingeschlossenen Körper galt als bekannt. Das Volumen des von der Hülle und den Einschlußkörpern begrenzten Raumes blieb dabei während der ganzen Dauer der Bewegung unverändert. In ähnlicher Weise läßt sich das Problem der Bewegung einer sich allseitig ins Unendliche erstreckenden Flüssigkeitsmasse Θ, in der $n\,(\geqq 1)$ starre oder deformierbare Körper ${}^{(1)}\Theta, \ldots, {}^{(n)}\Theta$ eingeschlossen sind, erledigen. Die Bewegung der eingeschlossenen Körper gilt wieder als bekannt. Dies bedeutet, daß, unter (x, y, z) einen Punkt auf der Oberfläche ${}^{(k)}\Sigma$ eines der n Körper verstanden, für alle t in einem Intervalle $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ eine Gleichung von der Form

$${}^{(k)}\Psi(x, y, z, t) = 0 \tag{43'}$$

gilt. Dabei bezeichnet ${}^{(k)}\Psi$ eine gegebene, etwa analytische und reguläre Funktion ihrer vier Argumente für alle t in $\langle t_0, t_0 + \hat{t}\rangle$ und alle (x, y, z) in einem Bereiche, der die Oberfläche von ${}^{(k)}\Theta$ für $t = t_0$ ganz in seinem

---

[82]) Zu (42') ist folgendes zu bemerken. Die Punkte $(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ und (x_l, y_l, z_l) können gelegentlich auf verschiedenen Seiten des Querschnittes $\mathfrak{S}$ liegen. Trifft dies zu, so hat man bei Beurteilung der Differenz $\bar{\varphi}_l(x_l, y_l, z_l) - \bar{\varphi}_{l-1}(x_{l-1}, y_{l-1}, z_{l-1})$ in bekannter Weise den Querschnitt passend umzulegen. Was die Ableitungen $\frac{\partial\bar{\varphi}}{\partial x}, \ldots$ betrifft, so sind sie in Θ eindeutig.

Innern enthält. Im Unendlichen ruht die Flüssigkeit, der Druck hat dort einen vorgegebenen Wert p_∞. Das Verhalten der Dichte, des Druckes und des Geschwindigkeitsfeldes im Unendlichen ist durch die entsprechenden Formeln des ersten Kapitels charakterisiert.

Die Grundgleichungen des Problems sind den in § 1 zusammengestellten analog. Bei dem Konvergenzbeweis muß natürlich, wie im Kapitel I, auf den unendlich fernen Punkt besonders Rücksicht genommen werden.

Drittes Kapitel.

Eine allseitig unbegrenzte oder in einem Gefäß eingeschlossene Flüssigkeitsmasse mit eingetauchten frei beweglichen starren Körpern

Wir haben in dem vorhergehenden Kapitel vorausgesetzt, die Bewegung der von der Flüssigkeitsmasse umschlossenen Körper sei im voraus bekannt. Es ist jetzt nicht schwer, den Bewegungsvorgang einer Flüssigkeitsmasse, in die *frei bewegliche* starre Körper eingetaucht sind, innerhalb eines hinreichend kleinen Zeitintervalles zu studieren. Um Vorstellungen zu fixieren, mag es sich um den folgenden besonders einfachen Fall handeln. Die Flüssigkeit füllt ein starres, unbewegliches Gefäß vollständig aus und schließt einen einzigen starren Körper ${}^1\Theta$ allseitig ein. Die Innenwand des Gefäßes ${}^0\Sigma$ und die Oberfläche ${}^1\Sigma$ des eingetauchten Körpers sind analytische und reguläre Flächen, die zur Zeit t_0, mithin jedenfalls auch für alle hinreichend kleinen $t - t_0$ keinen Punkt miteinander gemeinsam haben. Wie in dem zweiten Kapitel, wird angenommen, daß in dem Zeitpunkt t_0 die Verteilung der Dichte ϱ_0 und das Geschwindigkeitsfeld u_0, v_0, w_0 bekannt sind. Während dort aber die Lage des eingetauchten Körpers für alle t in einem Intervall $\langle t_0, t_0 + \hat{t} \rangle$ durch eine Gleichung von der Form (1) gegeben war, sind jetzt nur seine Lage und sein Geschwindigkeitszustand zur Zeit t_0 bekannt. Es sei ${}^1\Sigma_0$ die Oberfläche des eingetauchten Körpers ${}^1\Theta_0$ für $t = t_0$, es sei $\mathring{P}$ irgendein Flüssigkeitsteilchen auf ${}^1\Sigma_0$; es mögen weiter $\mathring{\alpha}, \mathring{\beta}, \mathring{\gamma}$ die Richtungskosinus der Normale zu ${}^1\Sigma_0$ in P und $\mathring{u}, \mathring{v}, \mathring{w}$ die Komponenten der Geschwindigkeit des Punktes $\mathring{P}$, aufgefaßt als ein Punkt von ${}^1\Theta_0$, bezeichnen. In $\mathring{P}$ ist

$$(\overline{43'}) \qquad u_0 \cos\mathring{\alpha} + v_0 \cos\mathring{\beta} + w_0 \cos\mathring{\gamma} = \mathring{u}\cos\mathring{\alpha} + \mathring{v}\cos\mathring{\beta} + \mathring{w}\cos\mathring{\gamma}.$$

Desgleichen ist in einem Punkte der Außenhülle

$$(44') \qquad u_0 \cos\alpha_0 + v_0 \cos\beta_0 + w_0 \cos\gamma_0 = 0,$$

unter $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ die Richtungskosinus der Normale verstanden. Die Beziehungen $(\overline{43'})$ und $(44')$ treten jetzt an Stelle der Gleichung (5) ein.

Im übrigen erfüllen ϱ_0, u_0, v_0, w_0 alle weiteren im zweiten Kapitel angegebenen Bedingungen.

Was die Randbedingungen betrifft, so ist auf ${}^0\Sigma$ die Normalkomponente der Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen dauernd gleich Null. Auf ${}^1\Sigma$ verschwindet die Normalkomponente der Relativgeschwindigkeit der Flüssigkeit in bezug auf ${}^1\Theta$. Es wird schließlich vorausgesetzt, daß die auf ${}^1\Theta$ wirkenden äußeren Kräfte gegeben sind; insbesondere kann es sich natürlich um eine kräftelose Bewegung handeln.

Es sei ${}^1\Sigma$ die Lage der Oberfläche von ${}^1\Theta$ zur Zeit t. Sind die resultierende Kraft und das resultierende Moment der auf ${}^1\Theta$ von der Flüssigkeit ausgeübten Druckkräfte, d. h. die Größen

$$\begin{gathered}\int_{{}^1\Sigma} p\cos\alpha\, d\sigma,\quad \int_{{}^1\Sigma} p\cos\beta\, d\sigma,\quad \int_{{}^1\Sigma} p\cos\gamma\, d\sigma;\quad \int_{{}^1\Sigma} p(y\cos\gamma - z\cos\beta)\, d\sigma,\\ \int_{{}^1\Sigma} p(z\cos\alpha - x\cos\gamma)\, d\sigma,\quad \int_{{}^1\Sigma} p(x\cos\beta - y\cos\alpha)\, d\sigma\end{gathered} \tag{45'}$$

bekannt, so läßt sich die Bewegung von ${}^1\Theta$ in bekannter Weise bestimmen. Der eingetauchte Körper bewegt sich nämlich wie ein freier Körper, auf den neben den äußeren Kräften das durch (45′) charakterisierte Kräftesystem wirkt. Tatsächlich sind freilich die Werte (45′) ebensowenig wie die Lage von ${}^1\Theta$ im voraus bekannt, müssen vielmehr erst bestimmt werden.

Wie in dem zweiten Kapitel bedienen wir uns zur Bestimmung des Bewegungsvorganges des Verfahrens der sukzessiven Approximationen. Der vorgeschriebene Geschwindigkeitszustand des Körpers ${}^1\Theta$ im Zeitpunkt t_0 kann, wie man weiß, als eine momentane Drehung um eine Achse (g) im Raume x, y, z, verbunden mit einer momentanen Translation längs eben dieser Achse aufgefaßt werden. Es sei $\overset{\circ}{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der augenblicklichen Drehung, $\overset{\circ}{u}$ die Geschwindigkeit der momentanen Schiebung. Wir nehmen in einer ersten Approximation an, die Bewegung von ${}^1\Theta$ sei bekannt und bestehe in einer Schraubung um (g) mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\overset{\circ}{\omega}$ und konstanter Translationsgeschwindigkeit $\overset{\circ}{u}$. Die Lage der Oberfläche von ${}^1\Theta$ zur Zeit t, sie heiße ${}^1\Sigma_1$, ist durch eine leicht aufzustellende Gleichung von der Form

$$\Psi_1(x, y, z, t) = 0 \tag{46'}$$

gegeben. Wir bestimmen jetzt genau wie in dem zweiten Kapitel die Bahnen der einzelnen Flüssigkeitsteilchen $x = x_1(a, b, c, t)$, $y = y_1(a, b, c, t)$, $z = z_1(a, b, c, t)$ und den Wert des Flüssigkeitsdruckes in der ersten Approximation, $p_1(x_1, y_1, z_1)$ [83]).

[83]) Es sei daran erinnert, daß $p_1(x_1, y_1, z_1)$ auch noch von t abhängt.

Die Formeln

$$\int_{{}^1\Sigma_1} p_1 \cos\alpha_1 \, d\sigma_1, \quad \int_{{}^1\Sigma_1} p_1 \cos\beta_1 \, d\sigma_1, \quad \int_{{}^1\Sigma_1} p_1 \cos\gamma_1 \, d\sigma_1;$$

$$\int_{{}^1\Sigma_1} p_1 (y_1 \cos\gamma_1 - z_1 \cos\beta_1) \, d\sigma_1, \quad \int_{{}^1\Sigma_1} p_1 (z_1 \cos\alpha_1 - x_1 \cos\gamma_1) \, d\sigma_1, \tag{47'}$$

$$\int_{{}^1\Sigma_1} p_1 (x_1 \cos\beta_1 - y_1 \cos\alpha_1) \, d\sigma_1$$

geben die Komponenten der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes des auf ${}^1\Sigma$ von der Flüssigkeit ausgeübten Druckes in der gleichen Approximation.

Wir bestimmen jetzt diejenige Bewegung, die ${}^1\Theta$ als freier Körper unter Zugrundelegung des eingangs genannten Anfangszustandes unter der Wirkung der äußeren Kräfte und der Kräfte (47') ausführen würde. Die Lage der Oberfläche von ${}^1\Theta$ zur Zeit t, sie heiße jetzt ${}^1\Sigma_2$, möge dabei durch eine Gleichung von der Form

$$\Psi_2(x, y, z, t) = 0 \tag{48'}$$

gegeben sein. Wie in dem vorhergehenden Kapitel lassen sich jetzt die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen

$$x = x_2(a, b, c, t), \quad y = y_2(a, b, c, t), \quad z = z_2(a, b, c, t) \tag{49'}$$

und der Wert des Flüssigkeitsdruckes in der zweiten Näherung, $p_2(x_2, y_2, z_2)$, ermitteln. Die Komponenten der resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes des auf ${}^1\Sigma$ von der Flüssigkeit ausgeübten Druckes sind in der gleichen Approximation

$$\int_{{}^1\Sigma_2} p_2 \cos\alpha_2 \, d\sigma_2, \quad \int_{{}^1\Sigma_2} p_2 \cos\beta_2 \, d\sigma_2, \quad \int_{{}^1\Sigma_2} p_2 \cos\gamma_2 \, d\sigma_2;$$

$$\int_{{}^1\Sigma_2} p_2 (y_2 \cos\gamma_2 - z_2 \cos\beta_2) \, d\sigma_2, \quad \int_{{}^1\Sigma_2} p_2 (z_2 \cos\alpha_2 - x_2 \cos\gamma_2) \, d\sigma_2, \tag{50'}$$

$$\int_{{}^1\Sigma_2} p_2 (x_2 \cos\beta_2 - y_2 \cos\alpha_2) \, d\sigma_2.$$

Unter der Einwirkung dieser Kräfte sowie der etwa außerdem gegebenen äußeren Kräfte führt ${}^1\Theta$ als freier Körper eine ganz bestimmte Bewegung aus, wenn, wie wir annehmen wollen, seine Lage und sein Geschwindigkeitszustand zur Zeit t_0 die tatsächlich vorgeschriebenen sind. Die Lage der Oberfläche von ${}^1\Theta$ wird dabei durch eine Gleichung von der Form

$$\Psi_3(x, y, z, t) = 0 \tag{51'}$$

gegeben sein. Wie in dem zweiten Kapitel lassen sich alsdann die Bahnen der Flüssigkeitsteilchen und der Wert des Druckes in der dritten Approximation bestimmen. Der Iterationsprozeß läßt sich, wie leicht ersichtlich, unbegrenzt fortsetzen.

Der Konvergenzbeweis wird, wie stets bisher, durch Untersuchung der Differenzen $x_{n+1} - x_n$, $y_{n+1} - y_n$, $z_{n+1} - z_n$ geführt. Die Überlegungen verlaufen den früheren Betrachtungen parallel. Neben den a. a. O. gebrauchten Hilfsmitteln muß hierbei aus der Theorie der Bewegung eines freien Körpers noch die folgende Tatsache herangezogen werden.

Es möge sich um die Bewegung eines freien, von einer analytischen und regulären Fläche begrenzten Körpers ${}^1\Theta$ handeln, dessen Lage und Geschwindigkeitszustand zur Zeit t_0 gegeben sind. Die Komponenten der auf ${}^1\Theta$ wirkenden resultierenden Kraft und des resultierenden Momentes seien

$$(52') \qquad \mathfrak{X}(t), \mathfrak{Y}(t), \mathfrak{Z}(t); \quad \mathfrak{L}(t), \mathfrak{M}(t), \mathfrak{N}(t),$$

unter $\mathfrak{X}, \ldots, \mathfrak{N}$ Funktionen verstanden, die nebst ihren ersten Ableitungen stetig sind. Es seien $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ Koordinaten eines bestimmten Massenteilchens des Körpers in seiner Anfangslage, $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ die Koordinaten desselben Teilchens zur Zeit t,

$$(53') \qquad \mathfrak{x} = \mathfrak{x}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), \quad \mathfrak{y} = \mathfrak{y}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), \quad \mathfrak{z} = \mathfrak{z}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t).$$

Es möge

$$\tilde{\mathfrak{X}}(t), \tilde{\mathfrak{Y}}(t), \tilde{\mathfrak{Z}}(t); \quad \tilde{\mathfrak{L}}(t), \tilde{\mathfrak{M}}(t), \tilde{\mathfrak{N}}(t)$$

ein anderes zu $\mathfrak{X}(t), \ldots, \mathfrak{N}(t)$ analoges Kräftesystem bezeichnen, und es sei

$$\tilde{\mathfrak{x}} = \tilde{\mathfrak{x}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), \quad \tilde{\mathfrak{y}} = \tilde{\mathfrak{y}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t), \quad \tilde{\mathfrak{z}} = \tilde{\mathfrak{z}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, t)$$

die Bahn, welche das Teilchen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}$ unter Zugrundelegung desselben Anfangszustandes jetzt beschreibt. Es wird vorausgesetzt, daß die Funktionen (52′) und (53′) den folgenden Ungleichheiten genügen:

$$|\mathfrak{X}(t)|, \ldots, \left|\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt}\right|, \ldots, \left|\frac{d\mathfrak{N}(t)}{dt}\right| \leqq \mathsf{P}_0,$$

$$|\tilde{\mathfrak{X}}(t)|, \ldots, \left|\frac{d\tilde{\mathfrak{X}}(t)}{dt}\right|, \ldots, \left|\frac{d\tilde{\mathfrak{N}}(t)}{dt}\right| \leqq \mathsf{P}_0,$$

$$|\mathfrak{X}(t) - \tilde{\mathfrak{X}}(t)|, \left|\frac{d\mathfrak{X}(t)}{dt} - \frac{d\tilde{\mathfrak{X}}(t)}{dt}\right|, \ldots, \left|\frac{d\mathfrak{N}(t)}{dt} - \frac{d\tilde{\mathfrak{N}}(t)}{dt}\right| \leqq \mathsf{P}$$

(P_0, P konstant).

Alsdann gelten die weiteren Beziehungen

$$|\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P}; \quad \left|\frac{d}{dt}(\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}}(\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P}; \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{a}^2}(\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P};$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial \mathfrak{a}}\frac{d}{dt}(\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P}; \quad \left|\frac{\partial^2}{\partial \mathfrak{a}^2}\frac{d}{dt}(\mathfrak{x} - \tilde{\mathfrak{x}})\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{34}\mathsf{P}.$$

Viertes Kapitel.

Die Bewegung in Abhängigkeit von dem Anfangszustande und den Grenzbedingungen.

Nachdem die in Aussicht genommenen Existenzsätze erledigt worden sind, wenden wir uns jetzt der wichtigen Frage der Abhängigkeit der Bewegung von dem Anfangszustande und den Grenzbedingungen zu. Wir werden zeigen, daß *die Flüssigkeitsbewegung in einem näher zu präzisierenden Sinne von dem Anfangszustande und den Grenzbedingungen, d. h. der zwangläufigen Bewegung etwaiger Hülle und etwaiger eingetauchter Körper stetig abhängt.* Der Übersichtlichkeit halber wollen wir uns dabei auf die Untersuchung des einfachsten in der ersten Abhandlung ausführlich betrachteten Bewegungsvorganges beschränken. Es handelte sich dort um die Bewegung einer allseitig unbegrenzten Masse homogener, inkompressibler, reibungsloser Flüssigkeit, in der zur Zeit t_0 sich eine geschlossene Wirbelröhre T_0 von endlichem Querschnitt befindet, unter der Einwirkung von Kräften, die ein Potential haben. Wir nehmen an, daß T_0 eine geschlossene, doppelpunktfreie Fläche S_0 mit stetiger Normale, die der Kreisringfläche topologisch äquivalent ist, zur Begrenzung hat und daß die Richtungskosinus der Normale einer H-Bedingung genügen. Die Komponenten des Wirbelvektors

$$(54') \qquad \xi_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w_0}{\partial b} - \frac{\partial v_0}{\partial c}\right), \quad \eta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial c} - \frac{\partial w_0}{\partial a}\right), \quad \zeta_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_0}{\partial a} - \frac{\partial u_0}{\partial b}\right)$$

sind in $T_0 + S_0$ stetig und erfüllen daselbst eine H-Bedingung[84]). Außerhalb von T_0 sind die Komponenten des Wirbelvektors gleich Null, die Bewegung ist wirbelfrei. Wir haben gezeigt, daß es eine und nur eine Lösung der hydrodynamischen Gleichungen gibt,

$$5') \quad \frac{dx}{dt} = u = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w = w(x, y, z, t),$$

$$x = a, \; y = b, \; z = c; \quad u = u_0, \; v = v_0, \; w = w_0 \quad \text{für} \quad t = t_0,$$

die folgenden Bedingungen genügt. Die Funktionen u, v, w sind stetig und verschwinden im Unendlichen wie $O(R^{-2})$. Ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung existieren sowohl in dem Bereiche $T + S$, dem Bilde von $T_0 + S_0$ im Raume x, y, z, als auch in seinem Komplementärbereiche, die Randfläche S allemal eingeschlossen, verhalten sich daselbst stetig und

---

[84]) In der ersten Abhandlung ist darüber hinaus vorausgesetzt worden, daß S_0 stetig gekrümmt ist und überdies eine weitere einschränkende Bedingung erfüllt. Die Voraussetzungen des Textes entsprechen den in der vorliegenden Abhandlung durchgehend benutzten Annahmen.

genügen einer H-Bedingung. Sie können sich auf S sprungweise ändern. Im Unendlichen verschwinden $\frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial z}$ wie $O(R^{-3})$.

Wie wir wissen, ist

$$x = a + \int_{t_0}^{t} u\,dt, \quad y = b + \int_{t_0}^{t} v\,dt, \quad z = c + \int_{t_0}^{t} w\,dt,$$

$$u = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau',$$

$$v = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\zeta'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int_T \frac{1}{r}\xi'\,d\tau', \tag{56'}$$

$$w = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y}\int_T \frac{1}{r}\xi'\,d\tau' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial x}\int_T \frac{1}{r}\eta'\,d\tau',$$

$$\xi = \frac{\partial x}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x}{\partial c}\zeta_0,$$

$$\eta = \frac{\partial y}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial y}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial y}{\partial c}\zeta_0, \tag{57'}$$

$$\zeta = \frac{\partial z}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial z}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial z}{\partial c}\zeta_0.$$

Wir ändern jetzt die Anfangsbedingungen, indem wir u_0, v_0, w_0, ξ_0, η_0, ζ_0 durch ähnlich beschaffene Funktionen $\check{u}_0, \check{v}_0, \check{w}_0$; $\check{\xi}_0, \check{\eta}_0, \check{\zeta}_0$, zugleich S_0, T_0 entsprechend durch $\check{S}_0$ und $\check{T}_0$ ersetzen.

Die neue Bewegung ist durch Gleichungen bestimmt, die sich aus (56') und (57') dadurch ergeben, daß man für $x, y, z, u, v, w, \ldots$ allemal $\check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{u}, \check{v}, \check{w}, \ldots$ schreibt.

Wir denken uns $\check{T}_0$ durch Gleichungen von der Form

$$\check{a} = a + \mathfrak{A}(a, b, c), \quad \check{b} = b + \mathfrak{B}(a, b, c), \quad \check{c} = c + \mathfrak{C}(a, b, c) \tag{58'}$$

topologisch auf T_0 abgebildet und nehmen an, daß die Funktionen $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ nebst ihren partiellen Ableitungen erster Ordnung stetig sind und daß $\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}, \ldots, \frac{\partial \mathfrak{C}}{\partial c}$ einer H-Bedingung genügen. Es gelten ferner Ungleichheitsbeziehungen von der Form

$$|\mathfrak{A}|, \ldots; \quad \left|\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \sigma, \quad \left|\left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \sigma\, d_{12}^{\lambda}, \tag{59'}$$

$$|\check{u}_0 - u_0|, \ldots \leqq \sigma, \quad \left|\frac{\partial \check{u}_0}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_0}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \sigma,$$

$$\left|\left(\frac{\partial \check{u}_0}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_0}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{u}_0}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_0}{\partial a}\right)^{(2)}\right| \leqq \sigma\, d_{12}^{\lambda}, \tag{60'}$$

unter σ einen hinreichend kleinen Wert, etwa $\sigma \leqq \sigma^*$ verstanden[85]).

[85]) Daß die Bereiche T_0 und $\check{T}_0$ aufeinander umkehrbar eindeutig und stetig bezogen sind, folgt, falls, wie vorausgesetzt wurde, σ^* hinreichend klein ist, bereits aus dem Bestehen der Ungleichheiten (59').

In (60′) bezeichnet beispielsweise $\check{u}_0$, ausführlich geschrieben, $u_0 = \check{u}_0(\check{a}, \check{b}, \check{c})$, den Wert der fraglichen Geschwindigkeitskomponente im Punkte $\check{a}, \check{b}, \check{c}$.

Durch die Betrachtungen der ersten Abhandlung (S. 93—116), sowie durch die diese wesentlich verallgemeinernden Untersuchungen des ersten Kapitels dieser Arbeit ist, wie man sich ohne weiteres überzeugt, die Existenz der Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen für ein Zeitintervall $\langle t_0, t_0 + \check{t}\rangle$ und alle den Beziehungen (58′), (59′), (60′) genügenden $\check{u}_0, \check{v}_0, \check{w}_0$ gleichmäßig, gesichert.

Es mögen also $\check{x}, \check{y}, \check{z}$ die Koordinaten des Teilchens $\check{a}, \check{b}, \check{c}$ zur Zeit t bezeichnen, seine Geschwindigkeitskomponenten seien $\check{u}, \check{v}, \check{w}$.

Durch (58′) wird augenscheinlich eine topologische Beziehung der zum selben Zeitpunkte gehörigen Bilder $\check{T}$ und T von $\check{T}_0$ und T_0 in den Räumen $\check{x}, \check{y}, \check{z}$ und x, y, z aufeinander festgelegt.

Wir behaupten: *Durch passende Wahl von $\mathfrak{O}$ läßt sich erreichen, daß für alle t in $\langle t_0, t_0 + \check{t}\rangle$ Ungleichheiten von der Form*

$$
\begin{aligned}
&|\check{x} - x|, \ldots \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial \check{x}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega;\\
&\left|\left(\frac{\partial \check{x}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{x}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda},\\
&|\check{u} - u|, \ldots \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} - \frac{\partial u}{\partial x}\right|, \ldots \leqq \Omega;\\
&\left|\left(\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}}\right]_{-} \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{u}}{\partial \check{x}} - \frac{\partial u}{\partial x}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}
\end{aligned}
\tag{61′}
$$

bestehen. In (61′) bezeichnet Ω eine beliebige hinreichend kleine Zahl, etwa $\Omega \leqq \Omega^*$.

Die Ungleichheiten (61′) *gelten für alle den Ungleichheiten* (59′), (60′) *genügenden $\check{u}_0, \check{v}_0, \check{w}_0$ gleichmäßig.* Dies ist die präzise Fassung unseres Satzes über die stetige Abhängigkeit des Bewegungszustandes von den Anfangsdaten bei dem hier betrachteten speziellen Bewegungsproblem.

Die Lösung $\check{x}, \check{y}, \check{z}; \check{u}, \check{v}, \check{w}$ bestimmt sich, wie die Lösung $x, y, z; u, v, w$, durch sukzessive Approximationen. Wir setzen in naheliegender Schreibweise

$$
\begin{aligned}
&\check{x}_{n+1} = \check{a} + \int_{t_0}^{t} \check{u}_{n+1}\, dt, \ldots,\\
&\check{u}_{n+1} = -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \check{z}_n}\int_{\check{T}_n} \frac{1}{\check{r}_n}\check{\eta}_n'\, d\check{\tau}_n' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial \check{y}_n}\int_{\check{T}_n} \frac{1}{\check{r}_n}\check{\zeta}_n'\, d\check{\tau}_n',\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\check{\xi}_n = \frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{a}}\check{\xi}_0 + \frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{b}}\check{\eta}_0 + \frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{c}}\check{\zeta}_0,\\
&\quad\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\tag{62′}
$$

mit $\check{x}_0 = \check{a}$, $\check{y}_0 = \check{b}$, $\check{z}_0 = \check{c}$, darum $\check{u}_1 = \check{u}_0$, $\check{v}_1 = \check{v}_0$, $\check{w}_1 = \check{w}_0$ und

$$
\begin{aligned}
x_{n+1} &= a + \int_{t_0}^{t} u_{n+1}\, dt, \ldots, \\
u_{n+1} &= -\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial z_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\eta_n' d\tau_n' + \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial y_n}\int_{T_n}\frac{1}{r_n}\zeta_n' d\tau_n', \qquad (63') \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi_n &= \frac{\partial x_n}{\partial a}\xi_0 + \frac{\partial x_n}{\partial b}\eta_0 + \frac{\partial x_n}{\partial c}\zeta_0, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

mit $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$, mithin $u_1 = u_0$, $v_1 = v_0$, $w_1 = w_0$.

Die unendlichen Reihen

$$
\begin{aligned}
&\check{u}_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(\check{u}_{n+1} - \check{u}_n), \ldots; \qquad \check{x}_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(\check{x}_{n+1} - \check{x}_n), \ldots; \\
&u_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(u_{n+1} - u_n), \ldots; \qquad x_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(x_1 - x_0), \ldots
\end{aligned} \qquad (64')
$$

konvergieren für alle t in $\langle t_0, t_0 + \check{t}\rangle$ wie geometrische Reihen. Das gleiche gilt, wie wir wissen, für die Reihen, die man durch gliedweise Differentiation in bezug auf die Ortsvariablen erhält.

Wir nehmen jetzt an, für alle hinreichend kleinen σ, alle $n \leqq l$ und alle t in einem Intervalle $\langle t_0, t_0 + \check{\check{t}}\rangle$ $\check{\check{t}} \leqq \check{t}$ sei

$$
\begin{aligned}
&|\check{x}_n - x_n|, \ldots \leqq \Omega, \quad \left|\frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x_n}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega, \\
&\left|\left(\frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x_n}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{x}_n}{\partial \check{a}} - \frac{\partial a_n}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\check{\check{}}}.
\end{aligned} \qquad (65')
$$

Den wiederholt gebrauchten neuen Hilfssätzen der Potentialtheorie zufolge ist wegen (62′) und (63′)

$$
\begin{aligned}
&|\check{u}_{n+1} - u_{n+1}|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{35}\Omega; \quad \left|\frac{\partial \check{u}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{35}\Omega; \\
&\left|\left(\frac{\partial \check{u}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{u}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial u_{n+1}}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \mathfrak{h}_{35}\Omega\, d_{12}^{\check{\check{}}}
\end{aligned} \qquad (66')
$$

worin $\mathfrak{h}_{35}$ eine für alle (59′), (60′) genügenden $\check{u}_0$, $\check{v}_0$, $\check{w}_0$ gleichmäßig gültige Konstante bezeichnet[86]). Wegen (59′), (62′) und (63′) ist

$$
\begin{aligned}
&|\check{x}_{n+1} - x_{n+1}|, \ldots \leqq \sigma + |t - t_0|\,\mathfrak{h}_{35}\Omega; \\
&\left|\frac{\partial \check{x}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right|, \ldots \leqq |t - t_0|\,\mathfrak{h}_{35}\Omega, \\
&\left|\left(\frac{\partial \check{x}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \check{x}_{n+1}}{\partial \check{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq |t - t_0|\,\mathfrak{h}_{35}\Omega\, d_{12}^{\check{\check{}}}
\end{aligned} \qquad (67')
$$

[86]) Vgl. die erste Abhandlung, S. 105—107, wo sich ganz analoge Betrachtungen finden. Für $\check{T}_n$ und T_n treten dort Bereiche T_{n+1} und T_n ein.

Setzt man etwa

$$(68') \qquad \mathfrak{O} \leqq \frac{1}{2}\Omega \quad \text{und} \quad \overset{\vee}{t} \leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2\,\mathfrak{b}_{35}}, \overset{\vee}{t}, 1\right),$$

so findet man offenbar

$$(69') \qquad \begin{gathered} |\overset{\vee}{x}_{n+1} - x_{n+1}|, \ldots \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial \overset{\vee}{x}_{n+1}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega; \\ \left|\left(\frac{\partial \overset{\vee}{x}_{n+1}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \overset{\vee}{x}_{n+1}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x_{n+1}}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Die Beziehungen (65′) gelten also auch für $n = l+1$. Augenscheinlich gelten sie wegen (58′), (59′), (60′) für $n = 1$ mit

$$(70') \quad x_1 = a + \int_{t_0}^{t} u_1\, dt = a + \int_{t_0}^{t} u_0\, dt, \ldots; \quad \overset{\vee}{x}_1 = \overset{\vee}{a} + \int_{t_0}^{t} \overset{\vee}{u}_1\, dt = \overset{\vee}{a} + \int_{t_0}^{t} \overset{\vee}{u}\, dt, \ldots,$$

sofern wir auch noch $\overset{\vee}{t} \leqq 1$ annehmen. Sie gelten also für alle n, darum in der Grenze auch für

$$(71') \quad \overset{\vee}{x} - x = \lim_{n\to\infty}(\overset{\vee}{x}_n - x_n), \ldots; \quad \overset{\vee}{u} - u = \lim_{n\to\infty}(\overset{\vee}{u}_n - u_n), \ldots; \quad \ldots.$$

Wir finden demnach als Resultat den Satz:

Wählt man den mit dem Zustande a, b, c; u_0, v_0, w_0 zu vergleichenden Anfangszustand $\overset{\vee}{a}, \overset{\vee}{b}, \overset{\vee}{c}$; $\overset{\vee}{u}_0, \overset{\vee}{v}_0, \overset{\vee}{w}$ irgendwie den Ungleichheiten (59′), (60′) *mit $\mathfrak{O} \leqq \frac{1}{2}\Omega$ gemäß, so finden wir für alle t in dem festen Intervall $\langle t_0, t_0 + \overset{\vee}{t}\rangle$, $\overset{\vee}{t} = \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2\,\mathfrak{b}_{35}}, 1, \overset{\vee}{t}\right)$ die Beziehungen*

$$(72') \qquad \begin{gathered} |\overset{\vee}{x} - x|, \ldots \leqq \Omega; \quad \left|\frac{\partial \overset{\vee}{x}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right|, \ldots \leqq \Omega; \\ \left|\left(\frac{\partial \overset{\vee}{x}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(1)} - \left(\frac{\partial \overset{\vee}{x}}{\partial \overset{\vee}{a}} - \frac{\partial x}{\partial a}\right)^{(2)}\right|, \ldots \leqq \Omega\, d_{12}^{\lambda}. \end{gathered}$$

Es ist einleuchtend, daß sich durch geeignete Verkleinerung von $\mathfrak{O}$ erreichen läßt, daß die Beziehungen (72′) für alle t in $\langle t_0, t_0 + \overset{\vee}{t}\rangle$ gelten. Man sieht dies ein, indem man dieses Intervall in eine (endliche Anzahl) Teile $\leqq \operatorname{Min}\left(\frac{1}{2\,\mathfrak{b}_{35}}, 1, \overset{\vee}{t}\right)$ zerlegt.

Schlußbemerkungen.

Wie ich neuerdings bemerkt habe, läßt sich auch bei nichthomogenen, inkompressiblen Flüssigkeiten der Druck eliminieren, wodurch der Existenzbeweis der Lösung der im vorstehenden behandelten Bewegungsprobleme wesentlich einfacher und übersichtlicher wird. In einer später erscheinenden dritten Abhandlung werde ich auf die neue Transformation der hydrodynamischen Gleichungen und die hierdurch bedingte Modifikation des Existenzbeweises kurz eingehen.

Berlin, den 22. Oktober 1925.

(Eingegangen am 22. Oktober 1925.)

Über den absoluten Betrag von Polynomen, welche auf einer Punktmenge gleichmäßig beschränkt sind.

Von

M. Fekete in Budapest.

Einleitung.

Es sei M eine beliebige beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge in der komplexen z-Ebene, z_0 ein beliebiger Punkt dieser Ebene, der nicht notwendigerweise M angehört. Man betrachte die Klasse $E_n = E_n(M)$ derjenigen Polynome von höchstens n-tem Grade, welche auf der Menge M dem Betrage nach $\leqq 1$ sind. Es bezeichne $\omega_n = \omega_n(M, z_0)$ die obere Grenze von $|f'(z_0)|$ für die Polynome $f(z)$ aus der Klasse E_n. Es gibt unter diesen Polynomen solche, für welche der Betrag der Ableitung im Punkte z_0 diese obere Grenze erreicht; sie ist also das Maximum der fraglichen Werte $|f'(z_0)|$.

Herr Szegö hat in seinem Aufsatze „Über einen Satz von A. Markoff" das Verhalten dieser Zahlen ω_n für große Werte von n untersucht[1]) und u. a. den folgenden interessanten Satz bewiesen[2]):

Ist der transfinite Durchmesser[3]) *der Punktmenge M positiv, so ist für irgendeinen Punkt* z_0

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)} < \infty.$$

Herr Szegö bedient sich beim Beweise dieses Satzes der von ihm gefundenen potentialtheoretischen Bedeutung des transfiniten Durchmessers von beliebigen Punktmengen[4]).

---

[1]) Math. Zeitschrift 23 (1925), S. 45—61.

[2]) A. a. O. [1]), S. 57, Satz II.

[3]) Vgl. dazu M. Fekete, Über die Verteilung der Wurzeln usw., Math. Zeitschrift 17 (1923), S. 228—249, Satz I und Bemerkung, S. 230—231.

[4]) G. Szegö, Bemerkungen zu einer Arbeit von Herrn M. Fekete usw., Math. Zeitschrift 21 (1924), S. 203—208, Satz, S. 204—205.

In der vorliegenden Note werde ich den Szegöschen Satz ohne Hinzuziehung potentialtheoretischer oder anderer höherer Hilfsmittel, auf völlig elementarem Wege, unmittelbar auf Grund der Definition des transfiniten Durchmessers herleiten. Die hier angewandte einfache Methode führt mich auch viel weiter: zu wesentlicher Verschärfung und Ergänzung des oben zitierten Satzes, jedoch unter der Beschränkung, daß der Punkt z_0, wo das Anwachsen der Zahlen $\omega_n(M, z_0)$ bei unendlich wachsendem n untersucht wird, nicht der Menge M angehört. Dies vorausgesetzt, beweise ich 1° *die Existenz des Grenzwertes* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)} = \omega(M, z_0)$ *für beliebige Punktmengen*, 2° *die Endlichkeit oder Unendlichkeit von* $\omega(M, z_0)$, *je nachdem der transfinite Durchmesser von* M *größer oder gleich Null ist.*

Zu allen diesen Ergebnissen gelange ich auf einem Umwege, indem ich zuerst die — auch an sich interessante — Frage löse: Bezeichnet $\alpha_n = \alpha_n(M, z_0)$ die obere Grenze von $|f(z_0)|$ für die Gesamtheit aller Polynome $f(z)$ aus E_n, wie wachsen die Zahlen $\sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)}$ bei unendlich wachsendem n, falls z_0 M nicht angehört? Meine Lösung lautet:

1. *Es existiert* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} = \alpha(M, z_0)$ *für beliebige* M.

2. *Der Grenzwert* $\alpha(M, z_0)$ *ist* $<$ *oder* $= \infty$, *je nachdem der transfinite Durchmesser von* $M >$ *oder* $= 0$ *ist.*

Von diesen Resultaten zu den oben angeführten bildet die folgende Tatsache die Brücke:

Ist M *eine beliebige Menge der charakterisierten Art und* z_0 *ein beliebiger Punkt, der* M *nicht angehört, so besteht die Grenzwertgleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)}.$$

Die Auswertung der nach dieser Gleichung einander gleichen Größen $\alpha(M, z_0)$, $\omega(M, z_0)$ für allgemeine Mengen M von positivem transfiniten Durchmesser scheint auf große Schwierigkeiten zu führen. Mir gelang diese Auswertung bisher nur im Falle, wo die Komplementärmenge von M ein einfach zusammenhängendes Gebiet G ist. Bedeutet

$$w = \psi(z) = cz + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \cdots \qquad (c > 0)$$

diejenige eindeutig bestimmte Funktion, welche das Gebiet G auf das Kreisäußere $|w| > 1$ in der w-Ebene schlicht abbildet, während die Punkte $z = \infty$ und $w = \infty$ einander entsprechen und ein beliebiges Linienelement im unendlich fernen Punkt keine Drehung erfährt, so folgere ich — mit

Hilfe einer von Herrn Szegö bewiesenen Eigenschaft der zur Kurve M gehörigen Faberschen Polynome — *die Gleichung*

$$\alpha(M, z_0) = \underset{\sim}{\omega}(M, z_0) = |\psi(z_0)|.$$

Um eine vollständige Übersicht in dieser Einleitung über den Inhalt der vorliegenden Note zu geben, erwähne ich noch den Anhang, wo die Nullstellenverteilung bzw. der Zusammenhang derjenigen Polynome untersucht wird, deren Betrag in einem nicht zur Menge M angehörenden Punkte z_0 möglichst groß ausfällt, wenn sämtliche Polynome der Klasse E_n zugelassen werden. Ich zeige, daß die fraglichen Polynome

1° *für kein n eine Nullstelle besitzen können, welche außerhalb des kleinsten, die Menge M enthaltenden, in bezug auf z_0 kreiskonvexen Bereiches liegt, und*

2° *für jedes feste n bis auf einen numerischen Faktor vom Betrage Eins miteinander übereinstimmen.*

§ 1.

Hilfsbetrachtungen.

Es bezeichne hier und im folgenden M eine beschränkte und abgeschlossene unendliche Punktmenge der z-Ebene. Wir wollen zunächst an den Begriff des transfiniten Durchmessers einer solchen Punktmenge erinnern.

Es sei $V_n = V_n(M)$ der größte Wert, den der Betrag der Vandermondeschen Determinante

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \prod_{\substack{\varkappa, \lambda \\ \varkappa < \lambda}}^{n} (z_\varkappa - z_\lambda) \qquad (n \geqq 2)$$

der n Größen z_ν annehmen kann, während diese unabhängig voneinander sämtliche Punkte von M durchlaufen. Man setze $d_n = \sqrt[n(n-1)]{V_n}$. *Dann konvergiert die Folge der „Durchmesser"*

$$d_2, d_3, \ldots, d_n, \ldots$$

bei unendlich wachsendem n (monoton abnehmend) gegen einen nichtnegativen Wert $d = d(M)$, den transfiniten Durchmesser von M. [5])

Der transfinite Durchmesser kann noch als der Grenzwert einer anderen, der Menge M assoziierten Folge betrachtet werden. Sei nämlich $t_n(z)$ das zu M gehörige n-te Tschebyscheffsche Polynom, d. h. dasjenige Polynom n-ten Grades, dessen höchstes Glied z^n ist und dessen Maximalbetrag auf M unter allen Polynomen mit dem höchsten Gliede z^n

[5]) A. a. O. [3]).

möglichst klein ausfällt. Bezeichnet m_n den Maximalbetrag von $t_n(z)$ und $\varrho_n = \sqrt[n]{m_n}$ den *mittleren Radius* der Lemniskatenfläche

$$|t_n(z)| \leqq m_n,$$

die die Menge M *überdeckt, dann konvergieren die Zahlen*

$$\varrho_1, \varrho_2, \ldots, \varrho_n, \ldots$$

bei unendlich wachsendem n *gegen* $d(M)$. [6])

Bezeichnet man mit $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ $(n \geqq 2)$ eine solche Punktgruppe G_n aus M, für welche $|V(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})| = V_n$, und ist z irgendein Punkt von M, so folgt aus der Definition von V_n, daß

$$(1) \qquad \left| \frac{V(z_1^{(n)}, \ldots, z_{i-1}^{(n)}, z, z_{i+1}^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})}{V(z_1^{(n)}, \ldots, z_{i-1}^{(n)}, z_i^{(n)}, z_{i+1}^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})} \right| \leqq 1 \quad (i = 1, 2, \ldots n)$$

ist. Setzt man also

$$(2) \qquad l_n(z) = (z - z_1^{(n)})(z - z_2^{(n)}) \ldots (z - z_n^{(n)})$$

und

$$(3) \qquad l_{i,n}(z) = \frac{l_n(z)}{(z - z_i^{(n)})\, l_n'(z_i^{(n)})} \qquad \text{für } i = 1, 2, \ldots, n,$$

so entsteht aus (1) die äquivalente Ungleichung

$$(4) \qquad |l_{i,n}(z)| \leqq 1,$$

wobei z der Menge M angehört und $1 \leqq i \leqq n$ ist; eine Beziehung, welche die besondere Bedeutung der Punktgruppe G_n bei der Lagrangeschen Interpolation auf M zeigt und auch für unsere Betrachtungen von großer Wichtigkeit ist.

Nach der Definitionsgleichung (3) ist

$$l_{i,n}(z_i^{(n)}) = 1,$$

also nach (2) und (4) ist

$$(5) \qquad L_{i,n}(z) = \frac{l_n(z)}{z - z_i^{(n)}}$$

ein Polynom $(n-1)$-ten Grades, dessen höchstes Glied z^{n-1} und dessen Maximalbetrag auf M dem Werte $|l_n'(z_i^{(n)})|$ gleich ist. Da aber der Maximalbetrag m_{n-1} des zu M gehörigen $(n-1)$-ten Tschebyscheffschen Polynoms per definitionem das Minimum der Maximalbeträge für die Polynome mit höchstem Gliede z^{n-1} darstellt, so ist für jedes $n \geqq 2$ und für $i \geqq 1, \leqq n$

$$(6) \qquad |l_n'(z_i^{(n)})| \geqq m_{n-1}.$$

[6]) A. a. O. [3]) Satz II und III, S. 233—234.

Bevor wir diese Tatsache zu unserem Zwecke verwenden, stellen wir ihr eine andere zur Seite, welche eine obere Abschätzung für den kleinsten unter den Werten $|l_n'(z_1^{(n)})|, |l_n'(z_2^{(n)})|, \ldots, |l_n'(z_n^{(n)})|$ feststellt. Sei z. B. $|l_n'(z_1^{(n)})|$ dieser kleinste Wert. Dann gilt offenbar die Beziehung

$$|l_n'(z_1^{(n)})|^n \leqq |l_n'(z_1^{(n)})\, l_n'(z_2^{(n)}) \ldots l_n'(z_n^{(n)})| = |V(z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)})|^2,$$

also ist nach der Definition der Größen $z_i^{(n)}$, V_n, d_n

$$|l_n'(z_1^{(n)})|^n \leqq V_n^2 = d_n^{n(n-1)}$$

und daher

$$|l_n'(z_1^{(n)})| \leqq d_n^{n-1}. \tag{7}$$

§ 2.

Über das Maximum des Betrages der Polynome der Klasse $E_n(M)$ in einem gegebenen Punkte außerhalb von M.

Sei z_0 ein beliebiger, doch fester Punkt, der nicht der Menge M angehört. Bezeichne — wie in der Einleitung — $\alpha_n = \alpha_n(M, z_0)$ die obere Grenze von $|f(z_0)|$ für die Gesamtheit aller Polynome $f(z)$ aus $E_n(M)$. Sie wird für geeignete Polynome aus E_n erreicht, bildet also das Maximum der fraglichen Beträge. Leicht ersichtlich ist $\alpha_n \geqq \alpha_{n-1}$, $\alpha_n \geqq 1$. Jedes Polynom $f(z)$ aus E_n läßt sich durch die Lagrangesche Interpolationsformel folgenderweise darstellen:

$$f(z) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} f(z_i^{(n+1)})\, l_{i,n+1}(z) \equiv \sum_{i=1}^{n+1} f(z_i^{(n+1)})\, \frac{L_{i,n+1}(z)}{l_{n+1}'(z_i^{(n+1)})}, \tag{8}$$

wobei die Punkte $z_i^{(n+1)}$, $i = 1, 2, \ldots, n+1$, eine solche Punktgruppe G_{n+1} aus M bilden, für welche $|V(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})|$ den größtmöglichen Wert V_{n+1} auf M erreicht. Dann gilt für die Grundpolynome (3) der Interpolation (8) nach den Ergebnissen des vorangehenden Paragraphen — mutatis mutandis — die Beziehung (6) für jeden Punkt von G_{n+1}. Danach ist, auf Grund von (8),

$$|f(z_0)| \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|L_{i,n+1}(z_0)|}{m_n},$$

folglich ist, gemäß (5),

$$|f(z_0)| \leqq \frac{1}{m_n} \sum_{i=1}^{n+1} \frac{|l_{n+1}(z_0)|}{|z_0 - z_i^{(n+1)}|}. \tag{9}$$

Bezeichnet Δ den größten Abstand des Punktes z_0 von den Punkten der Menge M, so folgt aus (2) und (9)

$$|f(z_0)| \leqq \frac{(n+1)\Delta^n}{m_n}.$$

Daher ist, mit Hinsicht auf die Definition der Größen α_n und ϱ_n,

$$\alpha_n \leqq (n+1)\left(\frac{\Delta}{\varrho_n}\right)^n. \tag{10}$$

Daraus folgt unmittelbar der Hilfssatz:

I. *Ist der transfinite Durchmesser* $d = d(M) = \lim_{n\to\infty} \varrho_n$ *positiv, so gilt die Grenzwertbeziehung:*

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \leqq \frac{\Delta}{d} < \infty. \tag{11}$$

Umgekehrt erhält man durch Anwendung der Beziehungen (2), (3), (4) und (7) des ersten Paragraphen den Satz:

II. *Ist der transfinite Durchmesser* $d = d(M) = \lim_{n\to\infty} d_n$ *gleich Null, so besteht die Grenzwertgleichung*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \infty. \tag{12}$$

In der Tat, die durch (2) und (3) definierten Polynome

$$l_{1,\,n+1}(z),\ l_{2,\,n+1}(z), \ldots, l_{n+1,\,n+1}(z)$$

von n-tem Grade sind nach (4) überall auf M dem Betrage nach $\leqq 1$, also gehören sie sämtlich zur Klasse E_n. Anderseits gilt für mindestens einen Wert von i nach (7) die Relation:

$$|l'_{n+1}(z_i^{(n+1)})| \leqq d_{n+1}^n.$$

Für ein solches i besteht nach (3) und (2)

$$|l_{i,\,n+1}(z_0)| = \left|\frac{l_{n+1}(z_0)}{(z_0 - z_i^{(n+1)})\, l'_{n+1}(z_i^{(n+1)})}\right| \geqq \left(\frac{\delta}{d_{n+1}}\right)^n, \tag{13}$$

falls δ den kleinsten Abstand des Punktes z_0 von den Punkten der Menge M bedeutet. Daraus folgt

$$\alpha_n \geqq \left(\frac{\delta}{d_{n+1}}\right)^n$$

und somit, mit Hinsicht auf die Voraussetzung $d = \lim_{n\to\infty} d_n = 0$, die behauptete Gleichung (12).

Um die eingangs erwähnte Existenz des Grenzwertes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}$ auch im Falle zu beweisen, wo der transfinite Durchmesser der Menge positiv

ist — also zufolge des Hilfssatzes I dieser Grenzwert nur endlich aus fallen kann — genügt es zu zeigen, daß $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \geqq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}$ ist.

Zu diesem Zwecke setzen wir $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha$. Offenbar ist $\alpha \geqq 1$. Sei ε eine beliebige positive Größe $< \alpha$, dann existiert ein solches $n = n(\varepsilon)$, für welches

$$n \geqq 2 \quad \text{und} \quad \alpha_n > (\alpha - \varepsilon)^n$$

besteht. Sei $\varphi_n(z)$ ein solches Polynom aus E_n, dessen Betrag im Punkte z_0 gleich α_n ist. Ist nun k irgendeine positive ganze Zahl und l eine ganze Zahl $\geqq 0$, $\leqq n-1$, so besteht auf M die Ungleichung

$$\left|\varphi_n(z)^k \left(\frac{z-c}{p}\right)^l\right| \leqq 1,$$

wobei c eine von z_0 verschiedene komplexe Größe, $p = p(M, c)$ aber eine geeignete positive Zahl bedeutet, während

$$\left|\varphi_n(z_0)^k \left(\frac{z_0-c}{p}\right)^l\right| = \alpha_n^k \left|\frac{z_0-c}{p}\right|^l > (\alpha-\varepsilon)^{kn} \left|\frac{z_0-c}{p}\right|^l$$

und daher

$$\alpha_{nk+l} > (\alpha-\varepsilon)^{kn} \left|\frac{z_0-c}{p}\right|^l \tag{14}$$

ist. Aus (14) folgt

$$\liminf_{\nu\to\infty} \sqrt[\nu]{\alpha_\nu} \geqq \alpha - \varepsilon$$

für beliebig kleines positive ε, also auch die zu beweisende Relation

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} \geqq \alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}.$$

Wir haben also bewiesen:

III. *Ist der transfinite Durchmesser der Menge M positiv, so streben die Zahlen $\sqrt[n]{\alpha_n}$ für $n\to\infty$ gegen einen endlichen Grenzwert $\alpha = \alpha(M, z_0)$.*

Die Sätze II und III werden wir im folgenden Paragraphen zur Ableitung der analogen Sätze über die Größen $\sqrt[n]{\omega_n}$ anwenden. Hier wollen wir aus III eine auch an sich bemerkenswerte Folgerung ziehen, welche auf die Polynome (2) ein neues Licht wirft.

Nach (9) ist

$$\alpha_n \leqq \frac{|l_{n+1}(z_0)|}{m_n} \cdot \frac{n+1}{\delta}, \tag{15}$$

wobei α_n, m_n und δ die Bedeutung haben, wie oben.

Anderseits folgt aus (13) und (7)

$$\alpha_n \geqq \frac{|l_{n+1}(z_0)|}{\Delta\, d_{n+1}^n}, \tag{16}$$

falls auch Δ und d_{n+1} ihre frühere Bedeutung beibehalten.

Die beiden Beziehungen (15) und (16) fassen wir in der Relation

$$\frac{\delta}{n+1}\,\alpha_n\, m_n \leqq |l_{n+1}(z_0)| \leqq \Delta\,\alpha_n\, d_{n+1}^n$$

zusammen. Ist $d = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{m_n} = \lim\limits_{n\to\infty} d_{n+1}$, so folgt aus dieser Relation mit Hinsicht auf III die Grenzwertgleichung

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n+1]{|l_{n+1}(z_0)|} = \alpha\, d\,.$$

Wir können also den Satz aussprechen:

IV. *Ist der transfinite Durchmesser d einer Menge M positiv und erreicht der Betrag der Vandermondeschen Determinante $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ für die Punkte $z_i = z_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ von M den größten Wert, dessen er fähig ist, falls $z_1, \ldots, z_n$ unabhängig voneinander M durchlaufen, so existiert der Grenzwert* $\lim \sqrt[n]{|z_0 - z_1^{(n)}| \ldots |z_0 - z_n^{(n)}|}$ *für jeden Punkt z_0, der nicht M angehört, und er ist proportional dem Werte d. Der Proportionalitätsfaktor hängt von M und z_0 ab und ist gleich dem Grenzwerte* $\alpha = \lim \sqrt[n]{\alpha_n}$.

§ 3.

Über das Maximum des Betrages der Ableitung der Polynome der Klasse E_n (M).

Sei M eine Punktmenge der z-Ebene (wie bisher) und z_0 ein beliebig vorgeschriebener Punkt dieser Ebene, der nicht der Menge M angehört. Bezeichne $\omega_n = \omega_n(M, z_0)$ — wie eingangs schon erwähnt — das Maximum von $|f'(z_0)|$ für die Gesamtheit aller Polynome $f(z)$ der Klasse E_n. Im vorliegenden Paragraphen wollen wir zunächst den wichtigen Zusammenhang zwischen den Größen ω_n und α_n herleiten, der in der Grenzwertgleichung

$$\lim \sqrt[n]{\omega_n} = \lim \sqrt[n]{\alpha_n} \tag{17}$$

seinen Ausdruck findet. Zu diesem Zweck beweisen wir zuerst folgendes:

V. *Haben M, z_0, α_n, ω_n die oben angegebene Bedeutung, so besteht die Beziehung*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n} \geqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha \qquad (\alpha \geqq 1). \tag{18}$$

Es sei $\beta < \alpha$, > 0 und $\sqrt[n]{\alpha_n} > \beta$, für $n = n(\beta)$. Bezeichne $\varphi_n(z)$ — wie früher — ein solches Polynom aus E_n, dessen Betrag im Punkte z_0 gleich α_n ist. Ist k eine beliebige positive ganze Zahl und l eine ganze Zahl $\geqq 1$, $\leqq n$, ferner c eine von z_0 verschiedene komplexe Größe, endlich p eine von M und c abhängende geeignete positive Zahl, so gilt für jeden Punkt z von M die Ungleichung

$$\left| \varphi_n(z)^k \left(\frac{z-c}{p}\right)^l \right| \leqq 1,$$

während die Ableitung des Produktes $\varphi_n(z)^k \left(\frac{z-c}{p}\right)^l$ im Punkte z_0 der Ungleichung

$$\left| \frac{d}{dz}\left\{ \varphi_n(z)^k \left(\frac{z-c}{p}\right)^l \right\}_{z=z_0} \right| = \left| \varphi_n(z_0)^k \left(\frac{z_0-c}{p}\right)^l \right| \left| \frac{k\varphi_n'(z_0)}{\varphi_n(z_0)} + \frac{l}{z_0-c} \right|$$
$$\geqq \beta^{nk} \left|\frac{z_0-c}{p}\right|^l \left| \frac{k\varphi_n'(z_0)}{\varphi_n(z_0)} + \frac{l}{z_0-c} \right|$$

genügt. Daraus folgt

$$\omega_{nk+l} \geqq \beta^{nk} \left|\frac{z_0-c}{p}\right|^l \left| \frac{k\varphi_n'(z_0)}{\varphi_n(z_0)} + \frac{l}{z_0-c} \right|,$$

aus dieser Relation aber — da der dritte Faktor rechts höchstens für n Werte von k verschwindet — die Ungleichung

$$\liminf_{\nu \to \infty} \sqrt[\nu]{\omega_\nu} \geqq \beta$$

und somit — da β beliebig nahe zu α gewählt werden kann — die behauptete Beziehung (18).

Im Falle, wo $\alpha = \infty$ (also nach III der transfinite Durchmesser d von M notwendigerweise $= 0$) ist, folgt die Grenzwertgleichung (17) unmittelbar aus (18). Um sie auch für den Fall $\alpha < \infty$, $d > 0$ zu beweisen, stellen wir die Polynome $f(z)$ der Klasse E_n wiederum durch die Formel (8) dar. Für die Ableitung ergibt sich daraus die Gleichung

$$f'(z_0) = \sum_{i=1}^{n+1} f(z_i^{(n+1)})\, l_{i,n+1}'(z_0),$$

daher ist

$$|f'(z_0)| \leqq \sum_{i=1}^{n+1} |l_{i,n+1}'(z_0)|. \tag{19}$$

Man beachte nun, daß nach (2) und (3)

$$|l_{i,n+1}'(z_0)| = |l_{i,n+1}(z_0)| \left| \frac{1}{z_0 - z_1^{(n+1)}} + \ldots + \frac{1}{z_0 - z_{i-1}^{(n+1)}} + \frac{1}{z_0 - z_{i+1}^{(n+1)}} + \ldots \right.$$
$$\left. + \frac{1}{z_0 - z_{n+1}^{(n+1)}} \right| \leqq |l_{i,n+1}(z_0)| \cdot \frac{n}{\delta} \tag{20}$$

ist, wobei δ seine frühere Bedeutung hat, während für das Polynom $l_{i,n+1}(z)$ auf M die Beziehung (4), also für $z = z_0$ die Ungleichung

$$|l_{i,n+1}(z_0)| \leqq \alpha_n \tag{21}$$

gilt.

Aus (19), (20) und (21) folgt

$$|f'(z_0) \leqq \frac{n(n+1)}{\delta} \alpha_n.$$

Daher ist

$$\omega_n \leqq \frac{n(n+1)}{\delta} \alpha_n$$

und folglich

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n} \leqq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n} = \alpha.$$

Diese Relation, vereint mit der Beziehung (18), führt zur Gleichung (17). Wir haben also bewiesen:

VI. *Ist z_0 ein beliebiger Punkt, der nicht M angehört, so besteht*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n},$$

wie auch der transfinite Durchmesser $d = d(M)$ ausfallen mag.

Verknüpft man diesen Satz mit II und III, so erhält man die folgenden Resultate über das Anwachsen der Größen ω_n:

VII. *Sei der transfinite Durchmesser der Menge M positiv. Dann streben die Zahlen $\sqrt[n]{\omega_n}$ mit wachsendem n für jeden M nicht angehörenden Punkt z_0 gegen einen endlichen Grenzwert $\omega = \omega(M, z_0)$.*

VIII. *Ist der transfinite Durchmesser von M gleich Null, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega(z_0)} = \infty,$$

falls z_0 der Menge M nicht angehört.

Bisher haben wir das Verhalten der Folgen $\{\alpha_n(M, z_0)\}$ und $\{\omega_n(M, z_0)\}$ nur unter der Voraussetzung untersucht, daß z_0 nicht der Menge M angehört. Sei nun z_0 ein Punkt von M. Dann kann man von den Größen α_n folgendes behaupten:

IX. *Mag der transfinite Durchmesser von M positiv ausfallen oder verschwinden, der Grenzwert $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n}$ existiert jedenfalls und ist $= 1$.*

Es ist ja für jeden Punkt z_0 von M und für jedes n

$$\alpha_n(M, z_0) = 1,$$

da doch $f(z) \equiv 1$ der Klasse $E_n(M)$ angehört und $\alpha_n(M, z_0)$ den Wert Eins nicht übertreffen kann[7]).

Einen allgemein gültigen Beitrag zur Kenntnis der Folge $\{\omega_n\}$ im Punkte von M leistet die Relation (18)

$$\liminf \sqrt[n]{\omega_n} \geqq \lim \sqrt[n]{\alpha_n},$$

deren oben gegebener Beweis auch für die zu M gehörigen Punkte z_0 gültig bleibt.

Ein Gegenstück zu dieser unteren Abschätzung der Zahlen ω_n bildet der eingangs angeführte Szegösche Satz, welcher das Anwachsen derselben von oben abschätzt, jedoch unter der Voraussetzung, daß der transfinite Durchmesser d von M positiv ist. Es folge hier ein einfacher Beweis dieses Satzes, d. h. der Relation

$$\limsup \sqrt[n]{\omega_n} < \infty;$$

wir können und werden uns dabei auf den Fall beschränken, wo z_0 M angehört, da der Fall, wo z_0 einen Punkt der Komplementärmenge von M bildet, durch III erledigt wurde. Ist $f(z)$ irgendein Polynom der Klasse $E_n(M)$, so folgt aus der Darstellung (8) die Beziehung

$$|f'(z_0)| \leqq \sum_{i=1}^{n+1} \left| \frac{L'_{i,n+1}(z_0)}{l'_{n+1}(z_i^{(n+1)})} \right|.$$

Nun ist nach (2) und (5) offenbar

$$|L'_{i,n+1}(z_0)| \leqq n d_2^{n-1},$$

wobei d_2 den gewöhnlichen Durchmesser (die „Spanne") von M bezeichnet. Daher ist, mit Rücksicht auf (6),

$$|f'(z_0)| \leqq \frac{n(n+1)d_2^{n-1}}{m_n} = \frac{n(n+1)d_2^{n-1}}{\varrho_n^n},$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n} \leqq \frac{d_2}{\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n} = \frac{d_2}{d} < \infty. \quad \text{W. z. b. w.} \tag{22}$$

---

[7]) Die Komplementärmenge $\overline{M}$ von M zerfällt im allgemeinen in mehrere zusammenhängende Teilgebiete $G, G', G'', \ldots$. Wenn der unendlich ferne Punkt zu G gehört, so kann $G', G'', \ldots$ zu M adjungiert werden, ohne hierbei den Maximalbetrag eines beliebigen Polynoms, ohne also $E_n(M)$, $\alpha_n(M, z_0)$ zu ändern. Gehört also ein Punkt z_0 zu einem dieser Gebiete $G', G'', \ldots$, so ist nach IX

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)} = 1.$$

Die Frage, ob nicht auch unser sich auf den Fall $d = 0$ beziehender Satz VIII wenigstens in einer minderscharfen Form

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n} = \infty$$

(ähnlich wie VII in der Formel (22)) für die Punkte z_0 von M aufrechterhalten werden kann, lassen wir offen.

§ 4.

Die Bestimmung des Grenzwertes der Folgen $\{\alpha_n\}, \{\omega_n\}$ in einem wichtigen Spezialfalle.

Im vorliegenden Paragraphen wollen wir die — einander gleichen — Grenzwerte $\alpha(M, z_0), \omega(M, z_0)$ im Falle auswerten, wo die Komplementärmenge[8]) von M ein einfach zusammenhängendes Gebiet G ist und z_0 zu G gehört.

Sei

$$w = \psi(z) = c\,z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots \qquad (c > 0)$$

diejenige Funktion, welche das Gebiet G auf das Äußere des Einheitskreises $|w| = 1$ in der w-Ebene schlicht abbildet, so daß der unendlich ferne Punkt in sich übergeht und kein Linienelement im unendlich fernen Punkte eine Drehung erfährt.

Ist $f(z)$ ein Polynom n-ten Grades, das auf M die Bedingung

$$|f(z)| \leqq 1$$

erfüllt, so gilt die Abschätzung[9])

$$|f(z_0)| \leqq |\psi(z_0)|^n. \tag{23}$$

Denn die für $|\psi(z)| \geqq R > 1$ reguläre Funktion $\dfrac{f(z)}{(\psi(z))^n}$ erreicht das Maximum ihres Betrages auf dem Kreisbilde $|\psi(z)| = R$; ist auf dieser Kurve $|f(z)| \leqq K_R$, so folgt aus dem eben Gesagten

$$\left|\frac{f(z_0)}{(\psi(z_0))^n}\right| \leqq \frac{K_R}{R^n},$$

falls das Gebiet $|\psi(z)| \geqq R$ den Punkt z_0 enthält, d. h. $R > 1$, $< |\psi(z_0)|$ sonst beliebig ist; daher besteht

$$|f(z_0)| < K_R |\psi(z_0)|^n$$

und somit auch (23).

---

[8]) Vgl. [7]).

[9]) A. a. O. [1]), Hilfssatz 1, S. 49–50.

Auf Grund von (23) können wir behaupten:

X. *Ist z_0 irgendein Punkt von G, so besteht die Ungleichung:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} \leqq |\psi(z_0)|. \tag{24}$$

Mit Hilfe der zu M gehörigen Faberschen Polynome[10]) können wir als Gegenstück zu X, den Satz beweisen:

XI. *Ist z_0 irgendein Punkt von G, so besteht die Ungleichung:*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} \geqq |\psi(z_0)|. \tag{25}$$

Das zu M gehörige n-te Fabersche Polynom $f_n(z)$ ist ein Polynom n-ten Grades, definiert durch die Gleichung

$$(\psi(z))^n = f_n(z) + \frac{c_{-1}^{(n)}}{z} + \frac{c_{-2}^{(n)}}{z^2} + \cdots. \tag{26}$$

Um (25) zu beweisen, werden wir zunächst $|f_n(z_0)|$ von unten abschätzen. Aus (26) folgt

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{(\psi(z))^n}{z - z_0}\, dz,$$

wo die Integration längs eines beliebigen, M um- und z_0 einschließenden Kreisbildes $|\psi(z)| = \text{konst.} = c$ im positiven Sinne zu erstrecken ist. Das Integral rechts kann durch die Summe von zwei anderen — mit demselben Integrand — ersetzt werden, deren erstes längs eines Kreisbildes $|\psi(z)| = R < |\psi(z_0)|$, das zweite aber längs eines solchen Kreises $|z - z_0| = r$ erstreckt wird, der außerhalb von $|\psi(z)| = R$, doch innerhalb von $|\psi(z)| = c$ verläuft. Aus der Relation

$$f_n(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\psi(z)|=R} \frac{(\psi(z))^n}{z - z_0}\, dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{(\psi(z))^n}{z - z_0}\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\psi(z)|=R} \frac{(\psi(z))^n}{z - z_0}\, dz + \psi(z_0)^n$$

folgt

$$|f_n(z_0)| \geqq |\psi(z_0)|^n - \frac{R^n}{2\pi} \int_{|\psi(z)|=R} \frac{|dz|}{|z - z_0|} = |\psi(z_0)|^n \left(1 - C_R \frac{R^n}{|\psi(z_0)|^n}\right). \tag{27}$$

Das Polynom

$$F_n(z) = \frac{f_n(z)}{\underset{(M)}{\text{Max}}\, |f_n(z)|}$$

[10]) G. Faber, Über polynomische Entwicklungen, I, Math. Ann. 57 (1903), S. 389—408.

gehört offenbar zur Klasse $E_n(M)$; daher ist, mit Hinsicht auf (27),

$$\alpha_n(M, z_0) \geqq \frac{|\psi(z_0)|^n}{\underset{(M)}{\mathrm{Max}}\,|f_n(z)|}\left(1 - C_R \frac{R^n}{|\psi(z_0)|^n}\right). \tag{28}$$

Um von (28) zu (25) zu gelangen, haben wir noch $\underset{(M)}{\mathrm{Max}}\,|f_n(z)|$ von oben abzuschätzen. Das erreichen wir mit Hilfe folgenden Satzes:

Ist Γ eine beliebige geschlossene analytische Kurve, so gilt für die zu Γ gehörigen Faberschen Polynome $f_{n,\Gamma}(z)$ überall auf Γ die Ungleichung

$$|f_{n,\Gamma}(z)| < K_\Gamma,$$

wobei die Zahl K_Γ nur von Γ abhängt[11]).

Wir werden diesen Hilfssatz auf das Kreisbild $|\psi(z)| = 1 + \delta$, $\delta > 0$ anwenden; wir erhalten

$$|f_n^{(\delta)}(z)| < k_\delta, \tag{29}$$

wobei $f_n^{(\delta)}(z)$, k_δ die entsprechenden Größen bezeichnen.

Nun besteht zwischen den zu M und zu diesem Kreisbilde gehörigen Faberschen Polynomen $f_n(z)$, $f_n^{(\delta)}(z)$ der einfache Zusammenhang:

$$f_n(z) \equiv f_n^{(\delta)}(z)\,(1+\delta)^n, \tag{30}$$

da doch durch

$$w = \frac{\psi(z)}{1+\delta}$$

das Äußere des Kreisbildes $|\psi(z)| = 1 + \delta$ auf das Äußere von $|w| = 1$ abgebildet wird. Aus (29) und (30) folgt

$$\underset{(M)}{\mathrm{Max}}\,|f_n(z)| \leqq k_\delta (1+\delta)^n;$$

daher ist, mit Rücksicht auf (28):

$$\alpha_n(M, z_0) \geqq \frac{|\psi(z_0)|^n}{k_\delta (1-\delta)^n}\left(1 - C_R \frac{R^n}{|\psi(z_0)|^n}\right),$$

folglich

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} \geqq \frac{|\psi(z_0)|}{1+\delta},$$

bei beliebigem positiven δ. Damit ist (25) bewiesen.

Die Sätze VI, X und XI, miteinander verknüpft, führen zu dem interessanten Resultat:

XII. *Ist M eine Punktmenge, deren Komplementärmenge ein einfach zusammenhängendes Gebiet G ist, und gehört z_0 zu G, so streben die Zahlen*

[11]) Vgl. a. a. O. [1]), S. 54.

$\sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)}$ *sowie die Zahlen* $\sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)}$ *für* $n \to \infty$ *gegen* $|w_0|$, *wobei* w_0 *den Punkt der* w*-Ebene bezeichnet, in welchen* z_0 *übergeht, wenn* G *auf das Äußere des Einheitskreises* $|w| = 1$ (*auf die oben vorgeschriebene Weise*) *abgebildet wird.*

Wir wollen hier noch den Satz formulieren, den man durch Verknüpfung von XII mit IV erhalten kann:

XIII. *Seien* $z_1^{(n)}, z_2^{(n)}, \ldots, z_n^{(n)}$ *solche Punkte von* M, *für welche der Betrag der Vandermondeschen Determinante* $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *den größten Wert erreicht, dessen er fähig ist, falls* $z_1, \ldots, z_n$ *unabhängig voneinander die Menge* M *durchlaufen. Sei* z_0 *ein Punkt im Gebiete* G *und* w_0 *der Bildpunkt von* z_0 *bei der eingangs definierten Abbildung. Dann ist*

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[n]{(z_0 - z_1^{(n)}) \ldots (z_0 - z_n^{(n)})} \right| = d \cdot |w_0|,$$

wobei d *den transfiniten Durchmesser von* M *bedeutet.*

Durch diese Grenzwertgleichung wird man an ein schönes Ergebnis des Herrn Fejér erinnert[12]), welches, mit Rücksicht auf den von mir festgestellten Zusammenhang[13]) zwischen dem transfiniten Durchmesser und der „Abbildungskonstanten" von Γ, sich in dieser Form aussprechen läßt:

Es sollen $\zeta_1^{(n)}, \zeta_2^{(n)}, \ldots, \zeta_n^{(n)}$ regelmäßig verteilte Punkte der geschlossenen Jordanschen Kurve Γ bezeichnen, d. h. solche Punkte, die durch die oben charakterisierte konforme Abbildung des Äußeren von Γ auf das Äußere des Einheitskreises in die Eckpunkte eines diesem Kreise eingeschriebenen regelmäßigen n-Ecks übergeführt werden. Dann ist

$$\lim_{n \to \infty} \left| \sqrt[n]{(z_0 - \zeta_1^{(n)}) \ldots (z_0 - \zeta_n^{(n)})} \right| = d\,|w_0|,$$

wobei z_0 einen beliebigen Punkt bezeichnet, der außerhalb von Γ gelegen ist, w_0 aber den Bildpunkt von z_0, endlich d den transfiniten Durchmesser von Γ.

Aus XII können wir auch eine Folgerung anderer Richtung ziehen, namentlich einen Beitrag zur Kenntnis der Grenzwerte $\alpha(M, z_0)$, $\omega(M, z_0)$ bei ganz allgemeinen Punktmengen M und bei spezieller Lage von Punkten z_0, welche der Komplementärmenge $\overline{M}$ von M angehören. $\overline{M}$ zerfällt im allgemeinen in mehrere zusammenhängende Gebiete. Unter diesen gibt es ein einziges (einfach oder mehrfach) zusammenhängendes Gebiet G, das den unendlich fernen Punkt enthält.

---

[12]) L. Fejér, Interpolation und konforme Abbildung, Göttinger Nachrichten 1918, S. 319–331. Hilfssatz S. 324.

[13]) A. a. O. [3]) Satz IX, S. 239–240.

XIV. *Gehört z_0 zum Gebiete G, so ist*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(M, z_0)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n(M, z_0)} > 1. \tag{31}$$

In der Tat, gehört z_0 zu G, so kann man eine Kurve Γ von der oben charakterisierten Art finden, so daß M im Inneren, z_0 aber im Äußeren von Γ liegt. Da nun offenbar

$$\alpha_n(M, z_0) \geqq \alpha_n(\Gamma, z_0) \quad \text{bzw.} \quad \omega_n(M, z_0) \geqq \omega_n(\Gamma, z_0),$$

nach XII aber

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha_n(\Gamma, z_0)} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\omega_n(\Gamma, z_0)} = |w_0| > 1$$

ist, so besteht auch (31), wie behauptet wurde.

Anhang.

1. *Über den Zusammenhang derjenigen Polynome aus der Klasse E_n, deren Betrag im Punkte z_0 möglichst groß ausfällt.*

Sei M eine Menge der z-Ebene wie bisher, z_0 irgendein Punkt dieser Ebene, $\alpha_n(M, z_0)$ der größte unter den absoluten Werten, welche die Polynome der Klasse E_n im Punkte z_0 annehmen, $\varphi_n(z)$ ein Polynom aus dieser Klasse, für welches

$$|\varphi_n(z_0)| = \alpha_n(M, z_0)$$

ist. Ist c eine komplexe Größe vom Betrage 1, so ist $f(z) = c\varphi_n(z)$ ein solches Polynom, das der Klasse E_n angehört und für welches

$$|f(z_0)| = \alpha_n(M, z_0) \tag{32}$$

besteht. Umgekehrt: Ist $f(z)$ irgendein Polynom E_n, das die Gleichung (32) erfüllt, so muß es mit $\varphi_n(z)$ bis auf einen numerischen Faktor übereinstimmen.

Um diese Behauptung zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß (32) für ein Polynom $f(z)$ aus E_n nur dann bestehen kann, falls

$$\operatorname*{Max}_{(M)} |f(z)| = 1$$

ist. Sonst wäre $\operatorname*{Max}_{(M)} |f(z)| = \vartheta < 1$, also $\frac{f(z)}{\vartheta}$ ein solches Polynom, das der Klasse E_n angehört und wofür der Betrag im Punkte z_0

$$\left|\frac{f(z_0)}{\vartheta}\right| = \frac{\alpha_n(M, z_0)}{\vartheta} > \alpha_n(M, z_0),$$

im Widerspruch zur Definition der Größe $\alpha_n(M, z_0)$. Aus dem eben Bewiesenen folgern wir den Hilfssatz:

XV. *Wenn $f(z)$ ein solches Polynom aus E_n bedeutet, für welches*

(32) *besteht, so gibt es mindestens* $n+1$ *Punkte in* M, *in welchen* $|f(z)|=1$ *ist.*

Wäre dies nicht der Fall, so wäre die Anzahl p derjenigen Punkte $z_1, z_2, \ldots, z_p$, für welche

$$|f(z)|=1,$$

$\geqq 1$, $\leqq n$. Dann könnte man durch die Gleichungen

$$(33)\qquad \begin{aligned} g(z_i) &= f(z_i), \qquad (i=1,2,3,\ldots,p)\\ g(z_0) &= \frac{f(z_0)}{2} \end{aligned}$$

ein Polynom $g(z)$ von höchstens n-tem Grade definieren und mit Hilfe von $g(z)$ ein Polynom

$$(34)\qquad h_\varepsilon(z)=\frac{f(z)-\varepsilon g(z)}{1-\frac{\varepsilon}{2}} \qquad (\varepsilon>0)$$

konstruieren, welches E_n angehört, die Gleichung

$$|h_\varepsilon(z_0)|=\alpha_n(M, z_0)$$

befriedigt und doch überall auf M dem Betrage nach <1 ist, was unmöglich ist. Es ist nämlich nach der Definitionsgleichung (34)

$$(34^{\text{bis}})\qquad h_\varepsilon(z)=\frac{(1-\varepsilon)f(z)+\varepsilon(f(z)-g(z))}{1-\frac{\varepsilon}{2}}.$$

Wählt man nun $\delta>0$ derart, daß für sämtliche Punkte z von M, welche der Bedingung $|z-z_i|<\delta$ genügen, $|f(z)-g(z)|<\frac{1}{2}$ ist (das ist nach (33) immer möglich), so gilt für dieselben Punkte gemäß (34^{bis})

$$(35)\qquad |h_\varepsilon(z)|\leqq\frac{(1-\varepsilon)|f(z)|+\varepsilon|f(z)-g(z)|}{1-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{(1-\varepsilon)+\frac{\varepsilon}{2}}{1-\frac{\varepsilon}{2}}=1,$$

bei jedem positiven ε. Ist andererseits für diejenige Teilmenge M' von M, deren Punkte z der Ungleichung $|z-z_i|\geqq\delta$ genügen, $\operatorname{Max}|f(z)|=A$, $\operatorname{Max}|g(z)|=B$, so ist nach (34)

$$\operatorname*{Max}_{(M')}|h_\varepsilon(z)|\leqq\frac{A+\varepsilon B}{1-\frac{\varepsilon}{2}},$$

folglich ist bei genügend kleinem ε

$$(36)\qquad \operatorname*{Max}_{(M')}|h_\varepsilon(z)|<1,$$

da ja A offenbar <1 ist. Aus (35) und (36) folgt $\operatorname*{Max}_{(M)}|h_\varepsilon(z)|<1$ und somit XV.

Nunmehr seien $F(z)$ und $G(z)$ solche Polynome aus E_n, für welche die Gleichungen

$$|F(z_0)| = \alpha_n(M, z_0)$$
$$|G(z_0)| = \alpha_n(M, z_0)$$

bestehen. Dann ist $F(z) \equiv c\,G(z)$, wobei $|c| = 1$.

Sei nämlich

$$H(z) = \frac{F(z) + \frac{F(z_0)}{G(z_0)}\,G(z)}{2}.$$

Dann gehört $H(z)$ zu E_n und es ist

$$H(z_0) = F(z_0),$$

also

$$|H(z_0)| = \alpha_n(M, z_0).$$

Es gibt also nach dem obigen Hilfssatze XV $n+1$ Punkte auf M, wo

$$|H(z)| = 1. \tag{37}$$

Da nun auf M

$$|H(z)| \leqq \frac{|F(z)| + \left|\frac{F(z_0)}{G(z_0)}\right| |G(z)|}{2} = \frac{|F(z)| + |G(z)|}{2} \leqq 1$$

ist, so kann in den genannten Punkten nur dann (37) bestehen, falls in jedem von ihnen, also identisch $F(z) = \frac{F(z_0)}{G(z_0)}\,G(z)$ ist. Wir haben also bewiesen:

XVI. *Diejenigen Polynome von E_n, für welche der Betrag in einem Punkte z_0 für die Gesamtheit E_n am größten wird, stimmen bis auf einen numerischen Faktor vom Betrage* 1 *miteinander überein.*

Aus diesem Satze folgt:

XVII. *Ist für den Punkt z_0 und für den Wert n*

$$\alpha_n(M, z_0) = 1,$$

so reduzieren sich die Polynome $\varphi_n(z)$ von E_n, für welche $|\varphi_n(z_0)| = \alpha_n(M, z_0)$ ist, auf eine Konstante, deren Betrag $= 1$ ist.

Ist aber

$$\alpha_n(M, z_0) > 1,$$

so sind die Maximumpolynome $\varphi_n(z)$ echte Polynome, deren Grad genau gleich n ist, falls

$$\alpha_n(M, z_0) > \alpha_{n-1}(M, z_0) \tag{38}$$

ist, oder mit dem Grade von $\varphi_{n-1}(z)$ übereinstimmt (also $\leqq n-1$ ist), *falls*

$$\alpha_n(M, z_0) = \alpha_{n-1}(M, z_0)$$

besteht.

Indem wir den einfachen Beweis dieses Satzes dem Leser überlassen, erwähnen wir hier eine Folgerung desselben: Ist z_0 ein solcher Punkt der Komplementärmenge $\overline{M}$ von M, der dem oben am Ende von § 4 definierten Gebiete G angehört, so gilt nach XIV von einem gewissen Wert von n an

$$\alpha_n(M, z_0) > p^n,$$

wobei p eine Zahl bedeutet, die > 1 ist und nur von z_0 abhängt. Daher muß für einen solchen Punkt z_0 der Fall (38) unendlich oft eintreten, also nach XVII das zugehörige Polynom $\varphi_n(z)$ den höchstmöglichen Grad n erreichen.

Ist speziell schon $\alpha_1(M, z_0) > 1$, so sind sämtliche Maximumpolynome $\varphi_n(z)$ genau von n-tem Grade.

Es sei hier noch erwähnt, daß ein ähnlicher Gedankengang, wie der uns zum Satze XVI geführt hat, auch das analoge Resultat über diejenigen Polynome von $E_n(M)$, welche den Betrag der Ableitung in einem Punkte z_0 für die Klasse $E_n(M)$ maximisieren, ergibt, jedoch unter der Beschränkung, daß z_0 außerhalb der konvexen Hülle von M gelegen ist.

2. *Über die Nullstellenverteilung bei den Maximumpolynomen* $\varphi_n(z)$.

Sei M eine Menge der z-Ebene, wie bisher, z_0 irgendein fester Punkt dieser Ebene, für welchen das Maximum $\alpha_n(M, z)$ von einem gewissen Werte des n an größer als Eins ausfällt. Dann sind nach XVII die Maximumpolynome $\varphi_n(z)$ für diese Werte von n echte Polynome; wir fragen nach der Verteilung ihrer Nullstellen. Bei der Lösung dieser Frage stützen wir uns auf den folgenden Hilfssatz:

XVIII. *Sei*

$$\varphi_n(z) = c_\nu z^\nu + \ldots + c_0 = c_\nu (z^\nu + \ldots) = c_\nu \tau_\nu(z), \quad (c_\nu \neq 0;\ 1 \leqq \nu \leqq n),$$

dann ist $\tau_\nu(z)$ *ein Polynom mit dem höchsten Gliede* z^ν, *für welches der Maximalbetrag des Quotienten* $\frac{\tau_\nu(z)}{\tau_\nu(z_0)}$ *auf* M *nicht größer ausfällt, als derselbe eines ähnlichen Quotienten für ein beliebiges Polynom mit dem höchsten Gliede* z^ν.

Beweis. Sonst würde es ein Polynom $\sigma(z) = z^\nu + \ldots$ geben derart, daß

$$\operatorname*{Max}_{(M)} \left| \frac{\sigma(z)}{\sigma(z_0)} \right| < \operatorname*{Max}_{(M)} \left| \frac{\tau_\nu(z)}{\tau_\nu(z_0)} \right| = \operatorname*{Max}_{(M)} \left| \frac{\varphi_n(z)}{\varphi_n(z_0)} \right|,$$

daher wäre

$$|\varphi_n(z_0)| < \frac{|\sigma(z_0)|}{\operatorname*{Max}_{(M)} |\sigma(z)|} \cdot \operatorname*{Max}_{(M)} |\varphi_n(z)| = \frac{|\sigma(z_0)|}{\operatorname*{Max}_{(M)} |\sigma(z)|}.$$

Dann würde das Polynom

$$\varrho(z) \equiv \frac{\sigma(z)}{\underset{(M)}{\mathrm{Max}}\,|\sigma(z)|}$$

der Klasse $E_n(M)$ angehören, jedoch wäre

$$|\varrho(z_0)| > |\varphi_n(z_0)|,$$

im Widerspruch zu der Definition von $\varphi_n(z)$.

Nun sei

$$\tau_\nu(z) \equiv (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\dots(z-\zeta_\nu)$$

und

$$x = \frac{a}{z-z_0} + b \qquad (a \neq 0) \tag{39}$$

eine beliebige lineare Transformation der z-Ebene, welche den Punkt z_0 ins Unendliche wirft und die Nullstellen von $\tau_\nu(z)$ in die Punkte

$$\xi_i = \frac{a}{\zeta_i - z_0} + b \qquad (i = 1, 2, \dots, \nu) \tag{40}$$

überführt. Ist $M^* = M^*(a, b, M)$ diejenige abgeschlossene und beschränkte Punktmenge der x-Ebene, in welche M bei der Transformation (39) übergeht, so ist jeder unter den Punkten ξ_i in der konvexen Hülle $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K}^*(a, b, M)$ der Menge M^* enthalten. (Hier soll unter konvexer Hülle einer Menge der kleinste, die Menge enthaltende konvexe Bereich verstanden werden.)

Läge nämlich einer von den Punkten (40) außerhalb dieser konvexen Hülle, so würde es nach Herrn Fejér ein Polynom

$$(x-\xi_1')\dots(x-\xi_\nu')$$

existieren[14]), so daß für alle Punkte x von M^*

$$|(x-\xi_1')\dots(x-\xi_\nu')| < |(x-\xi_1)\dots(x-\xi_\nu)| \tag{41}$$

ist, abgesehen von den Punkten, wo die beiden Seiten verschwinden. Da nach (39) und (40)

$$x - \xi_i = \frac{a}{z-z_0} - \frac{a}{\zeta_i - z_0} = \frac{a}{z-z_0} \cdot \frac{z-\zeta_i}{z_0-\zeta_i} = (x-b)\frac{z-\zeta_i}{z_0-\zeta_i}$$

ist, so würde aus (41) für alle Punkte z von M

$$\left|\frac{(z-\zeta_1')\dots(z-\zeta_\nu')}{(z_0-\zeta_1')\dots(z_0-\zeta_\nu')}\right| < \left|\frac{\tau_\nu(z)}{\tau_\nu(z_0)}\right|$$

[14]) L. Fejér, Über die Lage der Nullstellen von Polynomen, die aus Minimumforderungen gewisser Arten entspringen, Math. Ann. 85 (1922), S. 41—48. Vgl. auch M. Fekete und J. L. v. Neumann, Über die Lage der Nullstellen gewisser Minimumpolynome, Jahresbericht d. Deutschen Math. Vereinigung 31 (1922), S. 125—138

folgen, abgesehen von den etwa in M enthaltenen gemeinsamen Nullstellen beider Zähler, wenn ζ_i' denjenigen Punkt der z-Ebene bezeichnet, welcher dem Punkte $x = \xi_i'$ gemäß (39) entspricht. Dann wäre aber

$$\operatorname*{Max}_{(M)} \left| \frac{(z-\zeta_1')\dots(z-\zeta_\nu')}{(z_0-\zeta_1')\dots(z_0-\zeta_\nu')} \right| < \operatorname*{Max}_{(M)} \left| \frac{\tau_\nu(z)}{\tau_\nu(z_0)} \right|,$$

im Widerspruch zu XVIII.

Nun wird $\mathfrak{K}^*(a, b, M)$ durch die inverse Transformation von (39) bei jedem Wertepaare a, b in einen und denselben Bereich überführt, in die in bezug auf z_0 kreiskonvexe Hülle[15]) $\mathfrak{K}_{z_0}$ der Menge M. Wir können also auf Grund des oben Bewiesenen den Satz aussprechen:

XIX. *Sei $\varphi_n(z)$ ein echtes Polynom, für welches der Betrag in einem Punkte z_0 für die Klasse $E_n(M)$ am größten wird. Dann liegen alle Nullstellen von $\varphi_n(z)$ in der in bezug auf z_0 kreiskonvexen Hülle der Menge M.*[16])

Mit Rücksicht auf einfache Eigenschaften[17]) der in bezug auf einen Punkt kreiskonvexen Hülle einer Punktmenge kann man von XIX die beiden interessanten Folgerungen ziehen:

1. Liegen M und z_0 auf derselben Kreislinie, so fallen die Nullstellen von $\varphi_n(z)$ auf denjenigen kleinsten Kreisbogen, der M enthält und z_0 nicht enthält.

2. Sind M und z_0 voneinander durch einen Kreis K getrennt, so liegen die Nullstellen von $\varphi_n(z)$ in jenem der durch K begrenzten Kreisbereiche, der die Menge M enthält.

---

[15]) Dieser Begriff, wie die zur Herleitung von XIX angewandte Beweismethode ist Herrn Fejér zu verdanken. Vgl. G. Szegö, Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören, Math. Zeitschr. 9 (1921), S. 218—270, § 5, S. 241—244.

[16]) Der Satz XIX ist die Verallgemeinerung eines Szegöschen Satzes auf beliebige Punktmengen. Vgl. a. a. O.[15]) S. 243.

[17]) Vgl. G. Pólya und G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis. II. V. Abschnitt, Kap. 2, § 1, Nr. 103—105.

(Eingegangen am 7. November 1925.)

Struktur und Eigenschaften mehrfach monotoner Folgen.

Von

Th. Kaluza in Königsberg.

Unter Heranziehung von Differenzen gebrochener Ordnung hat Herr Knopp[1]) vor einiger Zeit den Begriff der für *beliebiges* positives α „*α-fach monotonen Zahlenfolge*“ geschaffen und eine Reihe von Sätzen gefunden, die lehren, daß man in diesen Folgen durchaus zu Recht eine sinngemäße Verallgemeinerung der für ein *natürliches* k k-fach monotonen Folgen erblicken kann. Besonders beachtenswert und für weiteres Suchen in dieser Richtung ermutigend ist dabei die zwanglose Art, in der der bekannte Satz, daß bei konvergenten Reihen mit monoton zu Null strebenden Gliedern a_n sogar $n a_n \to 0$ gilt, sein Analogon findet.

In der vorliegenden Arbeit ist einerseits auch versucht worden, solche Eigenschaften α-fach monotoner Folgen aufzudecken, die sie den gewöhnlichen montonen Folgen möglichst ähnlich erscheinen lassen, es wird aber auch die mehr selbständige Frage nach der überhaupt möglichen Struktur und dem Verlauf solcher Folgen beleuchtet.

Im einzelnen finden sich nach mehr einleitenden Sätzen (§§ 1 u. 2) u. a. Resultate über Anzahl und Anordnung der Häufungswerte (§ 3), ein einfaches Konstruktionsprinzip, dem einige Beispiele für Folgen besonderer Natur entspringen, wie etwa für solche mit vorgeschriebenen Monotonieindex (§ 4), sodann Wachstumsabschätzungen, die den Verlauf der Folgen regeln (§ 5). Die nächsten drei Abschnitte bringen dann sinngemäße Erweiterungen bekannter Konvergenzkriterien, nämlich des Quotientenkriteriums (§ 6) und des sogen. Verdichtungssatzes (§§ 7 u. 8). Da diese für die Erweiterung erst durch Umformung geschmeidig gemacht werden müssen, fällt zugleich auch auf sie selbst und das Leibnizsche Kriterium neues Licht. Im letzten Abschnitt (§ 9) wird endlich der Hauptsatz der

[1]) K. Knopp, *Mehrfach monotone Zahlenfolgen*, Math. Zeitschrift 22 (1925), S. 75–85.

Arbeit von Herrn Knopp noch etwas erweitert, ebenfalls in Parallele mit einem bekannten Satz über einfach monotone Folgen.

§ 1.

Die *Binomialkoeffizientenreihe*

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu \binom{\nu+z}{\nu}$$

zeigt bekanntlich[2]) — von den Punkten $-1, -2, -3, \ldots$, in denen sie abbricht, abgesehen — das gleiche Konvergenzverhalten wie die mit denselben Koeffizienten b_ν gebildete *Dirichletsche Reihe*

$$(2) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu (\nu+1)^{-z}.$$

Darauf fußend setzen wir fest:

Definition 1. *Die Zahlenfolge* $(b_\nu) \equiv b_0, b_1, b_2, \ldots$, *sowie auch die zugehörige (formal angesetzte) Reihe* $\sum b_\nu \equiv \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu$ *heißen für ein reelles* ξ *„ξ-konvergent“, falls die Reihe* (2) *für* $z = \xi - 1$ *konvergiert; sie heißen „vollkonvergent“, falls* (2) *für jedes reelle* z *konvergiert.*

Die gleiche Sprechweise wie für eine Reihe wird also auch für die Folge der Reihenglieder gebraucht; dabei deckt sich 1-Konvergenz einer Reihe mit deren Konvergenz in gewöhnlichem Sinne. Es sei aber betont, daß sich die Konvergenz einer Folge in gewöhnlichem Sinne nicht in obige Skala einfügt. 2-konvergent ist z. B. die Folge $([n \log n]^{-2})$, vollkonvergent u. a. jede nicht nirgends konvergente Potenzreihe im Innern ihres Konvergenzkreises; 0-Konvergenz von $\sum b_\nu$ oder (b_ν) bedeutet gewöhnliche Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{b_\nu}{\nu+1}$.

Die einfachsten Eigenschaften Dirichletscher Reihen lehren:

Satz 1. *Mit* (b_ν) *bzw.* $\sum b_\nu$ *ist auch für jedes feste* $k = 1, 2, 3, \ldots$ *die Restfolge* $(b_{k+\nu})$ *bzw. der zugehörige Reihenrest* $\sum b_{k+\nu}$ *ξ-konvergent.*

Satz 2. *Sind* (b_ν) *bzw.* $\sum b_\nu$ *ξ-konvergent, so sind sie auch ξ'-konvergent für jedes* $\xi' < \xi$.

Definition 2. *Im Falle der Konvergenz nachstehender Reihe setzen wir kurz*

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} b_{n+\nu} \binom{\nu+\eta-1}{\nu} = \Sigma^\eta b_n = \Delta^{-\eta} b_n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots; \eta \text{ reell})$$

[2]) Vgl. etwa E. Landau, *Über die Grundlagen der Theorie der Fakultätenreihen*, Münch. Ber. 36 (1906), S. 194.

und nennen (3) — *nach Bedarf* — *die „η-ten Summen" oder die „$(-\eta)$-ten Differenzen" der Folge* (b_n). [3])

Ist $\eta = -k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, so konvergiert die Reihe in (3), weil sie abbricht, und es handelt sich um die gewöhnlichen Differenzen $\Delta^k b_n$; für alle anderen η gilt

Satz 3. *Notwendig und hinreichend für die Existenz der η-ten Summen $\sum^\eta b_n$ ist die η-Konvergenz von (b_n).*

Der Beweis liegt in der eingangs erwähnten Beziehung[2]) zwischen den Reihen (1) und (2).

Endlich verabreden wir noch:

Definition 3. *Ist $\varkappa$ die Konvergenzabszisse der Reihe* (2), *so soll $\varkappa + 1$ die Konvergenzstärke der Folge (b_ν), sowie der (formal angesetzten) Reihe $\sum b_\nu$ heißen.*

Bemerkt sei, daß eine Reihe der Konvergenzstärke λ nicht λ-konvergent zu sein braucht; Beispiel für $\lambda = 1$: $\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu+1}$.

§ 2.

Wir betrachten weiterhin nur reelle linksbeschänkte Folgen

$$(4) \qquad (a_n) \equiv a_0, a_1, a_2, \ldots \qquad (a_n > -K \text{ für } n = 0, 1, 2, \ldots)$$

von einer Konvergenzstärke $\lambda \geqq 0$, für die also alle Differenzen positiver Ordnung existieren, und setzen[4]) fest:

Definition 4. *Die Folge* (4) *heiße für ein $\alpha > 0$ „α-fach monoton" (bzw. „wesentlich α-fach monoton"), falls für $n = 0, 1, 2, \ldots$ $\Delta^\alpha a_n \geqq 0$ (bzw. $\Delta^\alpha a_n > 0$) ist.*

Einfache Monotonie deckt sich sonach mit Monotonie in gewöhnlichem Sinne. Es gilt

Satz 4. *Für jedes reelle a und jedes reelle $\alpha > 0$ ist mit $a_n' = a_n + a$ stets $\Delta^\alpha a_n' = \Delta^\alpha a_n$.*

Der Satz ist trivial, zeigt aber, daß man ohne Verlust an Allgemeinheit den Wert irgendeines Einzelgliedes a_{n_0} oder auch den $\varliminf_{n\to\infty} a_n$ vorschreiben darf; bequem ist oft die Annahme $\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$. Dazu verabreden wir noch:

Definition 5. *Die Folge (a_n) heiße „nivelliert", falls* $\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$.

---

[3]) Übereinstimmend mit Knopp, l. c. S. 77.

[4]) Vgl. Knopp, l. c. S. 77; die Beschränkung auf Nullfolgen ist hier fallen gelassen.

§ 3.

Wir beweisen zunächst einige einfache Sätze über α-fach monotone Folgen; um die hauptsächlich interessanten Fälle herauszuheben, sei alsbald $0 < \alpha < 1$ gedacht[5]).

Satz 5. *Jedes Glied einer α-fach monotonen (bzw. wesentlich α-fach monotonen) Folge ist Glied einer monotonen (bzw. wesentlich monotonen) Teilfolge.*

Beweis. a_{n_0} sei irgendein Glied der Folge; nach Satz 4 dürfen wir $a_{n_0} = 0$ voraussetzen, daher gilt

$$\Delta^\alpha a_{n_0} = \sum_{\varrho=1}^{\infty} a_{n_0+\varrho} \binom{\varrho-\alpha-1}{\varrho} \geqq 0 \quad (\text{bzw. } > 0). \tag{5}$$

Da andererseits

$$\binom{\varrho-\alpha-1}{\varrho} < 0 \quad \text{für} \quad \varrho = 1, 2, 3, \ldots, \tag{6}$$

muß in (5) für mindestens ein $\varrho = \varrho_0$

$$a_{n_0+\varrho_0} \leqq a_{n_0} = 0 \quad (\text{bzw. } < a_{n_0} = 0) \tag{7}$$

sein. Iteriert man die Schlußweise für den neuen Index $n_1 = n_0 + \varrho_0$ usf., so folgt die Behauptung.

Satz 6. *Die Glieder einer nivellierten α-fach monotonen (bzw. wesentlich α-fach monotonen) Folge sind sämtlich nicht negativ (bzw. wesentlich positiv).*

Beweis. Wäre etwa das Glied $a_{n_0} < 0$ (bzw. $\leqq 0$), so gäbe es in (a_n) nach Satz 5 eine monotone (bzw. wesentlich monotone) Teilfolge $(a_{n_\nu}) \equiv a_{n_0}, a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$; dann wäre aber

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} \leqq a_{n_0} < 0 \quad (\text{bzw. } \lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} < a_{n_0} \leqq 0),$$

stets also $\lim_{n\to\infty} a_n < 0$ entgegen der Voraussetzung (vgl. Definition 5).

Satz 7. *Verschwindet ein Glied einer nivellierten α-fach monotonen Folge, so verschwinden auch alle darauf folgenden.*

Beweis. Sei etwa das Glied $a_{n_0} = 0$, so gilt wieder (vgl. (5))

$$\sum_{\varrho=1}^{\infty} a_{n_0+\varrho} \binom{\varrho-\alpha-1}{\varrho} \geqq 0. \tag{8}$$

Da nach Satz 6 für $\varrho = 1, 2, 3, \ldots$ stets $a_{n_0+\varrho} \geqq 0$, folgt wegen (6) die Behauptung.

---

[5]) Die meisten dieser Sätze bestehen natürlich für jedes $\alpha > 0$, werden aber z. B. für $\alpha = 1$ trivial.

Satz 5, 6 und 7 sagen mithin etwa aus, daß eine α-fach monotone Folge sich ihrem Limes inferior *von obenher* nähert und daß, wenn sie ihn — sozusagen — vorzeitig erreicht, sie von da ab konstant bleibt. Schon tiefer in den Bau α-fach monotoner Folgen leuchtet folgender

Satz 8. *Eine nivellierte α-fach monotone Folge ist entweder Nullfolge oder hat unendlich viele Häufungswerte, die sich ihrerseits gegen Null häufen.*

Beweis. (a_n) sei keine Nullfolge; wäre dann für ein $\gamma > 0$ das offene Intervall $(0, \gamma)$ frei von Häufungswerten der Folge, so wäre für jedes ε mit $0 < \varepsilon < \frac{\gamma}{2}$ von einem passenden Index n_0 ab stets entweder $a_n < \varepsilon$ oder $a_n > \gamma - \varepsilon$, und beides träte unendlich oft ein (beachte $\varliminf_{n\to\infty} a_n = 0$); es gäbe also auch „Wechselstellen", d. h. Indizes $m \geqq n_0$, für die $a_m < \varepsilon$, dagegen $a_{m+1} > \gamma - \varepsilon$ wäre. Dann aber wäre wegen (6) und Satz 6 $\Delta^\alpha a_m \leqq a_m - \alpha a_{m+1} < \varepsilon - \alpha(\gamma - \varepsilon)$; für $\varepsilon = \frac{\alpha}{1+\alpha}\gamma < \frac{\gamma}{2}$ würde also gegen die Voraussetzung $\Delta^\alpha a_m$ negativ.

Die Alternative in Satz 8 legt die Frage nahe, ob es überhaupt *divergente* α-fach monotone Folgen gibt? Es wird daher jetzt ein einfaches Konstruktionsverfahren für α-fach monotone Folgen angegeben, das diese und ähnliche Fragen leicht zu behandeln gestattet.

Satz 9. *Ist $(d_n) \equiv d_0, d_1, d_2, \ldots$ eine α-konvergente Folge reeller, nicht negativer Zahlen $(0 < \alpha < 1)$, so bilden ihre α-ten Summen $a_n = \sum^\alpha d_n$ eine α-fach monotone Folge*[6]).

Beweis. Setzt man zur Abkürzung für $\mu = 1, 2, 3, \ldots$

$$(9) \qquad -\binom{\mu-\alpha-1}{\mu} = \alpha_\mu > 0 \quad \text{und} \quad \binom{\mu+\alpha-1}{\mu} = \bar{\alpha}_\mu > 0,$$

$$\text{dazu} \quad -\alpha_0 = \bar{\alpha}_0 = 1,$$

so folgt aus den erzeugenden Funktionen

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu z^\nu = -(1-z)^\alpha \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{\alpha}_\nu z^\nu = (1-z)^{-\alpha}$$

durch Ausmultiplizieren für $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$(11) \qquad \sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu \bar{\alpha}_{m-\mu} = 0.$$

---

[6]) Die wesentliche Monotonie ergebende Variante des Satzes liegt auf der Hand und mag hier wie auch späterhin unterdrückt werden.

Es gelten daher die Gleichungssysteme

$$
\begin{aligned}
-d_n &= \alpha_0 \bar{v}_0 d_n, \\
0 &= \alpha_0 \bar{\alpha}_1 d_{n+1} + \alpha_1 \bar{\alpha}_0 d_{n+1}, \\
0 &= \alpha_0 \bar{\alpha}_2 d_{n+2} + \alpha_1 \bar{\alpha}_1 d_{n+2} + \alpha_2 \bar{\alpha}_0 d_{n+2} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{12}
$$

Da rechts, wie (9) zeigt, nur in der ersten Spalte negative Zeichen auftreten können, ist in jeder Zeile, von der zweiten ab, die Betragsumme gleich dem doppelten Betrage des ersten Gliedes; die aus diesen ersten Gliedern gebildete Reihe ist aber, da nach Voraussetzung und Satz 3 $\Sigma^\alpha d_n$ existiert, konvergent (und gleich $\alpha_0 \Sigma^\alpha d_n$). Umordnung nach Spalten ist also erlaubt und liefert

$$
\begin{aligned}
-d_n &= \alpha_0 \Sigma^\alpha d_n + \alpha_1 \Sigma^\alpha d_{n+1} + \alpha_2 \Sigma^\alpha d_{n+2} + \cdots \\
&= -\Delta^\alpha (\Sigma^\alpha d_n) = -\Delta^\alpha a_n,
\end{aligned} \tag{13}
$$

d. h. wegen $d_n \geqq 0$ die Behauptung.

Wir benutzen nun diesen Satz zur Konstruktion einer *divergenten* α-fach monotonen Folge $(0 < \alpha < 1)$. Dazu wählen wir

$$
k = \left[\frac{1}{1-\alpha}\right] + 1, \quad d_n = 1 \text{ für } n = m^k \quad (m = 0, 1, 2, \ldots), \quad d_n = 0 \text{ sonst.} \tag{14}
$$

(Für $\alpha = \frac{1}{2}$, also $k = 3$, $d_0 = d_1 = d_8 = d_{27} = \ldots = 1$, $d_2 = d_3 = \ldots = d_7 = d_9 = \ldots = 0$.) Zunächst ist (d_n) α-konvergent, denn die Reihe

$$
\sum_{n=1}^{\infty} d_n n^{\alpha-1} = \sum_{m=1}^{\infty} m^{k(\alpha-1)} \tag{15}
$$

konvergiert für $k(1-\alpha) > 1$, also im vorliegenden Falle. Sodann gibt es wegen $k \geqq 2$, $\Delta^2(m^k) > 0$ zu jedem $\nu > 0$ ein $\mathsf{N} = \mathsf{N}(\nu) > \nu$, so daß die ν^k dem Gliede $d_{\mathsf{N}^k} = 1$ vorangehenden Glieder $d_{\mathsf{N}^k - \varrho}$, $\varrho = 1, 2, \ldots, \nu^k$ verschwinden, und es wird für $\nu = 1, 2, 3, \ldots$

$$
\begin{aligned}
a_{n_\nu} = \Sigma^\alpha d_{\mathsf{N}^k - \nu^k} &= \sum_{\mu=0}^{\infty} \binom{\mu+\alpha-1}{\mu} d_{\mathsf{N}^k - \nu^k + \mu} \\
&= \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(\mathsf{N}+r)^k - \mathsf{N}^k + \nu^k + \alpha - 1}{(\mathsf{N}+r)^k - \mathsf{N}^k + \nu^k}.
\end{aligned} \tag{16}
$$

Wegen $(\mathsf{N}+r)^k - \mathsf{N}^k > (\nu+r)^k - \nu^k$ für $r = 1, 2, 3, \ldots$ aber und wegen der Monotonie der $\bar{\alpha}_\mu$ gilt für dieselben r

$$
\binom{(\mathsf{N}+r)^k - \mathsf{N}^k + \nu^k + \alpha - 1}{(\mathsf{N}+r)^k - \mathsf{N}^k + \nu^k} < \binom{(\nu+r)^k + \alpha - 1}{(\nu+r)^k}, \tag{17}
$$

so daß in (16)

$$a_{n_\nu} < \sum_{r=0}^{\infty} \binom{(\nu+r)^k + \alpha - 1}{(\nu+r)^k} \tag{18}$$

wird. Die rechte Seite von (18) ist aber der mit dem Gliede $\binom{\nu^k+\alpha-1}{\nu^k}$ beginnende Rest der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+\alpha-1}{n} d_n = \Sigma^\alpha d_0; \tag{19}$$

aus ihrer Konvergenz folgt also

$$\lim_{\nu\to\infty} a_{n_\nu} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = 0. \tag{20}$$

Da endlich für jedes $m = 0, 1, 2, \ldots$ $a_{m^k} = d_{m^k} + \ldots > 1$ gilt, ist

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n \geqq 1, \tag{21}$$

die Folge (a_n) also divergent. (Übrigens kann man durch ganz ähnliche Schlüsse zeigen, daß die Zahlen $\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \ldots$ die einzigen von Null verschiedenen Häufungswerte von (a_n) bilden.)

Daß es schließlich sogar *nicht beschränkte* α-fach monotone Folgen gibt, erkennt man, wenn man in (14) $d_{m^k} = \log(m+1)$ anstatt $d_{m^k} = 1$ setzt, denn (d_n) erweist sich wiederum als α-konvergent, und wegen $a_{m^k} > \log(m+1)$ ist hier $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \infty$.

Angesichts der Existenz divergenter α-fach monotoner Folgen erscheint es lohnend, Satz 8 noch zu verschärfen zu dem analog zu beweisenden

Satz 10. *Zwischen zwei Häufungswerten γ' und γ einer nivellierten α-fach monotonen Folge liegt, falls $\frac{\gamma'}{\gamma} < \alpha$ ist, noch ein weiterer Häufungswert.*

Beweis. Wäre das offene Intervall (γ', γ) frei von Häufungswerten der Folge, so wäre für jedes ε mit $0 < \varepsilon < \frac{\gamma-\gamma'}{2}$ von einem passenden Index n_0 ab stets entweder $a_n < \gamma' + \varepsilon$ oder $a_n > \gamma - \varepsilon$, und beides träte unendlich oft ein; es gäbe also auch „Wechselstellen", d. h. Indizes $m > n_0$, für die $a_m < \gamma' + \varepsilon$, dagegen $a_{m+1} > \gamma - \varepsilon$ wäre. Dann aber wäre wegen (6) und Satz 6 $\Delta^\alpha a_m \leqq a_m - \alpha a_{m+1} < \gamma' + \varepsilon - \alpha(\gamma - \varepsilon)$; für das wegen $\gamma' < \alpha\gamma$ wesentlich positive $\varepsilon = \frac{\alpha\gamma - \gamma'}{1+\alpha} < \frac{\gamma-\gamma'}{2}$ würde also gegen die Voraussetzung $\Delta^\alpha a_m$ negativ.

Eine geringe Modifikation dieses Beweises liefert noch den

Satz 11. *Die Menge der endlichen Häufungswerte einer nicht beschränkten α-fach monotonen Folge ist selbst nicht beschränkt.*

Satz 10 verbürgt sozusagen eine gewisse *Minimaldichte* der Häufungswerte einer divergenten α-fach monotonen Folge; daß andererseits eine Maximaldichte nicht besteht, lehrt ein Beispiel, das aber als zu platzraubend hier unterdrückt werden soll. (Man geht von einer Folge aus, für die jeder Wert des Intervalles $[0,1]$ Häufungswert ist, „verdünnt" sie gehörig, ähnlich wie bei den obigen Beispielen, durch eingeschobene Nullen und geht zu der Folge der α-ten Summen über; diese wird nach Satz 9 α-fach monoton und besitzt noch alle Häufungswerte der Ausgangsfolge.)

§ 4.

Die weiter oben nach Satz 9 gebildeten Beispiele stellen zugleich Folgen vom *Monotonieindex*[7]) α dar; dies erhellt sogleich aus folgendem

Satz 12. *Eine α-fach monotone Folge (a_n) hat den Monotonieindex α, falls in der Folge ihrer α-ten Differenzen ein verschwindendes Glied vor einem nicht verschwindenden steht.*

Beweis. Wäre der Monotonieindex von (a_n) größer als α, so wäre die Folge für ein passendes $\varepsilon > 0$ noch $(\alpha+\varepsilon)$-fach monoton; dann wäre aber (s. u.)

$$\Delta^{\alpha+\varepsilon} a_n = \Delta^{\varepsilon}(\Delta^{\alpha} a_n) \geqq 0 \quad \text{für} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{22}$$

d. h. die Folge $(\Delta^{\alpha} a_n)$ wäre selbst noch ε-fach monoton; dies ist jedoch, da $(\Delta^{\alpha} a_n)$ nivelliert ist, nach Satz 7 unmöglich. Dabei folgt (22), falls (a_n) konvergiert, sogleich aus dem Andersenschen Satz[8]); für divergente (a_n) hat man, ganz nach dem Muster von (12), eine einfache Umordnung vorzunehmen — auch dort handelt es sich ja nur um eine leichte Erweiterung des Satzes von Andersen.

Ein besonders einfacher Typ von Folgen mit dem Monotonieindex α $(0 < \alpha < 1)$ entsteht, wenn man in Satz 9 für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ setzt:

$$d_{2\nu+1} = 0, \quad d_{2\nu} = \varrho\, \zeta^{2\nu} \qquad (\varrho > 0,\ 0 < \zeta < 1). \tag{23}$$

Man erhält dann durch leichte Summenbildung:

$$a_{2\nu} = \sigma\, \zeta^{2\nu}, \quad a_{2\nu+1} = \delta\, \zeta^{2\nu+1} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots) \tag{24}$$

mit

$$\sigma = \frac{\varrho}{2}\left((1-\zeta)^{-\alpha} + (1+\zeta)^{-\alpha}\right), \quad \delta = \frac{\varrho}{2}\left((1-\zeta)^{-\alpha} - (1+\zeta)^{-\alpha}\right). \tag{25}$$

---

[7]) Vgl. Knopp, l. c. S. 80.

[8]) A. F. Andersen, Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, Kopenhagen 1921; vgl. auch Knopp, l. c. S. 76.

Ist umgekehrt ζ, σ und δ mit $0 < \frac{\delta}{\sigma} < \zeta < 1$ gegeben, so liefert (25)

$$0 < \alpha = \frac{\log(\sigma+\delta) - \log(\sigma-\delta)}{\log(1+\zeta) - \log(1-\zeta)} < 1, \tag{26}$$

es besteht also der

Satz 13. *Multipliziert man die Glieder einer geometrischen Nullfolge (ζ^n) abwechselnd mit zwei wesentlich positiven Konstanten σ und δ, für die $\frac{\delta}{\sigma} < \zeta$ ist, so entsteht eine Folge, deren Monotonieindex α durch* (26) *gegeben ist.*

(Läßt man die obere Schranke für $\frac{\delta}{\sigma}$ fallen, so liefert (26) auch noch den Monotonieindex, der dann aber beliebig groß werden kann.)

Beispiel: $\zeta = \frac{3}{5}$, $\sigma = \frac{3}{2}$, $\delta = \frac{1}{2}$; die Folge

$$\frac{3}{2}\cdot 1 = 1, \quad \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5} = \frac{3}{10}, \quad \frac{3}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{50}, \quad \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{27}{250}, \ldots \tag{27}$$

hat den Monotonieindex $\alpha = \frac{1}{2}$.

Bezüglich des Monotonieindex gilt noch

Satz 14. *Eine Folge (a_n) vom Monotonieindex α $(0 < \alpha < 1)$ ist α-fach monoton.*

Beweis. Wäre dies nicht der Fall, so wäre für wenigstens einen Index n_0 $\Delta^\alpha a_{n_0} < 0$; da aber wegen der Stetigkeit der durch die Binomialkoeffizientenreihe (1) dargestellten Funktion in jedem inneren Punkte der Konvergenzhalbebene $\Delta^\alpha a_{n_0} = \lim_{\varepsilon \to 0} \Delta^{\alpha-\varepsilon} a_{n_0}$ $(0 < \varepsilon < \alpha)$ gilt, so müßte bereits für ein passendes $\varepsilon_0 > 0$ $\Delta^{\alpha-\varepsilon_0} a_{n_0} < 0$ sein, entgegen der Definition des Monotonieindex.

Die Möglichkeit, daß eine Folge zwar für jedes $\varepsilon > 0$ $(\alpha - \varepsilon)$-fach, nicht aber mehr α-fach monoton sein könnte, besteht also nicht.

Im Anschluß an die Tatsache, daß nach Satz 13 eine geometrische Nullfolge starke Abänderungen ihrer Glieder verträgt, ohne daß ihr Monotonieindex zu Null herabsinkt, soll noch eine ähnliche *Unempfindlichkeit* gegenüber jeder „beschränkten" Umordnung ihrer Glieder festgestellt werden, d. h. gegenüber jeder Umordnung, bei der kein Glied um mehr als k Stellen von seinem ursprünglichen Platz entfernt wird (k eine feste natürliche Zahl).

Ist nämlich (ζ^n) mit $0 < \zeta < 1$ die geometrische Ausgangsfolge, so gilt für die Glieder der umgeordneten Folge (u_n) die Abschätzung

$$\zeta^{n+k} \leqq u_n \leqq \zeta^{n-k} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{28}$$

infolgedessen wird mit der Abkürzung (9)

$$\Delta^\alpha u_n = u_n - \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu u_{n+\nu} \geqq \zeta^{n+k}(1 - \zeta^{-2k} \sum_{\nu=1}^{x} \alpha_\nu \zeta^\nu); \tag{29}$$

(u_n) ist also α-fach monoton, sobald

$$1-\zeta^{-2k}\sum_{\nu=1}^{\infty}\alpha_\nu\zeta^\nu=1-\zeta^{-2k}(1-(1-\zeta)^\alpha)\geqq 0, \tag{30}$$

d. h. für jedes

$$\alpha\leqq\frac{\log(1-\zeta^{2k})}{\log(1-\zeta)}. \tag{31}$$

§ 5.

Die in § 3 hervorgehobene Existenz von nicht beschränkten α-fach monotonen Folgen legt die Frage nach *Beschränkungen für die Stärke ihres Anwachsens* nahe. Es gilt da zunächst

Satz 15. *Für irgend zwei Glieder a_p und a_q $(p<q)$ einer nivellierten α-fach monotonen Folge gilt*

$$a_p\geqq\binom{q-p+\alpha-1}{q-p}a_q. \tag{32}$$

Beweis. Aus $\Delta^\alpha a_n\geqq 0$ $(n=0,1,2,\ldots)$ folgt a fortiori unter Benutzung der Abkürzungen (9) für jedes natürliche k

$$a_n\geqq\sum_{\nu=1}^{k}\alpha_\nu a_{n+\nu}. \tag{33}$$

Löst man nun das System

$$\begin{aligned}
a_{q-1}&\geqq\alpha_1 a_q\\
a_{q-2}&\geqq\alpha_1 a_{q-1}+\alpha_2 a_q\\
a_{q-3}&\geqq\alpha_1 a_{q-2}+\alpha_2 a_{q-1}+\alpha_3 a_q\\
&\vdots\\
a_p&\geqq\alpha_1 a_{p+1}+\alpha_2 a_{p+2}+\ldots+\alpha_{q-p-1}a_{q-1}+\alpha_{q-p}a_q
\end{aligned} \tag{34}$$

stufenweise auf, so erhält man, wenn man die Zwischenlösungen in der Form

$$a_{q-\gamma}\geqq\xi_\gamma a_q \qquad (\gamma=1,2,\ldots,q-p) \tag{35}$$

ansetzt, für die ξ_γ die Rekursion

$$\xi_\gamma-\sum_{\varrho=1}^{\gamma}\alpha_\varrho\xi_{\gamma-\varrho}=0, \tag{36}$$

die nach (11) durch $\xi_\gamma=\bar\alpha_\gamma=\binom{\gamma+\alpha-1}{\gamma}$ gelöst wird. Für $\gamma=q-p$ nimmt also (35) die Gestalt der Behauptung (32) an.

Aus Satz 14 folgt, da doch

$$a_m\leqq\frac{a_0}{\bar\alpha_m} \qquad (m=1,2,3,\ldots) \tag{37}$$

bleibt, mit der bekannten asymptotischen Beziehung

$$\bar{a}_m = \binom{m+\alpha-1}{m} \sim m^{-(1-\alpha)} \tag{38}$$

die *Abschätzung*

$$a_n = O(n^{1-\alpha}), \tag{39}$$

doch läßt sie sich leicht noch zu der entsprechenden *o-Aussage* verschärfen:

Satz 16. *Für die Glieder einer nivellierten α-fach monotonen Folge (a_n) gilt die Abschätzung*

$$a_n = o(n^{1-\alpha}). \tag{40}$$

Beweis. Da (a_n) nivelliert ist, enthält sie eine Teilfolge (a_{n_ν}), die zu Null strebt; nach Satz 15 gilt also, unter Beachtung von (38) und $\alpha < 1$,

$$a_{n_\nu+r} \leqq \frac{a_{n_\nu}}{\bar{a}_r} < K a_{n_\nu} r^{1-\alpha} \leqq K a_{n_\nu} (n_\nu + r)^{1-\alpha} \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots) \tag{41}$$

mit einer passenden Konstanten $K > 0$. Bedeutet also $a_{\mu(m)}$ das letzte der Glieder von (a_{n_ν}), die nicht auf a_m folgen ($m \geqq n_1$ gedacht), so ergibt (41)

$$a_m \leqq K a_{\mu(m)} m^{1-\alpha}; \tag{42}$$

wegen $\lim\limits_{m\to\infty} a_{\mu(m)} = 0$ folgt daraus die Behauptung.

Der Satz gilt übrigens auch für $\alpha = 1$; *nivellierte* einfach monotone Folgen sind ja stets Nullfolgen; Satz 16 liefert eben die sinngemäße Verallgemeinerung dieser Tatsache.

Schließlich folgt aus Satz 15 noch der folgende

Satz 17. *Bezeichnet $s_n = \sum\limits_{\nu=0}^{n} a_\nu$ die n-te Teilsumme einer nivellierten α-fach monotonen Folge, so gilt*

$$s_n \geqq \binom{n+\alpha}{n} a_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{43}$$

oder auch

$$n^\alpha a_n = O(s_n). \tag{44}$$

Beweis. Aus (32) folgt (immer mit der Abkürzung (9))

$$s_n \geqq (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 + \ldots + \bar{a}_{n-1} + \bar{a}_n) a_n; \tag{45}$$

aus der die $\bar{a}_n$ erzeugenden Funktion (10) folgt aber leicht

$$\sum_{\nu=0}^{n} \bar{a}_\nu = \binom{n+\alpha}{n}, \tag{46}$$

womit (43) und wegen

$$\binom{n+\alpha}{n} \sim n^{\alpha} \tag{47}$$

auch (44) bewiesen ist.

Der Satz verallgemeinert sinngemäß die für $\alpha = 1$ gültige Abschätzung $s_n \geqq (n+1)\, a_n$. Die Verschärfung zur *o-Aussage* für 1-konvergente Folgen ($s_n = O(1)$) liefert hier — in gewissem Sinne — der bereits von Herrn Knopp bewiesene Satz 8 seiner Arbeit[9]):

$$n^{\alpha} a_n = o(s_n) = o(1). \tag{48}$$

§ 6.

Im folgenden sollen einige *Konvergenzkriterien* für einfach monotone Folgen bezüglich ihrer *Ausdehnbarkeit auf nur α-fach monotone Folgen* untersucht werden.

Ganz allgemein kann man wohl sagen, daß nur bei solchen Kriterien eine Verallgemeinerung zu erhoffen sein wird, die sich auf eine Form bringen lassen, in der irgendwie die *ersten Differenzen* der Reihenglieder auftreten.

Da ist zunächst das sog. *Quotientenkriterium*, das gewöhnlich in der Form auftritt:

Eine Reihe $\sum a_n$ mit wesentlich positiven Gliedern konvergiert, wenn „schließlich“ (d. h. für alle $n > n_0$)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqq a < 1 \tag{49}$$

bleibt.

Dann ist die Folge der Reihenglieder aber auch schließlich (d. h. wieder: von einer Stelle an) einfach monoton, und wir können, unter Außerachtlassung von endlich vielen für die Konvergenzfrage belangloser Anfangsgliedern und bei Hereinnahme des selbstverständlichen $a_n \to 0$ auch sagen:

Eine Reihe $\sum a_n$, deren Glieder eine einfach monotone Nullfolge bilden, konvergiert, falls

$$a_n = O(\Delta a_n). \tag{50}$$

Aus (49) wird nämlich durch leichte Umstellung

$$a_n \leqq \frac{a_n - a_{n+1}}{1-a},$$

d. h. (50).

[9]) Vgl. Knopp, l. c. S. 84.

Für die Reihenreste $r_n = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{n+\nu}$ folgt aber, da nach (50) für festes n und passendes $K > 0$

$$a_{n+\nu} \leqq K \Delta a_{n+\nu} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots), \tag{51}$$

sogleich

$$r_n = O(a_n) = O(\Delta r_n); \tag{52}$$

nach demselben Kriterium (50) ist also auch $\sum_{n=0}^{\infty} r_n = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_n$ konvergent, d. h. $\sum a_n$ oder auch die Folge (a_n) 2-konvergent. Da man endlich die eben vorgenommene *Iteration* beliebig weit fortsetzen kann, gilt (vgl. Definition 1) der erschöpfende

Satz 18. *Eine einfach monotone Nullfolge* (a_n), *für die* $a_n = O(\Delta a_n)$ *ist, ist vollkonvergent.*

Die so gefundene Form des Quotientenkriteriums gibt nun die *Verallgemeinerung* an die Hand:

Satz 19. *Eine* α*-fach monotone Nullfolge* (a_n) $(0 < \alpha < 1)$, *für die*

$$a_n = O(\Delta^\alpha a_n) \tag{53}$$

ist, ist vollkonvergent.

Beweis. Nach dem Andersenschen Satz[9]) ist $a_n = \sum^\alpha (\Delta^\alpha a_n)$, wegen (53) existiert also (vgl. den Schluß von (50) auf (52)) $r_n^{(\alpha)} = \sum^\alpha a_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, und es gilt

$$r_n^{(\alpha)} = O(a_n) = O(\Delta^\alpha r_n); \tag{54}$$

daraus folgt wiederum die Existenz von $r_n^{(2\alpha)} = \sum^\alpha r_n^{(\alpha)} = \sum^{2\alpha} a_n$. Auch hier läßt sich die Iteration beliebig fortsetzen, d. h. es existieren die Summen beliebig hoher Ordnung oder: (a_n) ist vollkonvergent.

§ 7.

Als nächstes Kriterium soll das sog. *Verdichtungskriterium* untersucht werden. Es lautet etwa[10]):

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine Reihe mit einfach monoton zu Null strebenden Gliedern, (g_r) eine Folge wesentlich monoton *wachsender* natürlicher Zahlen, so ist mit $\sum_{r=0}^{\infty} (g_{r+1} - g_r) a_{g_r}$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ selbst konvergent; ist überdies für ein $K > 0$

$$g_{r+2} - g_{r+1} \leqq K (g_{r+1} - g_r) \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots), \tag{55}$$

[10]) O. Schlömilch, Zeitschr. f. Math. u. Phys. 18 (1873), S. 425; vgl. auch K. Knopp, Theorie und Anwendung der unendlichen Reihen, S. 116.

so folgt auch umgekehrt aus der Konvergenz von $\sum a_n$ jene von $\sum_{r=0}^{\infty}(g_{r+1}-g_r)a_{g_r}$.

Hier liegt eine unmittelbar erweiterungsfähige Form des Kriteriums, wenigstens für seinen *zweiten*, „notwendigen" *Teil*, ziemlich versteckt. Wir *verallgemeinern* diesen Teil in folgender, auch an sich nicht ganz uninteressanter Weise:

Satz 20. *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *eine konvergente Reihe mit einfach monoton zu Null strebenden Gliedern und* (γ_n) $(n=1,2,3,\ldots)$ *eine Folge reeller Zahlen, für die* $|\gamma_n|=O(n)$ *ist, so ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty}\Delta'\gamma_n a_n$ *konvergent, wenn* $\Delta'\gamma_n=\gamma_n-\gamma_{n-1}$,[11]) $\gamma_0=0$ *gesetzt wird.*

Beweis. Bei den angegebenen Voraussetzungen ist $a_n=\sum_{\nu=0}^{\infty}\Delta a_{n+\nu}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}n\Delta a_n$; mit der letzten Reihe konvergiert aber der O-Bedingung wegen auch $\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n\Delta a_n$. Nun ist bei partieller Summation

$$\sum_{\nu=1}^{n}\gamma_\nu\Delta a_\nu=\sum_{\nu=1}^{n}\Delta'\gamma_\nu a_\nu-\gamma_n a_{n+1}. \tag{56}$$

Hier zieht das aus der Monotonie von (a_n) fließende $na_n\to 0$ wegen der O-Bedingung $\gamma_n a_{n+1}\to 0$ nach sich, so daß aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty}\gamma_\nu\Delta a_\nu$ in (56) auch jene von $\sum_{\nu=1}^{\infty}\Delta'\gamma_\nu a_\nu$ folgt.

In dem soeben bewiesenen Satz ist in der Tat der zweite Teil des Verdichtungssatzes enthalten. Um auf die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty}(g_{r+1}-g_r)a_{g_r}$ jenes Satzes zu kommen, hat man ja nur für (γ_n) eine monoton wachsende Folge nicht negativer ganzer Zahlen zu wählen, die lediglich an den Stellen g_r je einen Sprung von der Größe $g_{r+1}-g_r$ macht, sonst aber konstant bleibt; die Ungleichung (55) verbürgt dann das Einhalten der O-Bedingung von Satz 20. Setzt man nämlich (55) für $r=0,1,2,\ldots,k-1$ an, so folgt durch Addition

$$g_{k+1}-g_1\leqq K(g_k-g_0) \tag{57}$$

oder mit einer passend vergrößerten Konstanten K'

$$g_{k+1}\leqq K'g_k. \tag{58}$$

Bei der oben beschriebenen Sprungweise der Folge (γ_n) wird aber mit $\gamma_0=0$ für $r=0,1,2,\ldots$ einfach

$$\gamma_{g_r}=g_{r+1}-g_0, \tag{59}$$

[11]) Beachte das Vorzeichen der Differenz!

so daß nach (58)

$$\gamma_{g_r} \leqq K' g_r \tag{60}$$

bleibt. Da endlich (γ_n) zwischen den Stellen g_r und g_{r+1} konstant bleibt, ist wirklich $\gamma_n \leqq K' n$.

Außer dem Verdichtungssatz aber kann man aus Satz 20 durch spezielle Wahl der Folge (γ_n) noch *andere Kriterien* gewinnen. Setzt man z. B. für (γ_n) die Folge

$$\gamma_{2\nu} = -\nu, \quad \gamma_{2\nu-1} = \nu \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{61}$$

die also mit $0, 1, -1, 2, -2, \ldots$ beginnt und der O-Bedingung von Satz 19 genügt, so folgt, daß mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n a_n$ konvergiert, falls die a_n monoton zu Null streben. Schreibt man b_n für $n a_n$, so resultiert der

Satz 21. *Die alternierende Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *konvergiert, wenn* $\frac{b_n}{n}$ *einfach monoton zu Null strebt und* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ *konvergiert.*

Der Satz geht insofern über das bekannte Leibnizsche Kriterium hinaus, als er nicht Monotonie der b_n fordert; andererseits kann er es (wegen der Konvergenzforderung) nicht ersetzen.

In der Form des Satz 20 läßt nun das Verdichtungskriterium in der Tat die jetzt naheliegende Erweiterung zu:

Satz 22. *Ist* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *eine konvergente Reihe mit* α*-fach monoton zu Null strebenden Gliedern* $(0 < \alpha < 1)$ *und* (γ_n) $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *eine Folge reeller Zahlen, für die* $|\gamma_n| = O(n^\alpha)$ *ist, so ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta' \gamma_n \Sigma^{1-\alpha} a_n$ *konvergent, wenn* $\Delta' \gamma_n = \gamma_n - \gamma_{n-1}$, $\gamma_0 = 0$ *gesetzt wird. (A fortiori ist dann auch* $\sum_{n=1}^{\infty} \Delta' \gamma_n a_n$ *konvergent.)*

Beweis. Bei den angegebenen Voraussetzungen ist nach Andersen[8]) $a_n = \Sigma^\alpha (\Delta^\alpha a_n)$ und

$$\Sigma^{1-\alpha} a_1 = \Sigma^{1+\alpha} (\Delta^\alpha a_1) = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha}{n} \Delta^\alpha a_n. \tag{62}$$

Wegen $\binom{n+\alpha}{n} \sim n^\alpha$ konvergiert also $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha \Delta^\alpha a_n$ und wegen der O-Bedingung des Satzes zugleich $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n \Delta^\alpha a_n$. Hier wird bei partieller Summation wegen $\Delta^\alpha a_n = \Delta (\Sigma^{1-\alpha} a_n)$

$$\sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \Delta^\alpha a_\nu = \sum_{\nu=1}^{n} \Delta' \gamma_\nu \Sigma^{1-\alpha} a_\nu - \gamma_n \Sigma^{1-\alpha} a_{n+1}. \tag{63}$$

Unter Verwertung des Satzes 7[12]) der Arbeit von Herrn Knopp:

$$n^\alpha \Delta^{\alpha-1} a_n = n^\alpha \Sigma^{1-\alpha} a_n \to 0,$$

der wegen der O-Bedingung auch $\gamma_n \Sigma^{1-\alpha} a_{n+1} \to 0$ nach sich zieht, folgt endlich aus der Konvergenz von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \gamma_\nu \Delta^\alpha a_\nu$ in (63) auch jene von $\sum_{\nu=1}^{\infty} \Delta' \gamma_\nu \Sigma^{1-\alpha} a_\nu$.

Auch hier erhält man natürlich, je nach Wahl der Folge (γ_n), verschiedene Sonderformen des Satzes. Setzt man insbesondere für $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\gamma_n = \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu+1} \nu^\alpha, \tag{64}$$

so wird

$$\Delta' \gamma_n = (-1)^{n+1} n^\alpha \tag{65}$$

und man erhält, wenn man $n^\alpha \Sigma^{1-\alpha} a_n = b_n$ setzt, also $a_n = \Delta^{1-\alpha}\left(\frac{b_n}{n^\alpha}\right)$, unter Berücksichtigung von

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Delta^{1-\alpha} \beta_n = \Sigma^\alpha \beta_1 \tag{66}$$

als Analogie von Satz 21 den

Satz 23. *Die alternierende Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} b_n$ *konvergiert, wenn* $\frac{b_n}{n^\alpha}$ *einfach monoton zu Null strebt und* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ *konvergiert.*

Dabei ist die Konvergenzbedingung mittels $\binom{r+\alpha-1}{r} \sim r^{-(1-\alpha)}$ aus der ursprünglichen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \binom{n+\alpha-2}{n-1} \frac{b_n}{n^\alpha} \tag{67}$$

umgeformt.

Jetzt erkennt man auch deutlich die Stellung des Leibnizschen Kriteriums gegenüber den hier aufgestellten: es ist einfach der (formale) Grenzfall für $\alpha = 0$, da die Konvergenzbedingung (67) dann fortfällt und nur die einfache Monotonie von (b_n) gefordert wird.

§ 8.

Wir suchen nunmehr nachträglich den *ersten*, „hinreichenden" *Teil des Verdichtungskriteriums* von § 7 auf nur α-fach monotone Reihenglieder $(0 < \alpha < 1)$ auszudehnen.

Des bequemen Ausdrucks halber verabreden wir:

Definition 6. *Eine Folge* (b_n) $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *heiße eine „rechtsberührende Folge" einer anderen* (a_n), *falls für unendlich viele In-*

[12]) Vgl. Knopp, l. c. S. 80.

izes r_ν $(\nu = 0, 1, 2, \ldots;\ r_0 = 0)$ $b_{r_\nu} = a_{r_\nu}$ *ist, während die eventuell da-wischenliegenden Glieder von* (b_n) *jeweils gleich dem nächstvorangehen-den* b_{r_ν} *sind:*

68) $$b_m = b_{r_\nu} \quad \text{für} \quad r_\nu < m < r_{\nu+1}.$$

Die Stellen r_ν *sollen die „Berührungsstellen" der beiden Folgen heißen. Die zu* (b_n) *gehörige (formal angesetzte) Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *heiße entsprechend „rechtsberührende Reihe".*

Der erwähnte erste Teil des Verdichtungssatzes sagt nun aus:

Eine Reihe $\sum a_n$ mit einfach monoton zu Null strebenden Gliedern onvergiert, sobald irgendeine sie rechtsberührende Reihe $\sum b_n$ konvergiert.

So trivial diese Aussage wegen der gleichzeitigen *Majoranteneigen-chaft* von $\sum b_n$ ist, so unwahrscheinlich erscheint zunächst die entsprechende Behauptung für $\alpha < 1$, da man doch dann die Berührungsstellen so wählen ann, daß $\sum b_n$ eine ausgesprochene *Minorante* von $\sum a_n$ wird.

Setzen wir, nur zur Bequemlichkeit, (a_n) als *wesentlich* α-fach monoton oraus (vgl. Definition 4), so können wir ja nach Satz 5 neben $a_{r_0} = a_0$ ählen: als a_{r_1} das erste auf a_{r_0} folgende *kleinere* Glied von (a_n), als a_{r_2} iederum das erste auf a_{r_1} folgende kleinere usf., allgemein für $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ ls $a_{r_{\nu+1}}$ das erste auf a_{r_ν} folgende kleinere Glied. Die in den so festge-gten Stellen r_ν rechtsberührende Reihe $\sum b_n$ ist dann nicht nur ihrer Kon-truktion nach Minorante zu $\sum a_n$, sondern ersichtlich auch zu jeder anderen echtsberührenden Reihe $\sum b_n'$; zudem ist (b_n) einfach monoton, und $\sum b_n$ uch die „größte" einfach monotone Minorante von $\sum a_n$.

Trotzdem somit die Situation für $\alpha < 1$ wesentlich ungünstiger er-cheint als für $\alpha = 1$, gilt

Satz 24. *Eine Reihe* $\sum a_n$ *mit wesentlich* α*-fach monoton zu Null trebenden Gliedern* $(0 < \alpha < 1)$ *konvergiert, sobald irgendeine sie rechts-erührende Reihe konvergiert.*

Beweis. Nach dem Vorangehenden genügt es, den Satz für die oben onstruierte Reihe $\sum b_n$ zu beweisen; für jede andere rechtsberührende eihe gilt er dann a fortiori.

Durch Abwurf höchstens endlich vieler Anfangsglieder und Neu-umerierung können wir stets erreichen, daß $a_1 > a_0$ wird, da (a_n) sonst einfach monoton wäre; dann ist aber $r_0 = 0$ und $r_1 \geqq 2$.

Bei Benutzung der Abkürzung aus (9) ist nun wegen $\sum_{\varrho=1}^{\infty} \alpha_\varrho = 1$:

69) $$\Delta^\alpha a_0 = a_0 - \sum_{\varrho=1}^{\infty} \alpha_\varrho a_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{\infty} \alpha_\varrho (a_0 - a_\varrho);$$

zerlegt man an der Stelle r_1, so folgt nacheinander:

$$
\begin{aligned}
0 < \Delta^\alpha a_0 &= \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} \alpha_\varrho (a_0 - a_\varrho) + \sum_{\varrho=r_1}^{\infty} \alpha_\varrho (a_0 - a_\varrho) \\
&< \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} \alpha_\varrho (a_0 - a_\varrho) + \sum_{\varrho=r_1}^{\infty} \alpha_\varrho a_0 \qquad (70) \\
&= \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} \alpha_\varrho (a_0 - a_\varrho) + a_0 \binom{r_1 - 1 - \alpha}{r_1 - 1},
\end{aligned}
$$

das letzte, weil aus den erzeugenden Funktionen (10) sogleich

$$
\sum_{\mu=m+1}^{\infty} \alpha_\mu = -\sum_{\mu=0}^{m} \alpha_\mu = \binom{m-\alpha}{m} \qquad (71)
$$

folgt. Es ist also:

$$
\sum_{\varrho=1}^{r_1-1} \alpha_\varrho (a_\varrho - a_0) < a_0 \binom{r_1 - 1 - \alpha}{r_1 - 1} \qquad (72)
$$

oder, da nach Voraussetzung für $r_0 = 0 < \varrho < r_1$ $a_\varrho - a_0 \geqq 0$ ist, unter Herausziehung des kleinsten α_ϱ:

$$
a_{r_1-1} \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} (a_\varrho - a_0) = -\binom{r_1 - 2 - \alpha}{r_1 - 1} \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} (a_\varrho - a_0) < a_0 \binom{r_1 - 1 - \alpha}{r_1 - 1}, \qquad (73)
$$

mithin

$$
\sum_{\varrho=1}^{r_1-1} (a_\varrho - a_0) < a_0 \frac{r_1 - 1 - \alpha}{\alpha} < a_0 \frac{r_1 - 1}{\alpha}, \qquad (74)
$$

oder auch

$$
\sum_{\varrho=1}^{r_1-1} a_\varrho < a_0 (r_1 - 1)\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} b_\varrho. \qquad (75)
$$

Es ist ja doch nach der Konstruktion der rechtsberührenden Folge (b_n) für $0 = r_0 < \varrho < r_1$ stets $b_\varrho = b_0 = a_0$.

In der Form

$$
\sum_{\varrho=1}^{r_1-1} (a_\varrho - b_\varrho) < \frac{1}{\alpha} \sum_{\varrho=1}^{r_1-1} b_\varrho \qquad (76)
$$

sagt (75) sozusagen aus, daß der zwischen den Berührungsstellen $r_0 = 0$ und r_1 gelegene „Buckel" der Reihe $\sum a_n$ das $\frac{1}{\alpha}$-fache des zugehörigen Minorantenabschnittes nicht erreicht.

Indem man jetzt die gleiche Schlußweise auf alle die Reste der Reihe $\sum a_n$ anwendet, die bei einem solchen Index r_ν beginnen, für den $r_{\nu+1} \geqq r_\nu + 2$ ist, erhält man für alle vorhandenen Buckel je eine (75) genau entsprechende Abschätzung. Vereinigt ergeben sie schließlich

$$
\sum_{\lambda=0}^{l} a_\lambda < \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \sum_{\varrho=0}^{l} b_\lambda \qquad (l = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (77)
$$

daß in der Tat aus der Konvergenz der Minorante $\sum b_n$ jene von $\sum a_n$ folgt.

§ 9.

Zum Schluß sei noch eine Erweiterung des bereits mehrfach zitierten atz 7 der Arbeit von Herrn Knopp[13]) gebracht.

Satz 25. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und ist für irgendein* $\omega \geqq 0$ *ie Folge* $\left(\frac{a_n}{n^\omega}\right)$ α*-fach monoton* $(0 < \alpha < 1)$, *so gilt für* $n \to \infty$

78) $$n^{\alpha+\omega} \sum^{1-\alpha} \left(\frac{a_n}{n^\omega}\right) \to 0.$$

Beweis. Setzt man $\frac{a_n}{n^\omega} = b_n$, so ist ja[8])

79) $$b_n = \sum^{\alpha} (\Delta^\alpha b_n).$$

Betrachtet man nun die wieder mit Abkürzung (9) geschriebenen Gleichungen

80)
$$\begin{aligned}
a_1 &= 1^\omega b_1 = 1^\omega \Delta^\alpha b_1 + 1^\omega \bar{\alpha}_1 \Delta^\alpha b_2 + 1^\omega \bar{\alpha}_2 \Delta^\alpha b_3 + \ldots \\
a_2 &= 2^\omega b_2 = \quad 2^\omega \Delta^\alpha b_2 + 2^\omega \bar{\alpha}_1 \Delta^\alpha b_3 + \ldots \\
a_3 &= 3^\omega b_3 = \quad 3^\omega \Delta^\alpha b_3 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

o ist in ihnen der Monotonievoraussetzung wegen rechts alles positiv; s gilt sonach die Umordnung

81) $$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} a_n = (1^\omega) \Delta^\alpha b_1 &+ (1^\omega \bar{\alpha}_1 + 2^\omega) \Delta^\alpha b_2 \\ &+ (1^\omega \bar{\alpha}_2 + 2^\omega \bar{\alpha}_1 + 3^\omega) \Delta^\alpha b_3 + \ldots\end{aligned}$$

Für die Klammern rechts in (81) aber erhält man bei Benutzung von $\binom{n+\omega}{n} \sim n^\omega$ leicht die Abschätzung

82) $$\sum_{\nu=1}^{n} \nu^\omega \bar{\alpha}_{n-\nu} \sim n^{\alpha+\omega}.$$

Nach (81) konvergiert also die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+\omega} \Delta^\alpha b_n$, und ihre Reste

83) $$\sum_{r=0}^{\infty} (n+r)^{\alpha+\omega} \Delta^\alpha b_{n+r} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

, fortiori also die Größen

84) $$n^{\alpha+\omega} \sum_{r=0}^{\infty} \Delta^\alpha b_{n+r} = n^{\alpha+\omega} \sum^{1-\alpha} \left(\frac{a_n}{n^\omega}\right)$$

treben mit wachsendem n gegen Null.

[13]) Knopp, l. c. S. 80.

Als Grenzfall für $\omega = 0$ enthält der eben bewiesene Satz in der Tat jenen von Herrn Knopp.

Die hier vorgenommene Erweiterung erscheint aus folgendem Grunde interessant:

Bekanntlich genügt für die Aussage, daß bei Konvergenz von $\sum a_n$ $n a_n \to 0$ gilt, bereits die Voraussetzung: $\left(\frac{a_n}{n^\omega}\right)$ einfach monoton für irgendein $\omega > 0$.[14])

Es könnte nun befremdlich erscheinen, daß sich für kleine Werte von ω nicht mehr herausholen läßt als für große, trotz des beträchtlichen Mehrumfangs der Voraussetzungen. (Durch Multiplikation mit $n^{-\omega}$ wird bei großem ω ja auch eine von Haus aus „wenig" monotone Folge sozusagen „monoton gewalzt".)

Bei der hier gegebenen Erweiterung für $\alpha < 1$ nun erhält man tatsächlich, je nach dem Werte von ω, mehr oder minder umfangreiche Aussagen, und nur für $\alpha = 1$ fallen alle diese sonst verschiedenen Sätze in *einen einzigen* zusammen, da sich $\sum^0 b_n$ auf ein einziges Glied reduziert.

Auch hier liefert endlich Satz 25 a fortiori als Verallgemeinerung des Satzes 8 von Herrn Knopp[15]) den

Satz 26. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *und ist für irgendein* $\omega \geqq 0$ *die Folge* $\left(\frac{a_n}{n^\omega}\right)$ α*-fach monoton* $(0 < \alpha < 1)$, *so gilt*

$$n^\alpha a_n \to 0. \tag{85}$$

Schließlich sei noch auf die Möglichkeit hingewiesen, den Satz in der Richtung zu erweitern, daß nicht Konvergenz, sondern nur β-Konvergenz $(0 < \beta < 1)$ von $\sum a_n$ vorausgesetzt wird.

---

[14]) Vgl etwa Pringsheim, *Vorlesungen über Zahlenlehre* (1916), S. 368.
[15]) Knopp, l. c. S. 84.

(Eingegangen am 25. November 1925.)

Note on Monotonic Sequences*).

Von

W. L. Ferrar in Oxford (England).

§ 1.

Introduction.

The ordinary notion of differences, $\Delta f_n = f_n - f_{n+1} \ldots$, was formally generalised by A. F. Andersen in a doctorate thesis[1]). $\Delta^\alpha f_n$, where α is not necessarily a positive integer, is defined by means of a convergent series (cf. (5) below). Recently Knopp[2]), using Andersen's work, introduced the notion of „mehrfach monotone Zahlenfolgen" e. g., sequences in which $\Delta^\alpha f_n \geqq 0$ for all values of n. His work is concerned chiefly with positive null-sequences, i. e., those which satisfy $f_n \geqq 0$, $f_n \to 0$.

The present note first discusses bounded sequences which are 'monotonic α', i. e., those which satisfy $|f_n| < K$, $\Delta^\alpha f_n \geqq 0$, for every n. Theorem I shows that Knopp's 'monotonic index' is applicable to such sequences, while Theorem II connects up with the well-known theorem concerning bounded sequences which are 'monotonic 1', i. e., monotonic in the ordinary sense. When $0 < \alpha < 1$, the results we have been able to obtain, apart from theorems I and II, are meagre unless we restrict the discussion to sequences tending to a unique limit.

The later sections of this note prove that a bounded 'monotonic α' sequence, which tends to a finite limit, is such that $\sum n^{\alpha-1} |\Delta^\alpha f_n|$ is convergent. Bounded sequences satisfying this condition were introduced,

*) Das Manuskript dieser Arbeit ging der Schriftleitung kurze Zeit nach demjenigen der vorstehenden Arbeit von Herrn Kaluza zu. Trotzdem beide Arbeiten vielfache Berührungspunkte haben, glaubten wir doch auch diese neue Note unverändert zum Abdruck bringen zu sollen, da sie auf andersartigen Wegen und unter neuen Gesichtspunkten an die Probleme herangeht. Schriftleitung.

[1]) Studier over Cesàro's Summabilitetsmetode, København (1921), Jul. Gjellerups Forlag.

[2]) Math. Zeitschr. 22 (1925), p. 75–85.

α *a positive integer*, as the result of researches fn Cesàro's summability method[3]). They contain 'monotonic α' sequences as a sub-class and apart from the properties given in Theorem II which are necessarily linked up with monotonic proporties, the sub-class appears to have no property which is not shared with the more general class. When α *is not a positive integer* the same facts continue to be in evidence, with this exception, that if $0 < \alpha < 1$, it has not yet been proved (and is probably not true) that *any* bounded 'monotonic α' sequence is such that $\sum n^{\alpha-1} \Delta^{\alpha} f_n$ is convergent. Andersen has given, in some detail, the theory of the more general type of sequence (Thesis, pp. 31—40).

There is one property of the general class of sequences which has hitherto, I think, been regarded as peculiar to the monotonic class. If $\sum a_n$ is a convergent sequence of positive terms and $\{a_n\}$ is 'monotonic α' $0 \leqq \alpha \leqq 1$, then $n^{\alpha} a_n \to 0$. That it is a property of the general class is shown in the concluding section of the present note.

§ 1.1. Notation and preliminary results.

$$A_n^r \equiv (n+r, n) \equiv \frac{(n+r)(n+r-1)\ldots(r+1)}{n!},$$

so that,

(1) $$A_n^r = O(n^r),$$

(2) $$> 0 \text{ when } r > -1,$$

(2a) $$\to 0 \text{ steadily when } 0 > r > -1, \text{ as } n \to \infty$$

(3) $$< 0 \text{ when } -2 < r < -1 \text{ for } n = 1, 2, \ldots,$$

and

(4) $$\sum_{p=0}^{n} A_p^r \equiv A_n^{r+1}.$$

If $\{e_n\}$ be any sequence, the series

(5) $$\sum_{p=0}^{\infty} A_p^{-\alpha-1} e_{n+p}, \text{ if it is convergent,}$$

defines $\Delta^{\alpha} e_n$. If the series is not convergent, $\Delta^{\alpha} e_n$ is not defined.

If $\alpha \geqq 0$ and the sequence $\{e_n\}$ is bounded, (5) is convergent[4]).

The two fundamental results established by Andersen (pp. 20, 21) for repeated operations are

(6) (I) If $e_n = O(1)$, $\Delta^s(\Delta^r e_n) = \Delta^{s+r} e_n$ whenever $s > -1$, $r > 0$, $r + s > 0$.

---

[3]) e. g. H. Hardy, Proc. London Math. Soc. (2) **4** (1907), p. 263; Bromwich Math. Annalen **65** (1908), p. 351.

[4]) Knopp, loc. cit., p. 77.

7) (II) If $e_n = o(1)$, $\Delta^s(\Delta^r e_n) = \Delta^{s+r} e_n$ whenever $s \geqq -1$, $r \geqq 0$, $r+s \geqq 0$.

Lemma. *If* $|e_n| < K$, $\eta_n = k \pm e_n$, *and* $\alpha > 0$, *then*

$$\Delta^\alpha \eta_n = \pm \Delta^\alpha e_n.$$

Proof. $$\Delta^\alpha \eta_n = \sum_{p=0}^{\infty} A_p^{-\alpha-1}(k \pm e_{n+p})$$

$$= \lim_{\nu \to \infty} \left[k \sum_{p=0}^{\nu} A_p^{-\alpha-1} \pm \sum_{p=0}^{\nu} A_p^{-\alpha-1} e_{n+p} \right]$$

$$= \lim \left[k A_\nu^{-\alpha} \pm \sum_{p=0}^{\nu} A_p^{-\alpha-1} e_{n+p} \right]$$

$$= \pm \Delta^\alpha e_n,$$

by result (4) and (2a).

We shall, in view of this lemma, establish theorems for the case $\Delta^\alpha \varepsilon_n \geqq 0$: the corresponding theorems for $\Delta^\alpha \varepsilon_n \leqq 0$ will be immediately deducible. Also, by taking $k = K$, η_n is positive or zero, so that we can confine our discussions to non negative sequences, the general results being obtainable from the special results so found by use of the lemma.

§ 2. Theorem I. *If* $\alpha > 0$, $|e_n| < K$, *and* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$ *for* $n = 0, 1, 2, \ldots$, *then* $\Delta^\beta e_n \geqq 0$ *whenever* $0 < \beta \leqq \alpha$.

Proof. By (6), if $0 < \delta < 1$, and $\alpha - 1 + \delta > 0$,

$$\Delta^{\alpha-1+\delta} e_n = \Delta^{-1+\delta}(\Delta^\alpha e_n)$$

$$= \sum_p A_p^{-\delta} \Delta^\alpha e_{n+p}.$$

But, by (2), and our hypotheses, each term of the sum is positive or zero, so that $\Delta^{\alpha-1+\delta} e_n \geqq 0$ for every n. That is

$$\Delta^k e_n \geqq 0 \text{ for } \alpha \geqq k > \alpha - 1, \text{ if } \alpha > 1, \quad \text{(I)}$$

$$\text{and for } \alpha \geqq k > 0 \quad \text{if } \alpha \leqq 1. \quad \text{(II)}$$

By repeated use of (I) we can prove our theoreme for $\alpha \geqq k \geqq \alpha - 1 + \lambda$, then for $\alpha - 1 + \lambda \geqq k \geqq \alpha - 2 + 2\lambda$, and so on, where λ is any arbitrary small positive number. Hence, if $[\alpha] = n$, n applications of (I) and a final application of (II) will prove the theorem for $\alpha \geqq k > 0$.

§ 3. Theorem II. (a) *If* $\alpha \geqq 1$, $|e_n| < K$, *and* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$, *the lower bound of the set* $\{e_n\}$ *is the unique limit point of that set and the sequence is a decreasiny monotonic sequence.*

(b) *If* $0 < \alpha < 1$, $|e_n| < K$, *and* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$, *the lower bound of the set* $\{e_n\}$ *is a limit point of that set, and the sub-sequence tending to the lower bound is a decreasing monotonic sequence.*

In view of the preliminary lemma of § 1. 1 we shall establish this result only for $e_n \geqq 0$.

Proof. (a) By theorem I, $\Delta e_n \geqq 0$. This part of the present theorem is therefore a direct consequence of the well-known property of ordinary monotonic sequences.

(b) By definition (5),

$$\Delta^\alpha e_n = e_n + \sum_{p=1}^{\infty} A_p^{-1-\alpha} e_{n+p}.$$

But, since $0 < \alpha < 1$, $A_p^{-1-\alpha}$, for $p = 1, 2, \ldots$, is negative, by (3). Hence, if e_n is not negative, $e_n - \Delta^\alpha e_n \geqq 0$, and

$$e_n - \Delta^\alpha e_n = \sum_{p=1}^{\infty} (-A_p^{-1-\alpha}) e_{n+p}. \tag{8}$$

By (4),

$$\sum_{p=1}^{n} A_p^{-1-\alpha} = A_n^{-\alpha} - 1,$$

and so, using (1),

$$\sum_{p=1}^{\infty} (-A_p^{-1-\alpha}) = 1. \tag{9}$$

The terms on the right hand side of (8) are all positive or zero. Thus, if L_n, G_n are the lower and upper bounds respectively of the set $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$, we have, from (8) and (9),

$$e_n - \Delta^\alpha e_n \geqq L_n, \quad \text{and} \quad e_n - \Delta^\alpha e_n \leqq G_n$$

i. e.,

$$e_n - G_n \leqq \Delta^\alpha e_n \leqq e_n - L_n. \tag{10}$$

§ 3. 1. There are now two possibilities to consider,

(I) L_n may be a member of the set $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$ for more than a finite number of values of n;

(II) L_n may be less than any member of the set $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$ for all save a finite number of values of n.

If now $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$ for every n, $e_n - L_n \geqq 0$ by (10), i. e. e_n is not less than the lower bound of the set $e_{n+1}, e_{n+2}, \ldots$.

$\therefore L_{n-1} = L_n$ for every positive n,

i. e., $L_0 = L_1 = L_2 = \ldots = L_n = L$, say.

Hence (I) above can arise only if there is an infinite sub-sequence $\{e_p\}$ such that each $e_p = L$. In such a case our theorem is evident.

If (II) is the case then, for n greater than some finite n_0, $L_n = L < e_n$. Also there is, for an arbitrary positive δ, some e_m such that

$$e_m - L < \delta \tag{11}$$

and some e_{n+p} such that

$$e_n \geqq e_{n+p} > L \tag{12}$$

for any $n > n_0$.

Hence there is at least one subsequence of $\{e_n\}$ which tends steadily downwards to L and our theorem is established.

§ 4. In this section we shall give theorems, somewhat trivial in themselves, concerning the behaviour of $\Delta^\alpha e_n$ as $n \to \infty$. Their interest is however, largely due to what they exclude rather than to what they include. If $\{e_n\}$ is a bounded sequence, $\alpha > 0$, and $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$ for every n, it would be interesting to know whether $\alpha = 1$ is actually the least value which ensures $\Delta^\alpha e_n \to 0$.

Theorem III. *If* $e_n \to e$, *then* $\Delta^\beta e_n \to 0$ *when* $\beta > 0$.

The preliminary lemma shows that this is true if it is true for positive null sequences. In this form the theorem is proved by Knopp (loc. cit. p. 77).

Theorem IVa. *If* $|e_n| < K$, $\alpha \geqq 1$, *and* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$, *then* $\Delta^\beta e_n \to 0$ *when* $\beta > 0$.

By Theorem I, the sequence $\{e_n\}$ is bounded monotonic and decreasing, so that it tends to a limit e. The present theorem is merely a particular case of III.

Theorem IVb. *If* $|e_n| < K$, $0 < \alpha < 1$, *and* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$, *there is a sub-sequence* $\{\Delta^\alpha e_p\}$ *which tends to zero.*

The theorem follows from (10) and the fact that a sub-sequence of the e's, say $\{e_p\}$, tends to L.

Theorem V. *If* $|e_n| < K$, $\alpha > 0$, *and* $\Delta^\alpha e_n \to 0$, *then, for any* $\beta \geqq 0$, $\Delta^{\alpha+\beta} e_n \to 0$.

By (7),

$$\Delta^{\alpha+\beta} e_n = \Delta^\beta (\Delta^\alpha e_n) = \sum A_p^{-1-\beta} \Delta^\alpha e_{n+p}.$$

Now V_n, the upper bound of $|\Delta^\alpha e_{n+p}|$ for $p = 0, 1, 2, \ldots$, tends to zero, and $\sum |A_p^{-1-\beta}|$ is convergent (cf. (1)). Hence $\Delta^{\alpha+\beta} e_n \to 0$.

§ 5. We will now show that the properties of positive monotonic null sequences lead to the following

Theorem VI. *If* e_n *is a positive null sequence for which* $\Delta^\alpha e_n \geqq 0$, *when* $\alpha > 0$, *then*

$$\sum_{p=0}^{\infty} A_p^{\alpha-1} \Delta^\alpha e_p$$

is convergent.

Corollary. *The theorem remains true if* $\{e_n\}$ *is a bounded sequence which tends to a finite limit*[5]).

Here again, if $\alpha \geqq 1$, e_n must tend to a unique limit, but if $0 < \alpha < 1$, this is not the case and we cannot assert anything about the convergence of the series for *any* bounded sequence.

This theorem established, we see that monotonic sequences are particular cases of the type considered by Andersen, loc. cit., who gives a very full account of their properties. In particular we have at once the conditions for repeated operations Δ^s, Δ^r given at the end of the present paper.

We shall first prove an auxiliary theorem.

§ 5. 1. A simple extension of Pringsheim's Theorem.

If u_n is a decreasing sequence of positive terms, and $\varphi(n)$ is positive and $O(n^k)$ where $k \geqq 0$, and if also $\sum u_n \Phi(n)$ is convergent, then $n^{k+1} u_n \to 0$.

Proof. The hypotheses imply that $\sum n^k u_n$ is convergent, so that if n be sufficiently large,

$$(n+1)^k u_{n+1} + (n+2)^k u_{n+2} + \ldots + (2n)^k u_{2n} < \delta;$$

a fortori,

$$n^k (u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n}) < \delta,$$

and

$$n^{k+1} u_{2n} < \delta.$$

Hence

$$(2n)^{k+1} u_{2n} \to 0.$$

Also

$$(2n+1)^{k+1} u_{2n+1} < \{(2n+1)/2n\}^{k+1} (2n)^{k+1} u_{2n} \to 0.$$

Hence

$$m^{k+1} u_m \to 0 \quad \text{when} \quad m \to \infty.$$

§ 5. 2. Proof of Theorem VI.

By (7), if $0 < \alpha \leqq 1$, $\Delta^{-\alpha}(\Delta^\alpha e_0) = \Delta^0 e_0 = e_0$ i. e., $\sum A_p^{\alpha-1} \Delta^\alpha e_p$ is convergent and has the sum e_0.

If $1 < \alpha \leqq 2$, then $0 < \alpha - 1 \leqq 1$, and, by the above

$$\sum A_p^{\alpha-2} \Delta^{\alpha-1} e_p \tag{13}$$

is convergent.

---

[5]) Knopp, loc. cit., 80—84, does essentially prove the theorem for $\alpha \geqq 1$, but his work is carried out with a convergent series of positive terms, and this somewhat obscures the point brought out by the present theorem.

But

$$14) \quad \sum_{p=0}^{n} A_p^{\alpha-2} \Delta^{\alpha-1} e_p = \sum_{p=0}^{n} (A_0^{\alpha-2} + \ldots + A_p^{\alpha-2})(\Delta^{\alpha-1} e_p - \Delta^{\alpha-1} e_{p+1}) + (A_0^{\alpha-2} + \ldots + A_n^{\alpha-2}) \Delta^{\alpha-1} e_{n+1}$$
$$= \sum_{p=0}^{n} A_p^{\alpha-1} \Delta^{\alpha} e_p + A_n^{\alpha-1} \Delta^{\alpha-1} e_{n+1}.$$

Moreover,

$$\Delta^{\alpha-1} e_p - \Delta^{\alpha-1} e_{p+1} = \Delta^{\alpha} e_p \geqq 0.$$

Thus, in (13), $\Delta^{\alpha-1} e_p$ is positive (since $\Delta^{\alpha} e_n \geqq 0$) and decreases steadily as p increases. Also $A^{\alpha-2}$ is positive (by (2)) and $O(n^{\alpha-2})$. Hence, by § 5. 1, $n^{\alpha-1} \Delta^{\alpha-1} e_n \to 0$, so that $A_n^{\alpha-1} \Delta^{\alpha-1} e_{n+1} \to 0$. Therefore, from (13) and (14), $\sum A_p^{\alpha-1} \Delta^{\alpha} e_p$ is convergent.

Similarly, if $2 < \alpha \leqq 3$, we have in succession

(I) $\sum A^{\alpha-3} \Delta^{\alpha-2} e_p$ is convergent.

(II) $n^{\alpha-2} \Delta^{\alpha-2} e_n \to 0$ and so $\sum A_p^{\alpha-2} \Delta^{\alpha-1} e_p$ is convergent.

(III) $n^{\alpha-1} \Delta^{\alpha-1} e_n \to 0$ and so $\sum A_p^{\alpha-1} \Delta^{\alpha} e_p$ is convergent.

In like manner for any positive value of α, we can proceed step by step from the convergence of $\sum A_p^{\alpha-k-1} \Delta^{\alpha-k} e_p$, where $k = [\alpha]$ when α is not integral, and $= \alpha - 1$ when α is a positive integer, to the convergence of $\sum A_p^{\alpha-1} \Delta^{\alpha} e_p$.

§ 5. 3. If we combine the last section with Theorem I, we see that, in the course of the last section, we have established that, under the hypotheses of Theorem V,

(a) $n^{\beta} \Delta^{\beta} e_n \to 0$ for $0 < \beta \leqq \alpha - 1$,

(b) $\sum A_p^{\beta-1} \Delta^{\beta} e_p$ is convergent for $0 < \beta \leqq \alpha$.

§ 6. If $\{a_n\}$ be a sequence of positive terms for which $\Delta^{\alpha} a_n \geqq 0$ and $\sum a_n$ is convergent, and we write

$$\eta_n = a_n + a_{n+1} + \ldots,$$

then η_n is a positive null sequence.

Also,

$$\alpha \geqq 0, \quad \Delta^{\alpha+1} \eta_n = \Delta^{\alpha} a_n.$$

The sequence η_n has $\Delta^{\alpha+1} \eta_n \geqq 0$, and (a) and (b) of § 5. 3 become

(a_1) $n^{\beta} \Delta^{\beta} \eta_n \to 0$ for $0 < \beta \leqq \alpha$,

(b_1) $\sum A_p^{\beta-1} \Delta^{\beta} \eta_n$ converges for $0 < \beta \leqq \alpha + 1$.

Further, by (7), since $\eta_n \to 0$,

$$\Delta^{\beta} \eta_n = \Delta^{\beta-1} (\Delta \eta_n) \quad \text{whenever} \quad \beta \geqq 0,$$

so that (a_2) $n^\beta \Delta^{\beta-1} a_n \to 0$ $\quad 0 \leqq \beta \leqq \alpha,$

(b_2) $\sum A_p^{\beta-1} \Delta^{\beta-1} a_p$ is convergent $\quad 0 < \beta \leqq \alpha + 1.$

§ 6. 1. If, in § 6, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $n^\alpha a_n \to 0$.

This follows at once from (a_2) and the inequality

$$\Delta^{\alpha-1} a_n = a_n + A_1^{-\alpha} a_{n+1} + \ldots \geqq a_n .$$

§ 6. 2. In conclusion, it should be mentioned that Knopp has already (loc. cit.) given some of the above properties, while Andersen's thesis contains the same properties (with the exception of the trivial change required to establish (a_2) and (b_2)) for the more general type of sequence considered in § 1. Namely, "if $\sum a_n$ is a convergent series of positive terms, $0 \leqq \alpha \leqq 1$, and $\sum A_p^\alpha |\Delta^\alpha a_p|$ is convergent, then $n^\alpha a_n \to 0$".

As before, $\sum A_p^\alpha |\Delta^{\alpha+1} \eta_p|$ is convergent, and so $n^\alpha \Delta^\alpha \eta_n \to 0$ or $n^\alpha \Delta^{\alpha-1} a_n \to 0$ (cf. Andersen, loc. cit. p. 34).

Further, it follows from Theorem VI and Andersen, Thesis pp. 21, 35, that, for a positive null sequence, 'monotonic α', $\Delta^s (\Delta^r e_n) = \Delta^{s+r} e_n$ whenever

$$s \geqq -\alpha, \quad r \geqq 0, \quad \text{and} \quad r + s \geqq 0.$$

(Eingegangen am 1. Januar 1926.)

Über affine Geometrie XLI: Die Geometrie zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten F_2 im affinen R_4.

Von

C. Burstin in Wien und W. Mayer in Wien.

Die vorliegende Arbeit zerfällt in zwei Abschnitte.

Im ersten Abschnitte wird das Formenproblem der F_2 im affinen R_4 behandelt, im zweiten Abschnitte die Geometrie der F_2 im affinen R_4 und insbesonders der Zusammenhang mit den Strahlensystemen im projektiven R_3. Die Anregung, diesen Zusammenhang herauszuarbeiten, verdanken wir Herrn W. Blaschke. Wir wollen hier kurz den Inhalt des zweiten Abschnittes besprechen.

Im ersten Paragraphen wird die Theorie der Strahlensysteme im projektiven R_3 gebracht. Als ausgeartet werden Strahlensysteme bezeichnet, deren Grundform $B_{pq}\,dy_p\,dy_q$, das ist die Form, deren Nullrichtungen die Torsen des Strahlensystems entsprechen, eine verschwindende Diskriminante besitzt, oder deren Brennfläche einen Mantel hat, der eine Kurve oder eine Torse ist.

Im zweiten Paragraphen werden die Flächen F_2 gesucht, deren Tangentialebenensysteme den R_3^∞ des R_4 in einem gegebenen Strahlensysteme schneiden. Man erhält sie durch Integration einer linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, somit enthält die allgemeinste dieser Flächen zwei willkürliche Funktionen. Wir nennen eine solche Gesamtheit von Flächen *Parallelflächen* und stellen einige ganz einfache Sätze über Parallelflächen auf. Von größerem Interesse sind die *konjugierten Flächen.*

Bezeichnen wir mit λ^p und μ^p die Nullrichtungen der Grundform $B_{pq}\,dy_p\,dy_q$ einer $F_2 : x_i(y_1\,y_2)$,[1]) so sind durch sie auf dieser F_2 zwei Kurvenscharen, die λ^p- und die μ^p-Nullinien gegeben. Sei nun $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i(y_1\,y_1)$ eine zweite F_2, deren Tangentialebene in korrespondierenden Punkten y_1, y_2

[1]) Das ist die Grundform des Strahlensystems, in dem der R_3^∞ von den Tangentialebenen der F_2 geschnitten wird.

der Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie der $F_2 : x_i$ parallel ist, so zeigt man zuerst, daß die $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$ ebenfalls λ^p und μ^p als Nullrichtungen besitzt, und weiter, daß die Tangentialebene der $F_2 : x_i$ in entsprechenden Punkten der Schmiegungsebene der μ^p Nullinie der $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$ parallel ist. Wir nannten zwei solche Flächen konjugiert. Das Bild hierzu im R_3^∞ liefert die Strahlensysteme der Schnitte der Tangentialebenen konjugierter Flächen. Sei nämlich $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$ das Strahlensystem des Schnittes der Tangentialebenen der $F_2 : x_i$, $\mathfrak{v}(y_1 y_2)$ jenes der $\tilde{F}_2 : \tilde{x}_i$, so haben diese beiden Strahlensysteme einen Mantel ihrer Brennflächen gemeinsam und tangieren ihn in konjugierten Richtungen.

Im dritten Paragraphen werden als Analogon der Strahlensysteme im R_3 die Ebenensysteme im R_4 behandelt. Unter einer Ebene ist hier eine E_2, unter einem Ebenensystem eine zweiparametrige Mannigfaltigkeit solcher E_2 verstanden. Auch hier gibt es eine *Brennfläche* B_3, die dreifach ausgedehnt ist und von jeder E_2 des Systems in den gemeinsamen Punkten tangiert wird. Der Schnitt eines solchen Ebenensystems mit einem R_3 des R_4 ist ein Strahlensystem dieses R_3, dessen Brennfläche der Schnitt der Brennfläche B_3 des Ebenensystems mit dem R_3 ist.

Von Interesse sind Ebenensysteme, deren Brennfläche ausartet, d. h. eine F_2 (oder Kurve) ist. Wir nennen sie ausgeartete Ebenensysteme; ihre Diskussion führt zu dem schönen Resultate: Die Schmiegungsebenen der λ^p- (resp. μ^p-) Nullinien einer F_2 hüllen selbst eine $\tilde{F}_2$ ein, deren μ^p- (resp. λ^p-) Nullinien-Schmiegungsebenen wieder die Fläche F_2 einhüllen.

Wir zeigen dann den projektiv invarianten Charakter der Nullinien auf Grundlage dieses Satzes. Ohne jede Integration erhält man also konjugierte Flächen $\tilde{F}_2$ zu einer gegebenen.

Das obige Resultat ist nur richtig für solche F_2, deren Tangentialebenen den R_3^∞ in einem nicht ausgearteten Strahlensysteme schneiden. Der Fall, wo eine der Mantelflächen dieses Strahlensystems eine Torse ist, wird gesondert behandelt. Die allgemeinste F_2 dieser Eigenschaft liegt auf einer Hypertorse T_3 des R_4. (Unter einer Hypertorse verstehen wir die Gesamtheit der Punkte der Schmiegungsebenen einer Raumkurve.)

I. Abschnitt.

Ein Formensystem der F_2 im affinen R_4.

Bezeichnung. $\sigma^i \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i, \ldots)$ bedeute, daß sich der Vektor σ^i linear durch die Vektoren $\xi^i, \eta^i, \ldots$ darstellen lasse, $\sigma^i \equiv \tau^i, \mod(\xi^i, \eta^i, \ldots)$ heißt $\sigma^i - \tau^i \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i, \ldots)$.

Die F_2 sei in der Parameterdarstellung

$$x_i = x_i(y_1, y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{1}$$

gegeben, wobei die Matrix

$$\left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_1} \; \frac{\partial x_i}{\partial y_2} \right\| \tag{1'}$$

den Rang 2 habe. Wir definieren in jedem Punkte der F_2 die affininvarianten Vektorräume, den Tangentialraum J_1, den die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_p}$ aufspannen und den Schmiegungsraum J_{12}, den die Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_p}$, $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}$ aufspannen.

Im R_4 muß zwischen den fünf Vektoren des J_{12} eine lineare Relation

$$B^{(pq)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} + C^{(p)} \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{2}$$

bestehen, in der wir $B^{(pq)} = B^{(qp)}$ voraussetzen dürfen. Wegen des Ranges der Matrix (1') muß (2) die Koeffizienten $B^{(pq)}$ wirklich enthalten. Wir schreiben die Relation (2) in der Gestalt

$$B^{(pq)} \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \equiv 0, \qquad \mathrm{mod}\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}, \frac{\partial x}{\partial y_2}\right). \tag{2'}$$

Setzen wir weiter voraus, daß für die gegebene F_2 der J_{12}-Raum tatsächlich vierdimensional ist[2]), so sind in (2) $B^{(pq)}$ und $C^{(p)}$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.

Um die Gleichung (2) von der Wahl des Parametersystems y_1, y_2 unabhängig zu machen, genügt es, $B^{(pq)}$ als kontravarianten Tensor zweiter Stufe anzusehen, wir werden daher in der Folge B^{pq} statt $B^{(pq)}$ schreiben.

Aus (2) berechnet man $B^{pq} = pC^{(pq)}$, wobei $C^{(pq)}$ durch die Determinanten

$$\begin{cases} C^{(11)} = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2}\right), \\ 2C^{(12)} = -\left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_2^2}\right), \\ C^{(22)} = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1} \; \frac{\partial x}{\partial y_2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1^2} \; \frac{\partial^2 x}{\partial y_1 \partial y_2}\right) \end{cases} \tag{3}$$

gegeben ist. Schließlich bezeichnen wir

$$C^{(11)} = D_{(22)}, \qquad -C^{(12)} = D_{(12)}, \qquad C^{(22)} = D_{(11)}.$$

§ 1.

Der einer der Ausgangsformen adjungierte Vektor ζ^i und der adjungierte Affinnormalraum.

Durch (2) resp. (2') ist die Form B^{pq} bis auf einen Faktor bestimmt, wir wollen jede Form dieser Gesamtheit als eine Ausgangsform bezeichnen,

[2]) Flächen, für die der J_{12}-Raum eine kleinere Dimension hat, liegen ganz in einem R_3 oder es sind Torsen.

da die in der Folge definierten Invarianten der F_2 von der speziellen Wahl der Ausgangsform abhängen. Zuletzt werden wir sehen, wie man aus der Gesamtheit der Ausgangsformen bestimmte affininvariant fixieren kann. Die Voraussetzung

$$|B^{pq}| \neq 0 \tag{4}$$

ist natürlich von der speziellen Wahl der Ausgangsform unabhängig. Treffen wir sie, so sind Flächen ausgeschaltet, deren System von partiellen Differentialgleichungen man leicht in die Form $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1^2} = A\frac{\partial x_i}{\partial y_1} + B\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$ bringen kann. Zu ihnen gehören die Regelflächen.

Infolge der Voraussetzung (4) existiert der kovariante Tensor B_{pq}, für den die Relationen gelten

$$B^{pr}B_{qr} = \delta_{pq} = \begin{matrix} 0 \text{ für } p \neq q \\ 1 \text{ für } p = q \end{matrix}.$$

Die Determinante

$$\Delta = |B_{pq}| \tag{5}$$

ist wegen (4) von Null verschieden. ($|B^{pq}| = \Delta^{-1}$). Für B_{pq} erhalten wir

$$B_{11} = \Delta B^{22}, \quad B_{12} = -\Delta B^{12}, \quad B_{22} = \Delta B^{11}, \tag{6}$$

also $B_{pq} = f \cdot D_{pq}$.

Nun definieren wir den Vektor ζ^i

$$\zeta^i = B^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \left\{\begin{matrix} pq \\ r \end{matrix}\right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) = B^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r} \tag{7}$$

(infolge (2)), und mit seiner Hilfe die drei Vektoren

$$\eta^i_{rs} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} - \left\{\begin{matrix} rs \\ t \end{matrix}\right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_t} - \frac{1}{2} B_{rs}\zeta^i. \tag{8}$$

Der durch die Vektoren η^i_{rs} aufgespannte Vektorraum ist ersichtlich von der Wahl der Parameter y_1, y_2 unabhängig und wegen

$$B^{rs}\eta^i_{rs} = 0 \tag{9}$$

ist er höchstens zweidimensional. Nun zeigen wir, daß er wirklich zweidimensional ist und mit dem Tangentialraum J_1 keinen Vektor gemeinsam hat. Sonst bestünde noch eine von (9) unabhängige Beziehung

$$T^{rs}\eta^i_{rs} \equiv 0, \quad \mod\left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\ \frac{\partial x}{\partial y_2}\right), \tag{10}$$

aus der

$$T^{rs}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_r \partial y_s} \equiv 0, \quad \text{also } T^{rs} = \alpha B^{rs}$$

folgte, und (10) wäre gegen Voraussetzung von (9) abhängig.

Wir nennen den zweidimensionalen Vektorraum η^i_{rs} den der Ausgangs-

form B^{pq} adjungierten Affinnormalraum. (Bildet man die Geodätischen in bezug auf die Ausgangsform B^{pq}, $x_i = x_i(s)$, so liegen die Endpunkte aller Vektoren $\frac{d^2x_i}{ds^2}$ $(ds^2 = B_{pq}\,dy_p\,dy_q)$ in einem Punkte P der F_2 in einer dem Affinnormalraum parallelen E_2.) Jeder Vektor λ^i in einem Punkte P der F_2 hat nun seine eindeutige Darstellung als Summe seiner Komponenten im Tangential- und Affinnormalraum. Insbesonders notieren wir die Darstellung

$$(11)\qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q} - \left\{ \begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix} \right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = T^r_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}},$$

wo $\underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}}$ die Komponente im Normalraum bezeichne. Der Vergleich von (8) und (9) ergibt

$$(12)\qquad \underline{\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q}} = \eta^i_{pq} \quad \text{und} \quad T^r_{pq} = \frac{1}{2}B_{pq}B^r.$$

In der Folge werden wir die Darstellung

$$(13)\qquad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p\,\partial y_q} = \Gamma^r_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} + \eta^i_{pq}$$

verwenden, wo dann

$$(14)\qquad \Gamma^r_{pq} = \left\{ \begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix} \right\}_B + \frac{1}{2}B_{pq}B^r$$

ist. Wir werden künftig B_{pq} als Koppelungstensor verwenden und von Vektoren schlechtweg sprechen, da dann jeder Vektor seine kovariante wie seine kontravariante Darstellung hat.

§ 2.

Affininvariante Vektoren im Tangential- und Affinnormalraum.

Seien ϱ^p und σ^p $(p = 1, 2)$ orthogonale Einheitsvektoren der F_2 in bezug auf B_{pq} als Maßtensor, für die also

$$\varrho_p\sigma^p = 0, \quad \varrho_p\varrho^p = 1, \quad \sigma_p\sigma^p = \pm 1 \begin{matrix} \text{für } \Delta > 0 \\ \text{„ } \Delta < 0 \end{matrix}$$

gelte. Um diese Vektoren fixieren zu können, *setzen wir* $B^p \neq 0$ *voraus* $(\zeta^i \neq 0)$.

(Das System der Differentialgleichungen der F_2, für die $B^p = 0$ ist, läßt sich in die Form bringen:

$$\Delta < 0\colon \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1\,\partial y_2} = 0, \quad \text{also} \quad (x_i = \Phi_i y_1) + \Psi_i(y_2),$$

$$\Delta > 0\colon \quad \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2^2} = 0, \quad \text{also} \quad x_i = \Phi_i(u + \sqrt{-1}\,v) + \Phi_i(u - \sqrt{-1}\,v),$$

und umgekehrt ist für solche Flächen $B^p = 0$.)

Ist dann $B = B_{pq} B^p B^q \neq 0$, so setzen wir ϱ^p oder σ^p gleich αB^p, je nachdem $B > 0$ oder $B < 0$ ist.

Ist $B = 0$ und ist C^p die wegen $|B_{pq}| \neq 0$ von B^p verschiedene zweite Nullrichtung der Form $B_{pq} dy_p dy_q$, so fixieren wir C^p durch die Relation $C_p B^p = 1$ und setzen

$$\varrho^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^p + C^p), \qquad \sigma^p = \frac{1}{\sqrt{2}}(B^p - C^p).$$

Damit sind die Vektoren ϱ_p und σ_p durch die Tensoren B_{pq} und B_p fixiert.

Die Endpunkte der Vektoren $\eta^i_{pq} \frac{dy_p}{ds} \frac{dy_q}{ds}$, $ds^2 = B_{pq} dy_p dy_q$, beschreiben im Affinnormalraum einen Kegelschnitt, der für $\Delta > 0$ eine Ellipse, für $\Delta < 0$ eine Hyperbel ist. Man zeigt auch leicht, daß die Vektoren

$$(15) \qquad {}_{(1)}\lambda^i = \eta^i_{pq} \varrho^p \varrho^q, \qquad {}_{(2)}\lambda^i = \eta^i_{pq} \varrho^p \sigma^q$$

konjugierte Durchmesser dieses Kegelschnittes sind. Infolge ihrer linearen Unabhängigkeit gilt die Darstellung

$$(16) \qquad \eta^i_{pq} = {}_{(\alpha)}B_{pq}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i, \qquad \alpha = 1, 2,$$

in der die Koeffizienten ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ symmetrische Tensoren sind. Aus (15) und (16) folgt

$$(17) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}B_{pq} \varrho^p \varrho^q = 1, & {}_{(2)}B_{pq} \varrho^p \varrho^q = 0, \\ {}_{(1)}B_{pq} \varrho^p \sigma^q = 0, & {}_{(2)}B_{pq} \varrho^p \sigma^q = 1. \end{cases}$$

Aus (17) und $B^{pq}\, {}_{(\alpha)}B_{pq} = 0$ (wegen $B^{pq} \eta^i_{pq} = 0$) lassen sich die ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ berechnen, und zwar erhält man:

$$(18) \qquad \begin{cases} {}_{(1)}B_{pq} = \varrho_p \varrho_q \mp \sigma_p \sigma_q & \begin{matrix} \text{für } \Delta > 0 \\ \text{„ } \Delta < 0 \end{matrix} \\ {}_{(2)}B_{pq} = \pm (\varrho_p \sigma_q + \varrho_q \sigma_p) & \begin{matrix} \text{für } \Delta > 0 \\ \text{„ } \Delta < 0. \end{matrix} \end{cases}$$

Somit sind die Formen ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ durch die Tensoren B_{pq} und B_p bestimmt.

§ 3.

Das vollständige Formensystem der F_2.

Im Systeme totaler Differentialgleichungen

$$(19) \qquad \begin{cases} dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p} dy_p, \\ d\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \left(\Gamma^r_{pq} \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + {}_{(\alpha)}B_{pq}\, {}_{(\alpha)}\lambda^i\right) dy_q, \\ d\, {}_{(\alpha)}\lambda^i = \left({}_{(\alpha)}\sigma^r_t \frac{\partial x_i}{\partial y_r} + {}_{(\alpha\beta)}C_t\, {}_{(\beta)}\lambda^i\right) dy_t \end{cases}$$

sind die Koeffizienten Γ^r_{pq} und ${}_{(\alpha)}B_{pq}$ durch die Tensoren B_{pq} und B_q bestimmt. Wir können demnach das System von Tensoren

$$B_{pq}, \quad B_p, \quad {}_{(\alpha)}\sigma^r_t \text{ und } {}_{(\alpha\beta)}C_t \tag{20}$$

als ein vollständiges Formensystem der F_2 ansehen. Aus den Integrabilitätsbedingungen des Systems (19) kann man aber die Tensoren (20) durch das Teilsystem

$$B_{pq}, \quad B_p, \quad \sum_{r=1}^{2} {}_{(\alpha)}\sigma^r_r \quad (\alpha = 1, 2), \quad {}_{(11)}C_t \text{ und } {}_{(22)}C_t \tag{21}$$

von (20) berechnen, so daß (21) ein vollständiges Formensystem der F_2 darstellt. Den Beweis, der eine längere Rechnung erfordert, die wenig instruktiv ist, wollen wir hier nicht bringen, er verläuft wie die analogen Beweise dieser Art; ein Teil der Integrabilitätsbedingungen dient zur Berechnung der Tensoren (20) aus den Tensoren des Systems (21), und was dann an Integrabilitätsbedingungen übrigbleibt, sind die Integrabilitätsbedingungen für die Formenkoeffizienten (21), die erfüllt sein müssen, damit diesem Systeme eine F_2 entspricht.

Es gilt nämlich der Satz:

Entspricht ein System (21) *den erwähnten Integrabilitätsbedingungen, so gibt es stets eine bis auf affine Transformation bestimmte* F_2, *die dieses Formensystem besitzt.*

Beweis. Das System (19) ist dann total integrierbar. Sei

$$x_i = x_i(y_1\, y_2), \qquad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}(y_1\, y_2), \qquad {}_{(\alpha)}\lambda^i = {}_{(\alpha)}\lambda^i(y_1\, y_2)$$

ein Integralsystem von (19). Dann folgt wegen $B^{pq}\,{}_{(\alpha)}B_{pq} = 0$ aus der zweiten Gleichung (19)

$$B^{pq}\frac{\partial^2 x_l}{\partial y_p\, \partial y_q} \equiv 0, \qquad \mod\left(\frac{\partial x_l}{\partial y_1}, \frac{\partial x_l}{\partial y_2}\right),$$

also ist B^{pq} eine Ausgangsform für die $F_2 : x_i = x_i(y_1\, y_2)$.

Das der Ausgangsform B^{pq} zugeordnete Formensystem (21) dieser F_2 bezeichnen wir

$$B_{pq}, \quad \overline{B}_p, \quad {}_{(1)}\overline{\sigma}^r_r, \quad {}_{(2)}\overline{\sigma}^r_r, \quad {}_{(11)}\overline{C}_t, \quad {}_{(22)}\overline{C}_t,$$

und beweisen $\overline{B}_p = B_p$.

In der Tat ist $\overline{B}^p$ durch

$$\left(\frac{\partial^2 x_l}{\partial y_p\, \partial y_q} - \left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_B \frac{\partial x_l}{\partial y_r}\right) B^{pq} = \frac{\partial x_l}{\partial y_r}\,\overline{B}^r \tag{22}$$

definiert. Aus der zweiten Gleichung (19) folgt aber für die linke Seite von (22):

$$\left(\Gamma^r_{pq} - \left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_B\right) B^{pq}\frac{\partial x_l}{\partial y_r} = \left(\frac{1}{2}\,B_{pq}\,B^r\right) B^{pq}\frac{\partial x_l}{\partial y_r} = B^r\,\frac{\partial x_l}{\partial y_r},$$

somit $\overline{B}^r = B^r$, q. e. d.

Bezeichnen wir die Koeffizienten des der $F_2 : x_i = x_i(y_1\, y_2)$ in bezug auf die Ausgangsform B^{pq} entsprechenden Systems (19) ebenfalls mit Querstrichen, so gilt nach dem bisher bewiesenen $\bar{\Gamma}^r_{pq} = \Gamma^r_{pq}$ und ${}_{(\alpha)}\bar{B}_{pq} = {}_{(\alpha)}B_{pq}$. Ebenfalls gilt für die im § 2 definierten Vektoren $\bar{\varrho}^p = \varrho^p$ und $\bar{\sigma}^p = \sigma^p$.

Aus der zweiten Gleichung (19) folgt aber dann ${}_{(1)}\lambda^i = \eta^i_{pq}\varrho^p\varrho^q$ und ${}_{(2)}\lambda^i = \eta^i_{pq}\varrho^p\sigma^q$, somit haben diese Vektoren die Bedeutung der im § 2 definierten, den Affinnormalraum aufspannenden Vektoren. Daraus aber folgen die Relationen ${}_{(\alpha)}\bar{\sigma}^r_p = {}_{(\alpha)}\sigma^r_p$ und ${}_{(\alpha\beta)}\bar{C}_t = {}_{(\alpha\beta)}C_t$. Somit hat die integrierte F_2 in der Tat das gegebene Formensystem (21).

§ 4.

Der Ausgangstensor A_{pq}, für F_2, für die $B_{pq}B^pB^q \neq 0$ ist, der invariant in bezug auf jede affine Transformation ist.

Wir untersuchen, wie sich der Vektor B^p ändert, der der Ausgangsform B^{pq} adjungiert ist, sobald man

$$\bar{B}^{pq} = \alpha B^{pq} \tag{23}$$

statt B^{pq} als Ausgangsform nimmt. $\bar{B}^p$ sei der der Form $\bar{B}^{pq}$ adjungierte Vektor, er ist durch

$$\bar{B}^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_t}{\partial y_p\,\partial y_q} - \left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_{\bar{B}} \frac{\partial x_t}{\partial y_r}\right) = \bar{B}^r \frac{\partial x_t}{\partial y_r} \tag{24}$$

definiert. Nun folgt aus (23)

$$\bar{B}^{pq}\left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_{\bar{B}} = \alpha B^{pq}\left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_{B}$$

infolge der Bildung der Christoffelklammern $\left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}$. Somit ist die linke Seite von (24) gleich $\alpha B^r \frac{\partial x_t}{\partial y_r}$ und wir erhalten

$$\bar{B}^r = \alpha B^r. \tag{25}$$

Der Vektor B^r definiert uns demnach eine von der Wahl des Ausgangstensors unabhängige Richtung auf der F_2. Wir berechnen nun aus (23) und (25) $\bar{B} = \bar{B}_{pq}\bar{B}^p\bar{B}^q$, da nach (23) $\bar{B}_{pq} = \alpha^{-1}B_{pq}$ gilt, erhalten wir

$$\bar{B} = \alpha B. \tag{26}$$

Aus (26) folgt, daß $B = 0$ eine invariante Eigenschaft der F_2 ist. Infolge der Voraussetzung dieses Paragraphen kann man den Ausgangstensor

$$A^{pq} = B^{-1}B^{pq} \quad \text{(für den } B = 1 \text{ ist)} \tag{27}$$

bilden, der wegen (23), (26) eine Invariante gegen jede affine Transformation ist. Es gilt dann der Satz: Ist ein Formensystem (21) gegeben, das den Integrabilitätsbedingungen genügt, gilt ferner die Beziehung

$$B_{pq}B^pB^q = 1,$$

so gibt es stets eine bis auf affine Transformation bestimmte F_2, die dieses Formensystem besitzt, und weiter ist B_{pq} die eben definierte Form A_{pq} dieser F_2. Der Satz folgt aus dem entsprechenden des § 3. In der Tat ist das Formensystem das Formensystem jeder durch Integration des Systems (19) gewonnenen Fläche F_2. $B_{pq} B^p B^q = 1$ ist aber die für den Ausgangstensor A^{pq} charakteristische Gleichung, somit ist $B^{pq} = A^{pq}$.

§ 5.

Der Ausgangstensor V_{pq}, der affininvariant ist in bezug auf volumtreue Transformationen.

Bezeichnen wir mit N die Determinante

$$N = \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial y_2}\ {}_{(1)}\lambda\ {}_{(2)}\lambda\right), \tag{28}$$

so ist N affininvariant gegen volumtreue Transformationen und

$$\varepsilon = \frac{N^2}{\Delta}. \tag{29}$$

eine Invariante in bezug auf solche Transformationen. Setzen wir für ${}_{(1)}\lambda^i$ und ${}_{(2)}\lambda^i$ ihre Ausdrücke (15) in N ein und berücksichtigen wir $\eta^i_{pq} \equiv \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}$, $\mod\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} N &= \left(\frac{\partial x}{\partial y_1}\frac{\partial x}{\partial y_2}\frac{\partial^2 x}{\partial y_p \partial y_1}\frac{\partial^2 x}{\partial y_q \partial y_1}\right)\varrho^p \varrho^q (\varrho^1\sigma^2 - \varrho^2\sigma^1) \\ &= D_{(pq)}\varrho^p\varrho^q(\varrho^1\sigma^2 - \varrho^2\sigma^1). \end{aligned} \tag{30}$$

Nun ist

$$B^{pq} = \varrho^p\varrho^q \pm \sigma^p\sigma^q \quad \begin{matrix} \text{für} & \Delta > 0 \\ \text{„} & \Delta < 0, \end{matrix}$$

woraus $(\varrho^1\sigma^2 - \varrho^2\sigma^1)^2 = \pm |B^{pq}|$ folgt. Somit lautet (30)

$$N = \frac{D_{(pq)}\varrho^p\varrho^q}{\sqrt{|\Delta|}}. \tag{31}$$

Für unsere Ausgangsform B_{pq} gilt $B_{pq} = \alpha D_{(pq)}$ und also

$$B_{pq}\varrho^p\varrho^q = 1 = \alpha D_{(pq)}\varrho^p\varrho^q,$$

also erhalten wir

$$N = \frac{1}{\alpha\sqrt{|\Delta|}}. \tag{32}$$

Bezeichnen wir $D = |D_{(pq)}|$, so gilt $\Delta = \alpha^2 D$ und für N

$$N = \frac{1}{\alpha^2\sqrt{|D|}}, \tag{33}$$

somit ist N nur von der Wahl des Ausgangstensors, nicht aber von der der orthogonalen Einheitsvektoren ϱ^p, σ^p abhängig. Für $\sqrt{\varepsilon}$ erhalten wir

$$\frac{N}{\sqrt{|\Delta|}} = \frac{1}{\alpha^3 |D|}. \tag{34}$$

Für die Ausgangsformen

$$B_{pq} = \text{konst.} \frac{D_{(pq)}}{\sqrt[3]{|D|}} \tag{35}$$

und nur für diese ist somit die Invariante ε konstant. Mit V_{pq} bezeichnen wir die Ausgangsform, für die $\varepsilon = 1$ ist.

$$V_{pq} = \frac{D_{(pq)}}{\sqrt[3]{|D|}}. \tag{35'}$$

Wir zeigen nun, daß für die Formen (35) *eine Reduktion des Formensystems* (21) *eintritt.* Aus (28) folgt wegen (19):

$$\frac{\partial l N}{\partial y_t} = \Gamma^a_{at} + {}_{(a\,a)}C_t,$$

ferner ist bekanntlich

$$\frac{\partial l \sqrt{|\Delta|}}{\partial y_t} = \left\{ \begin{matrix} \alpha\, t \\ \alpha \end{matrix} \right\}_B,$$

somit gilt

$$\frac{\partial l \dfrac{N}{\sqrt{|\Delta|}}}{\partial y_t} = \Gamma^a_{a\,t} - \left\{ \begin{matrix} \alpha\, t \\ \alpha \end{matrix} \right\}_B + {}_{(a\,a)}C_t = \frac{B_t}{2} + {}_{(a\,a)}C_t. \tag{36}$$

Für die Formen (35) verschwindet aber die linke Seite und wir erhalten:

$$B_t = -2\,{}_{(a\,a)}C_t. \tag{37}$$

Es gilt endlich der Satz: Entspricht ein Formensystem (21) den Integrabilitätsbedingungen und außerdem der Beziehung (37), so gibt es eine bis auf affine volumtreue Transformation bestimmte F_2, die dieses Formensystem besitzt und für die $B^{pq} = V^{pq}$ ist. In der Tat besitzt ja jede integrierte F_2 das Formensystem (21), wählen wir die Anfangslage bei der Integration in einem Punkte P noch so, daß $\varepsilon = 1$ wird, so ist nach (36) längs der ganzen F_2 $\varepsilon = 1$, d. h. $B^{pq} = V^{pq}$.

II. Abschnitt.

Parallelflächen. konjugierte Flächen, Ebenensysteme.

§ 1.

Das Strahlensystem im projektiven R_3.

Wir machen den R_3 zum uneigentlichen R_3^∞ eines affinen R_4, die Punkte des R_3^∞ sind dann die Richtungen des affinen R_4 und die Gruppe ihrer Transformationen ist ersichtlich:

$$G\colon \bar{x}_i = a_{ik} x_k, \qquad \bar{x}_i = \lambda(x_1 \ldots x_4)\, x_i \quad (i, k = 1, \ldots, 4).$$

Der Strahl $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$ des Strahlensystems sei durch zwei seiner Punkte gegeben ξ^i, η^i:

$$x_i = \alpha \xi^i(y_1 y_2) + \beta \eta^i(y_1 y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4), \tag{38}$$

dabei ist die besondere Wahl des Punktepaares ξ^i, η^i ohne Bedeutung, es kann stets durch ein zweites Punktepaar

$$\bar{\xi}^i = A\xi^i + B\eta^i, \qquad \bar{\eta}^i = C\xi^i + D\eta^i, \qquad AD - BC \neq 0 \tag{39}$$

ersetzt werden. Jedem Wertepaar y_1, y_2 eines gewissen Gebietes der y_1, y_2-Ebene entspricht dann im R_3^∞ ein Strahl $\mathfrak{p}(y_1, y_2)$, (ξ^i, η^i) des Strahlensystems und dem unendlich benachbarten Wertepaar $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entspricht der dem Strahle (38) unendlich benachbarte Strahl

$$\begin{aligned} \bar{\xi}_i &= \xi^i(y + dy) = \xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} dy_p + \ldots, \\ \bar{\eta}^i &= \eta^i(y + dy) = \eta^i + \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} dy_p + \ldots . \end{aligned} \tag{38'}$$

Wir fragen nun nach den Richtungen dy_p, für die $\bar{\mathfrak{p}}$ bei Berücksichtigung der Entwicklungsglieder bis zur ersten Ordnung den Strahl $\mathfrak{p}$ schneidet.

Für diese Richtungen muß eine Relation

$$\mathsf{A}\left(\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} dy_p\right) + \mathsf{B}\left(\eta^i + \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} dy_p\right) \equiv 0, \qquad \mod (\xi^i, \eta^i), \tag{40}$$

mit Größen A, B bestehen, die nicht zugleich verschwinden. Daraus folgt für dy_p

$$\left(\xi^i \eta^i \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \frac{\partial \eta^i}{\partial y_q}\right) dy_p dy_q = B_{pq} dy_p dy_q = 0. \tag{41}$$

Die Nullrichtungen der Form (41), denen die Torsen des Strahlensystems entsprechen, *mögen nicht zusammenfallen*:

$$|B_{pq}| \neq 0. \tag{41'}$$

Wir bezeichnen sie mit λ^p und μ^p, *die Form* B_{pq} *nennen wir die Grundform des Strahlensystems* $\mathfrak{p}$. $\frac{\lambda^1}{\lambda^2}$ und $\frac{\mu^1}{\mu^2}$ sind die beiden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$0 = B_{11}\varrho^2 + 2B_{12}\varrho + B_{22} = \left(\xi^i, \eta^i, \frac{\partial \xi^i}{\partial y_1}\varrho + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_2}, \frac{\partial \eta^i}{\partial y_1}\varrho + \frac{\partial \eta^i}{\partial y_2}\right) = f(\varrho). \tag{41''}$$

Setzt man in (40) $dy_p = \lambda^p$ (resp. $= \mu^p$), *so sind* A *und* B *bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt.* Sonst müßte

$$\mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \qquad C\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + D\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \qquad \mod (\xi^i, \eta^i),$$

mit $AD - BC \neq 0$ bestehen, was $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, $\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, $\mod(\xi^i, \eta^i)$ zur Folge hätte. Dann aber wäre $\frac{\lambda^1}{\lambda^2}$ auch Wurzel der Gleichung $f'(\varrho)$, somit Doppelwurzel von $f(\varrho)$ gegen Voraussetzung (41'). Geht man dann in der Relation (40) zur Grenze über $\lim dy_p \to 0$, so erhält man für den Schnittpunkt von $\mathfrak{p}(y_1, y_2)$, $\mathfrak{p}(y_1 + \varepsilon\lambda^1, y_2 + \varepsilon\lambda^2)$ $(\lim \varepsilon \to 0)$ den Punkt $\xi_1^i = \mathsf{A}\xi^i + \mathsf{B}\eta^i$.

Resultat. Die unendlich benachbarten Strahlen, die den Nullrichtungen λ^p, μ^p der Form (41) entsprechen, schneiden den Strahl $\mathfrak{p}$ in zwei Punkten ξ_1^i, η_1^i

$$(42)\quad \begin{cases} \xi_1^i = \mathsf{A}\xi^i + \mathsf{B}\eta^i, & \text{wobei } \mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i) \\ \eta_1^i = C\xi^i + D\eta^i, & \text{„} \quad C\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\mu^p + D\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i) \end{cases}$$

ist.

Bemerkung. Es ist sofort ersichtlich, daß die Schnittpunkte ξ_1^i, η_1^i unabhängig sind von der besonderen Wahl der Punkte ξ^i, η^i des Strahles $\mathfrak{p}$ und invariant sind in bezug auf die Transformationen der Gruppe G. Die Punkte ξ_1^i, η_1^i bilden die beiden Mantelflächen der Brennfläche des Strahlensystems $\mathfrak{p}(y_1 y_2)$.

Wir zeigen nun, daß die Punkte ξ_1^i, η_1^i nicht zusammenfallen, d. h., daß $AD - BC \neq 0$ ist. Sonst bestünden zugleich die beiden Systeme

$$\mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\lambda^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \quad \mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial \eta_p}\mu^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i),$$

woraus wegen $\lambda^p \neq \alpha\mu^p$ für jede Richtung ϱ^p: $\mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0$, $\mod(\xi^i, \eta^i)$ gälte, was $B_{pq} \equiv 0$ zur Folge hätte.

Für ξ_1^i, η_1^i gelten wegen (42) die Relationen

$$(43)\qquad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0, \quad \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \mod(\xi^i, \eta^i),$$

wir definieren nun durch

$$(44)\qquad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\mu^p = \xi_2^i, \quad \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p = \eta_2^i$$

zwei weitere Punkte ξ_2^i, η_2^i des R_3^∞. Weder ξ_2^i noch η_2^i liegen auf dem Strahle ξ^i, η^i. Denn aus der Beziehung $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0$, $\mod(\xi^i, \eta^i)$ folgt wegen (43), $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0$, $\mod(\xi^i \eta^i)$, für jede Richtung ϱ^p, d. h. $\mathsf{A}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p + \mathsf{B}\frac{\partial \eta^i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0$, $\mod(\xi^i, \eta^i)$, also $B_{pq} \equiv 0$.

Aber im Gegensatz zu den Punkten ξ_1^i, η_1^i sind die Punkte ξ_2^i, η_2^i von den Transformationen der Gruppe G nicht unabhängig. Wir erhalten nämlich für $\bar{\xi}_1^i = \lambda \xi_1^i$, $\bar{\xi}_2^i = \lambda \xi_2^i + \xi_1^i \frac{\partial \lambda}{\partial y_p} \mu^p$, woraus folgt, daß nicht der Punkt ξ_2^i sondern der Strahl

45) $$\mathfrak{v} : \xi_1^i, \xi_2^i$$

und ebenso der Strahl

46) $$\bar{\mathfrak{v}} : \eta_1^i, \eta_2^i$$

geometrische Bedeutung hat. Wir werden daher in der Folge mit ξ_2^i einen von ξ_1^i verschiedenen Punkt auf $\mathfrak{v}$, mit η_2^i einen von η_1^i verschiedenen Punkt auf $\bar{\mathfrak{v}}$ bezeichnen.

Wir behaupten nun, daß die Strahlen $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ windschief sind. Sonst bestünde eine Beziehung

$$\alpha \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p + \beta \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi^i, \eta^i),$$

woraus

$$\left(\xi_1^i \eta_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\right) \lambda^q \mu^p = C_{pq} \lambda^q \mu^p = 0$$

folgte. Wegen (43) gilt aber auch

$$\left(\xi_1^i \eta_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\right) \mu^q \lambda^p = C_{pq} \mu^q \lambda^p = 0,$$

woraus wir dann $B_{pq} \lambda^p \mu^q = 0$ schließen müßten. Aus

$$B_{pq} \lambda^p \lambda^q = B_{pq} \mu^p \mu^q = 0$$

folgt aber $B_{pq} \lambda^p \mu^q \neq 0$ wegen (41′). Somit ist die Determinante $(\xi_1^i \xi_2^i \eta_1^i \eta_2^i) \neq 0$, und wir sind in der Lage, die Ableitungen nach y_1, y_2 dieser vier Punkte durch die Punkte selbst darzustellen. Aus

$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \alpha_p \xi_1^i + \beta_p \eta_1^i + \gamma_p \xi_2^i + \delta_p \eta_2^i$ folgt wegen $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \ \mathrm{mod}\,(\xi_1^i, \eta_1^i)$

und $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0, \ \mathrm{mod}\,(\xi_1^i \eta_2^i)$:

47) $$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \alpha_p \xi_1^i + \beta \mu_p \eta_1^i + \gamma \lambda_p \xi_2^i,$$

wobei λ_p, μ_p durch $\lambda_p \lambda^p = 0$, $\mu_p \mu^p = 0$ bis auf einen Faktor bestimmte kovariante Vektoren sind. Ebenso erhält man

47′) $$\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \alpha \lambda_p \xi_1^i + \beta_p \eta_1^i + \delta \mu_p \eta_2^i.$$

Wäre $\beta = 0$, so hieße das, daß $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p = f \xi_1^i$, d. h. die Tangente $\xi_1^i + t \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \lambda^p$ existierte nicht: der Mantel ξ_1^i der Brennfläche wäre in eine Kurve ausgeartet. Ebenso hätte $\alpha = 0$ die Ausartung der Mantelfläche η_1^i in eine Kurve zur Folge. *Wir wollen solche Ausartungen beiseite lassen und setzen demnach* $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ *voraus*[3]). Dann normieren wir die bis auf einen Faktor bestimmten Vektoren λ_p und μ_p durch die Festsetzung $\alpha = \beta = 1$. Das System der Ableitungsgleichungen hat dann die Gestalt:

$$(48) \quad \begin{cases} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + c \lambda_p \xi_2^i, \\ \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i + \quad + d \mu_p \eta_2^i, \\ \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + \mathsf{N}_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i + T_p \eta_2^i, \\ \frac{\partial \eta_2^i}{\partial y_p} = \overline{\mathsf{M}}_p \xi_1^i + \overline{\mathsf{N}}_p \eta_1^i + \overline{R}_p \xi_2^i + \overline{T}_p \eta_2^i. \end{cases}$$

Aus (48) erhalten wir

$$B_{pq} dy_p dy_q = (\xi_1^i \eta_1^i \xi_2^i \eta_2^i) c d (\lambda_p dy_p)(\mu_p dy_p),$$

somit ist $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Die Integrabilitätsbedingung der ersten Gleichung (48) liefert für den verschwindenden Koeffizienten von η_2^i den Ausdruck $c(\lambda_p T_q - \lambda_q T_p) = 0$, also da $c \neq 0$ ist

$$(49) \qquad T_p = t \lambda_p.$$

Ebenso ergibt der Koeffizient von ξ_2^i der Integrabilitätsbedingung der zweiten Gleichung von (48)

$$(49') \qquad \overline{R}_p = \varrho \mu_p.$$

Wir stellen nun die Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{v}$: (ξ_1^i, ξ_2^i) auf. Sie lautet $\left(\xi_1^i \xi_2^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_q}\right) dy_p dy_q$, also nach (48): $t(\mu_p dy_p)(\lambda_p dy_p)$ und ist demnach, sobald $t \neq 0$ ist, der Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{p}$: $(\xi^i, \eta^i$ proportional.

Für die Asymptotenlinien der Mantelfläche $\xi_1^i(y_1 y_2)$ erhält man, wie wir später zeigen, die Differentialgleichung:

$$(\mu_p \mu_q + t \lambda_p \lambda_q) dy_p dy_q = 0.$$

---

[3]) Wir werden an anderer Stelle zeigen, daß damit die dem Strahlensystem entsprechenden F_2 im R_4 ausgeschlossen sind, für die $B_{pq} B^p B^q = 0$ ist.

Sobald also t verschwindet, fallen die beiden Asymptotenrichtungen usammen, d. h. die Mantelfläche ξ_1^i ist eine Torse, und umgekehrt, ist lie Mantelfläche eine Torse, so verschwindet t.

Strahlensysteme, deren Mantelflächen Torsen (oder Kurven) sind, vollen wir ausgeartet nennen und von der weiteren Behandlung aus-chließen. Dann aber müssen wir auch die Voraussetzungen $t \neq 0$, $\varrho \neq 0$ reffen, was wieder zur Folge hat, daß die Strahlensysteme $\mathfrak{v}$ und $\bar{\mathfrak{v}}$ Grundformen besitzen, die der Grundform des Strahlensystems $\mathfrak{p}$ propor-ional sind. Dann aber schneiden die unendlich benachbarten Strahlen $(y_p + \varepsilon \mu^p)$, resp. $\mathfrak{v}(y_p + \varepsilon \lambda^p)$ den Strahl $\mathfrak{v}(y_p)$. Berechnen wir aus $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} \mu^p + Q \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} \mu^p \equiv 0, \mod(\xi_1^i, \xi_2^i)$, die bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmten Werte P und Q, so ist $P\xi_1^i + Q\xi_2^i$ der der Null-richtung μ^p zugeordnete Berührungspunkt. Nun ist nach (44) $P = 1$, $Q = 0$ ein solches Wertesystem, somit ξ_1^i der μ^p zugeordnete Berührungs-punkt. Wählen wir nun ξ_2^i als den λ^p zugeordneten Berührungspunkt, so muß $\frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} \lambda^p \equiv 0, \mod(\xi_1^i \xi_2^i)$ sein und dies ergibt nach (48) und (49)

50) $$\mathsf{N}_p \lambda^p = 0, \quad \text{also} \quad \mathsf{N}_p = n \lambda_p.$$

Auf genau dieselbe Art finden wir, sobald η_2^i der der Nullrichtung μ^p zugeordnete Berührungspunkt des Strahles $\bar{\mathfrak{v}}$: (η_1^i, η_2^i) sein soll,

50′) $$\bar{\mathsf{M}}_p \mu^p = 0, \quad \text{also} \quad \bar{\mathsf{M}}_p = m \mu_p.$$

Wir erhalten demnach für (48) bei Änderung der Bezeichnung:

51)
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} = \mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + c \lambda_p \xi_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p} = \lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i \qquad + d \mu_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + n \lambda_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i + t \lambda_p \eta_2^i, \\ \dfrac{\partial \eta_2^i}{\partial y_p} = m \mu_p \xi_1^i + \mathsf{N}_p \eta_1^i + \varrho \mu_p \xi_2^i + U_p \eta_2^i. \end{cases}$$

Die Koeffizienten des Systems (51) sind in bezug auf die Trans-formationen $\bar{x}_i = a_{ik} x_k$ $(i, k = 1, \ldots, 4)$, unabhängig, nicht aber in bezug auf die Transformation $\bar{x}_i = \lambda(x_1, \ldots, x_4) x_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$.

Bezeichnen wir nämlich $\alpha = \lambda(\xi_1^1, \ldots, \xi_1^4)$, $\beta = \lambda(\eta_1^1, \ldots, \eta_1^4)$, $\gamma = \lambda(\xi_2^1, \ldots, \xi_2^4)$, $\delta = \lambda(\eta_2^1, \ldots, \eta_2^4)$, so entsprechen den Punkten

52) $$\bar{\xi}_1^i = \alpha \xi_1^i, \quad \bar{\eta}_1^i = \beta \eta_1^i, \quad \bar{\xi}_2^i = \gamma \xi_2^i, \quad \bar{\eta}_2^i = \delta \eta_2^i$$

im (51) entsprechenden Systeme die Koeffizienten:

$$(53)\quad \begin{cases} \bar{\mathsf{A}}_p = \mathsf{A}_p + \dfrac{\partial l\alpha}{\partial y_p},\ \bar{\mathsf{B}}_p = \mathsf{B}_p + \dfrac{\partial l\beta}{\partial y_p},\ \bar{R}_p = R_p + \dfrac{\partial l\gamma}{\partial y_p},\ \bar{U}_p = U_p + \dfrac{\partial l\delta}{\partial y_p}, \\ \bar{\mu}_p = \dfrac{\alpha}{\beta}\mu_p,\ \bar{\lambda}_p = \dfrac{\beta}{\alpha}\lambda_p,\ \bar{c} = \dfrac{\alpha^2}{\beta\gamma}c,\ \bar{d} = \dfrac{\beta^2}{\alpha\delta}d,\ \bar{\mathsf{M}}_p = \dfrac{\gamma}{\alpha}\mathsf{M}_p,\ \bar{\mathsf{N}}_p = \dfrac{\delta}{\beta}\mathsf{N}_p, \\ \bar{n} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta^2}n,\quad \bar{m} = \dfrac{\delta\beta}{\alpha^2}m,\quad \bar{t} = \dfrac{\alpha\gamma}{\beta\delta}t,\quad \bar{\varrho} = \dfrac{\delta\beta}{\alpha\gamma}\varrho. \end{cases}$$

Um zu Formen zu gelangen, die invariant sind in bezug auf die Gesamtgruppe G, setzen wir

$$(54)\qquad \bar{c} = \bar{d} = 1, \qquad \bar{t} = \bar{\varrho}.$$

Da die Größen c, d, t und ϱ nach Voraussetzung von Null verschieden sind, können wir diese Festsetzung treffen und erhalten

$$(55)\qquad \gamma = \alpha h, \qquad \beta = \alpha\frac{c}{h}, \qquad \delta = \alpha\frac{c^2 d}{h^2},$$

wobei

$$h = \sqrt[8]{\frac{c^6 d^2 \varrho}{t}}$$

ist.

Damit sind aber in (52) $\xi_1^i, \bar{\eta}_1^i, \bar{\xi}_2^i, \bar{\eta}_2^i$ bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmt. Denken wir uns die Fixierung (54) getroffen und lassen wir im entsprechenden System (51) die Querstriche wieder weg, so heißt dies, daß in diesem System $c = d = 1$ und $t = \varrho$ zu setzen ist.

Eine jede Transformation (52), die ein durch (54) fixiertes Punktsystem $\xi_1^i \ldots \eta_2^i$ wieder in ein solches transformiert, hat, da $h = 1$ ist, die Gestalt

$$(56)\qquad \bar{\xi}_1^i = \alpha\xi_1^i, \quad \bar{\eta}_1^i = \alpha\eta_1^i, \quad \bar{\xi}_2^i = \alpha\xi_2^i, \quad \bar{\eta}_2^i = \alpha\eta_2^i.$$

Im System (51) ($c = d = 1, \varrho = t$) sind dann alle Koeffizienten bis auf die der ersten Reihe (53) Invariante in bezug auf die Gesamtgruppe G. Für die vier der ersten Reihe (53) ergaben sich die Transformationsformeln

$$(53')\quad \bar{A}_p = A_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p},\ \bar{B}_p = B_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p},\ \bar{R}_p = R_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p},\ \bar{U}_p = U_p + \frac{\partial l\alpha}{\partial y_p}.$$

Wir führen noch die Invariante

$$\varepsilon = \left(\frac{\partial A_1}{\partial y_2} - \frac{\partial A_2}{\partial y_1}\right)(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^{-1}$$

ein und behaupten:

Vermöge der Integrabilitätsbedingungen des Systems (51), *in dem* $c = d = 1, t = \varrho$ *zu setzen ist, gelingt es aus dem Invariantensysteme*

$$(57)\qquad \lambda_p, \mu_p, n, m, t \text{ und } \varepsilon,$$

sobald $t \neq 1$ *ist, alle übrigen Koeffizienten des Systems* (51) *zu berechnen.*

Somit ist (57) ein vollständiges Formensystem des Strahlensystems $\mathfrak{p}$ n bezug auf die Gruppe der projektiven Transformationen. Wir ersparen ıns den ebenso einfachen als länglichen Beweis und bemerken nur, daß lie Größen (53′) bis auf die additive Größe $\frac{\partial l\,\alpha}{\partial y_p}$ fixiert sind, was der ıoch zulässigen Transformation (56) entspricht.

Als geometrische Folgerung aus (51) wollen wir *die Gleichung der Asymptotenlinien der Mantelfläche* ξ_1^i berechnen. Die Tangentialebene an liese Mantelfläche hat die Gleichung $\xi_1^i + \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\varrho^p$, eine Asymptotenlinie ler Mantelfläche ist charakterisiert, daß ihre Schmiegungsebene die Tangentialebene der Fläche ist.

Die Schmiegungsebene im Punkte $\xi_1^i(y_1\, y_2)$ der Asymptotenlinie $y_p = y_p(\sigma)$ wird durch die Vektoren ξ_1^i, $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p} dy_p$ und $\left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R dy_p dy_q$ [4]) ıufgespannt. Also gilt

$$\left(\xi_1^i \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_1} \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_2} \left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R\right) dy_p dy_q = 0,$$

lso

$$\left(\xi_1^i\ \eta_1^i\ \xi_2^i \left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R\right) dy_p dy_q = 0$$

wegen (51)).

Aus (51) folgt dafür weiter

58) $$(\mu_p \mu_q + t\,\lambda_p \lambda_q)\, dy_p dy_q = 0$$

ls Gleichung der Asymptotenlinien der F_2 ξ_1^i. Ebenso erhält man

$$(t\,\mu_p \mu_q + \lambda_p \lambda_q)\, dy_p dy_q = 0$$

ls Gleichung der Asymptotenlinien der Mantelfläche η_1^i.

Für $t = 1$ haben die Mantelflächen ξ_1^i und η_1^i gleiche Asymptotenichtungen.

Seien nun σ_1^p, σ_2^p die Asymptotenrichtungen der Mantelfläche ξ_1^i, wegen $\frac{\xi_1^i}{y_p}\lambda^p \equiv 0$, $\mathrm{mod}\,(\xi_1^i \eta_1^i)$ und $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0$, $\mathrm{mod}\,(\xi_1^i \xi_2^i)$, tangieren die Strahlen $: (\xi_1^i \eta_1^i)$ und $\mathfrak{v} : (\xi_1^i \eta_2^i)$ die Mantelflächen ξ_1^i, wir zeigen nun, daß sie in onjugierten Richtungen berühren.

In der Tat gilt die Darstellung

$$\sigma^p = \alpha\,\lambda^p + \beta\,\mu^p,$$

lso nach (58)

$$\alpha^2 + t\,\beta^2 = 0, \quad \frac{\alpha}{\beta} = \pm\sqrt{-t}.$$

---

[4]) $\left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R$ bedeutet die Riccische Ableitung in bezug auf den Tensor B_{pq}.

Für die Asymptotenrichtungen σ_1^p, σ_2^p erhalten wir demnach

$$\sigma_1^p = \sqrt{-t}\,\lambda^p + \mu^p, \qquad \sigma_2^p = -\sqrt{-t}\,\lambda^p + \mu^p,$$

daraus folgt, daß das Doppelverhältnis $(\lambda^p\,\sigma_1^p\,\mu^p\,\sigma_2^p) = -1$ ist, was zu beweisen war.

§ 2.

Zusammenhang des Strahlensystems im projektiven R_3^∞ mit der F_2 im affinen R_4.

Wir zeigen als erstes, daß es zu einem gegebenen Strahlensysteme im uneigentlichen R_3^∞ des affinen R_4 eine unendliche von zwei willkürlichen Funktionen abhängige Mannigfaltigkeit von Flächen gibt, deren Tangentialebenen im Schnitte mit dem R_3^∞ das gegebene Strahlensystem bilden. Sei

$$x_i = x_i(y_1\,y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4) \tag{59}$$

eine solche F_2, dann muß

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = E_p\,\xi_1^i + F_p\,\eta_1^i$$

gelten. Dies ergibt für die Fläche das System der Integrabilitätsbedingungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial E_p}{\partial y_q} - \dfrac{\partial E_q}{\partial y_p} + E_p A_q - E_q A_p + F_p \lambda_q - F_q \lambda_p = 0, \\ \dfrac{\partial F_p}{\partial y_q} - \dfrac{\partial F_p}{\partial y_q} + E_p \mu_q - E_q \mu_p + F_p B_q - B_p F_q = 0, \\ E_p \lambda_q - E_q \lambda_p = 0, \quad F_p \mu_q - F_q \mu_p = 0. \end{cases} \tag{60}$$

Dies ergibt sofort $E_p = e\,\lambda_p$, $F_p = f\,\mu_p$, also

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p} = e\,\lambda_p\,\xi_1^i + f\,\mu_p\,\eta_1^i \qquad (i = 1, \ldots, 4), \tag{61}$$

und für e, f das System:

$$\begin{cases} \lambda_p \dfrac{\partial e}{\partial y_q} - \lambda_q \dfrac{\partial e}{\partial y_p} + e\left(\dfrac{\partial \lambda_p}{\partial y_q} - \dfrac{\partial \lambda_q}{\partial y_p}\right) + e(\lambda_p A_q - \lambda_q A_p) + f(\mu_p \lambda_q - \mu_q \lambda_p) = 0, \\ \mu_p \dfrac{\partial f}{\partial y_q} - \mu_q \dfrac{\partial f}{\partial y_p} + f\left(\dfrac{\partial \mu_p}{\partial y_q} - \dfrac{\partial \mu_q}{\partial y_p}\right) + e(\lambda_p \mu_q - \lambda_q \mu_p) + f(\mu_p B_q - \mu_q B_p) = 0. \end{cases} \tag{62}$$

f aus der ersten Gleichung (62) berechnet und in die zweite eingeführt ergibt für e eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Somit enthält die Gesamtheit aller dieser Flächen, die wir Parallelflächen benennen, zwei willkürliche Funktionen.

Weiter nun gilt der Satz, daß e und f und das Invariantensystem (57) *ein vollständiges Formensystem der* F_2 (59) *im affinen* R_4 *bilden.*

Aus (61) folgt für die Grundform des Strahlensystems ξ_1^i, η_1^i, sobald wir zur Darstellung des Strahles das Punktepaar $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$ anwenden,

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_q}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_2 \partial y_q}\right) dy_p dy_q = D_{(pq)} dy_p dy_q, \tag{63}$$

d. h. die Grundform gehört zum System der im Abschnitt I definierten Ausgangsformen.

Daraus wieder folgt, daß Parallelflächen proportionale Ausgangsformen haben.

Durch die Nullrichtungen λ^p, μ^p von (63) sind auf der F_2 zwei Scharen von Kurven definiert, *die Nullinien heißen mögen.* Wir zeigen nun, daß die Ebenen $x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i$, resp. $x_i + \mathsf{A}\,\eta_1^i + \mathsf{B}\,\eta_2^i$ die Schmiegungsebenen der Nullinien sind, woraus dann folgt, daß diese Schmiegungsebenen aus dem R_3^∞ die Strahlensysteme $\mathfrak{v}:(\xi_1^i, \xi_2^i)$ und $\bar{\mathfrak{v}}:(\eta_1^i, \eta_2^i)$ herausschneiden. In der Tat gilt wegen (61)

$$\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\lambda^p = f\,\eta_1^i, \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\mu^p = e\,\xi_1^i \tag{64}$$

(wobei λ^p, μ^p durch $\lambda^p = B^{pq}\lambda_q$, $\mu^p = B^{pq}\mu_q$, $B_{pq} = \lambda_p\mu_q + \lambda_q\mu_p$ fixiert sind, daraus folgt dann $\lambda_p\mu^p = 1$). Somit ist die Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie durch die Vektoren η_1^i und $\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, $(\mathrm{mod}\,\eta_1^i\eta_2^i)$, also durch η_1^i und η_2^i aufgespannt, q. e. d.

Wir notieren:

$$\begin{cases} x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i \text{ ist die Schmiegungsebene der } \mu^p\text{-Nullinie,} \\ x_i + \mathsf{A}\,\eta_1^i + \mathsf{B}\,\eta_2^i \text{ ist die Schmiegungsebene der } \lambda^p\text{-Nullinie.} \end{cases} \tag{65}$$

Nun sei $\tilde{F}_2$ eine Fläche im R_4, $(\tilde{x}_i = \tilde{x}_i(y_1\,y_2), i = 1, \ldots, 4)$, deren System von Tangentialebenen im Schnitte mit dem R_3^∞ das Strahlensystem $\bar{\mathfrak{v}}:(\eta_1^i\,\eta_2^i)$ ergibt. Die gegebene Fläche F_2 und diese Fläche sind dann punktweise so zugeordnet, daß in entsprechenden Punkten die Tangentialebene der $\tilde{F}_2$ der Schmiegungsebene der λ^p-Nullinie der F_2 parallel ist.

Für die $\tilde{F}$ gilt nach Voraussetzung

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \tilde{E}_p\,\eta_1^i + \tilde{F}_p\,\eta_2^i \tag{66}$$

deren Integrabilitätsbedingung $\tilde{E}_p = \tilde{e}\,\lambda_p$, $\tilde{F}_p = \tilde{f}\,\mu_p$ ergibt. Da die beiden Flächen F_2 und $\tilde{F}_2$ proportionale Ausgangsformen besitzen, so sind

$$\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p}\lambda^p = \tilde{f}\,\eta_2^i \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p}\mu^p = \tilde{e}\,\eta_1^i$$

die beiden Nullrichtungen der $\tilde{F}_2$. Die Schmiegungsebene der μ^p-Null-

richtung der $\bar{F}_2$ wird demnach durch die Vektoren η_1^i und $\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0$, mod $(\xi_1^i\, \eta_1^i)$, also durch die Vektoren ξ_1^i, η_1^i aufgespannt und ist somit dem y_1 parallel. *Zwei solche Flächen F_2 und $\bar{F}_2$ wollen wir konjugierte Flächen nennen.*

Stehen demnach zwei Flächen in der Beziehung, daß in entsprechenden Punkten die Schmiegungsebene der λ^p- (resp. μ^p)-Nullinie der ersten der Tangentialebene der zweiten parallel ist, so ist auch umgekehrt die Schmiegungsebene der μ^p- (resp. λ^p)-Nullinie der zweiten in entsprechenden Punkten der Tangentialebene der ersten parallel.

Dieser Satz entspricht der Tatsache, daß im R_3^∞ die Strahlensysteme $\mathfrak{p}:(\xi_1^i\, \eta_1^i)$ und $\mathfrak{v}:(\xi_1^i\, \xi_2^i)$ in konjugierten Richtungen die gemeinsame Mantelfläche ξ_1^i tangieren.

Ohne Beweis führen wir den Satz an: Die Schmiegungsebenen der Nullinien in einem Punkte P der F_2 schneiden die im Abschnitt I definierten Normalebenen in den Asymptoten des Kegelschnittes $\eta_{pq}^i \frac{dy_p}{ds}\frac{dy_q}{ds}$.

Wir bringen nun einige ganz einfache Sätze über Parallelflächen.

Seien $x_i = x_i(y_1\, y_2)$ und $\tilde{x}_i = \tilde{x}(y_1\, y_2)$ zwei Parallelflächen, so gilt bei geeigneter Wahl der Parameter $\frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p^r \frac{\partial x_i}{\partial y_r}$. Als ersten Satz sprechen wir aus:

Jede Parallelfläche einer F_2, die ganz in einem R_3 des R_4 liegt, liegt ganz in einem diesem R_3 parallelen R_3. Sei $\tilde{x}_i$ die gegebene F_2, sie liegt in einem R_3, heißt dann: $a_i \tilde{x}_i = a$. Daraus folgt

$$a_i \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_p} = \left(a_i \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) \mathsf{M}_p^r = 0,$$

und da $|\mathsf{M}_p^r| \neq 0$ sein muß, $a_i \frac{\partial x_i}{\partial y_r} = 0$, also $a_i x_i = b$, q. e. d.

Aus der Tatsache nun, daß das Verschwinden der Ausgangsform die F_2 charakterisiert, die ganz in einem R_3 liegen und die Torsen des R_4 und aus dem eben bewiesenen Satze folgt:

Jede Parallelfläche einer Torse des R_4, die in keinem R_3 liegt, ist wieder eine solche Torse.

Wegen (64) gelten für Parallelflächen x_i und $\tilde{x}_i$ die Beziehungen

$$(67) \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_r}\lambda^r = \mathsf{A}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\lambda^r, \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_r}\mu^r = \mathsf{B}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}\mu^r.$$

Führen wir das Parametersystem y_1, y_2 ein, für das $\lambda^2 = \mu^1 = 0$ ist, d. h. wählen wir als Parameterlinien die Nullinien, so erhalten wir statt (67)

$$(67') \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_1} = \mathsf{A}\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \qquad \frac{\partial \tilde{x}_i}{\partial y_2} = \mathsf{B}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}.$$

Für $B_{pq} = \lambda_p \mu_q - \lambda_q \mu_p$ erhalten wir

$$B_{11} = B_{22} = 0, \quad B_{12} \neq 0.$$

Flächen, für die der Vektor ζ^i verschwindet, entsprechen dem System partieller Differentialgleichungen (I. Abschnitt (7)).

$B^{pq}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \left\{\begin{matrix} p\,q \\ r \end{matrix}\right\}_B \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\right) = 0$, haben also in unserem Parametersystem das System partieller Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0.$$

Sei nun $\tilde{x}_i$ eine solche Fläche, gelte also für unser Parametersystem $\frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$. Aus (67′) folgt dann für Parallelflächen von $\tilde{x}_i$:

$$\mathsf{A}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial A}{\partial y_2}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0, \qquad \mathsf{B}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \frac{\partial B}{\partial y_1}\frac{\partial y_i}{\partial z_2} = 0.$$

Wegen $B_{pq} \not\equiv 0$ kann es aber nur eine solche Beziehung $B^{pq}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} \equiv 0$, mod $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}, \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$ geben, somit ist $A = A(y_1)$, $B = B(y_2)$ und $\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} = 0$, d. h.:

Verschwindet für eine Fläche F_2 der Vektor ξ^i $(B^p = 0)$, so verschwindet er auch für die Parallelflächen dieser Fläche, d. h. die Parallelflächen von Schiebflächen des R_4 sind wieder Schiebflächen.

Für das Parametersystem der Nullinien lautet das System der partiellen Differentialgleichungen der Flächen, für die $B = B_{pq} B^p B^q = 0$ ist:

$$\frac{\partial^2 \tilde{x}_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \mathsf{M}\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0.$$

Aus (67′) folgt für die Parallelfläche $x_i(y_1\, y_2)$:

$$\mathsf{A}\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\frac{\partial A}{\partial y_2} + \mathsf{M}A\right)\frac{\partial x_i}{\partial y_1} = 0,$$

also gilt der Satz:

Parallelflächen von Flächen, für die $B = 0$ ist, sind Flächen derselben Eigenschaft.

Die beiden letzten Sätze werden evident durch die folgende Überlegung.

Wir haben in Formel (47) $\beta \neq 0$ vorausgesetzt, um die für $\beta = 0$ eintretende Ausartung der Mantelfläche ξ_1^i in eine Kurve auszuschalten. Wir wollen nun untersuchen, welche Flächen F_2 im R_4 durch die Voraussetzung $\beta \neq 0$, also Mantelfläche ξ_1^i keine Kurve, dem Bereich unserer Untersuchungen entzogen wurden.

Wegen

64) $$\xi_1^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\tilde{\mu}^p, \qquad \left(\tilde{\mu}^p = \frac{1}{e}\mu^p\right)$$

gilt

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_q}\lambda^q = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^q \tilde{\mu}^p + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\left(\frac{\partial \tilde{\mu}^p}{\partial y_q}\right)_R \lambda^q, \tag{68}$$

wobei das R rechts unten die Ricci-Ableitung in bezug auf irgendeine Ausgangsform B^{pq} andeute. Aus $B_{pq}\tilde{\mu}^p\tilde{\mu}^q = 0$ folgt aber $\left(\frac{\partial \tilde{\mu}^p}{\partial y_q}\right)_R = h_q \tilde{\mu}^p$, daher aus (68)

$$\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_q}\lambda^q \equiv \sigma\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R B^{pq} = \sigma \frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r, \text{ [5]} \bmod \xi_1^i, \tag{69}$$

folgt. Ebenso gilt natürlich

$$\frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_q}\mu^q \equiv \bar{\sigma}\frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r, \bmod \eta_1^i. \tag{69'}$$

Aus (47) folgt nun, daß $\beta = 0$: $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, mod ξ_1^i, also (69) $\frac{\partial x_i}{\partial y_r} B^r \equiv 0$, mod ξ_1^i, somit $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$ zur Folge hat, und umgekehrt folgt aus $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$, $\frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0$, mod ξ_1^i, also $\beta = 0$. Wir fassen zusammen:

$\beta = 0$ hat $B^r = \bar{\varrho}\mu^r$ zur Folge und umgekehrt, $\alpha = 0$ hat $B^r = \bar{\varrho}\lambda^r$ zur Folge und umgekehrt.

Ist somit $B^r = 0$, so arten beide Mantelflächen in Kurven aus, ist $B = 0$, so ist B^r entweder λ^r oder μ^r proportional, und eine Mantelfläche ist eine Kurve. Die Umkehrung besagt: Ist eine der Mantelflächen eine Kurve, so ist $B = 0$, sind beide Mantelflächen Kurven, so ist $B^r = 0$.

Bemerkung. Das System der Differentialgleichungen der Flächen $B^r = 0$ läßt sich für das Parametersystem der Nullinien sofort integrieren, die Gleichung der betreffenden Flächen hat die Gestalt: $x_i = \Phi_i(y_1) + \Psi_i(y_2)$.

Ebenso einfach ist die Integration für die F_2, für die $B = 0$ ist, man erhält: $x_i = y_2\,\Phi_i(y_1) + \Psi_i(y_2)$. Die direkte Diskutierung dieser Flächen ergibt ebenfalls das obige Resultat.

Wir leiten zum Schlusse aus (61) durch Ricci-Ableitung ab:

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R = \left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial y_q}\right)_R e\,\xi_1^i + \left(\frac{\partial \mu_p}{\partial y_q}\right)_R f\,\eta_1^i + \lambda_p \frac{\partial e}{\partial y_q}\xi_1^i + \mu_p \frac{\partial f}{\partial y_q}\eta_1^i$$
$$+ e\lambda_p(\mathsf{A}_q \xi_1^i + \mu_q \eta_1^i + \lambda_q \xi_2^i) + f\mu_p(\lambda_q \xi_1^i + \mathsf{B}_q \eta_1^i + \mu_q \eta_2^i).$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{2}\zeta^i = \frac{B^{pq}}{2}\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R = \alpha\,\mu^p\lambda^q\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R$$
$$= \alpha\left[\xi_1^i\left\{\left(\frac{\partial \lambda_p}{\partial y_q}\right)_R e\,\mu^p\lambda^q + \lambda^q\frac{\partial e}{\partial y_q} + e\lambda^q \mathsf{A}_q\right\} + e\,\eta_1^i\right],$$

[5]) Da B^{pq} proportional $\lambda^p\tilde{\mu}^q + \lambda^q\tilde{\mu}^p$ ist, und wegen (7).

nd wegen der Integrabilitätsbedingungen (62):

70) $$\zeta^i = \alpha(f\xi_1^i + e\eta_1^i)$$

§ 3.

Ebenensysteme im R_4.

Das System der Tangentialebenen einer F_2 oder das System der chmiegungsebenen der λ^p- (resp. μ^p-)Nullinien oder das im ersten Abchnitt definierte System der Affinnormalebenen sind Beispiele einer von wei Parametern y_1, y_2 abhängigen Mannigfaltigkeit von Ebenen E_2.

Unter einem Ebenensysteme E_2 wollen wir im allgemeinen eine von wei Parametern abhängige Mannigfaltigkeit von Ebenen E_2 verstehen.

Wir können jede E_2 des Systems durch ihren Schnittpunkt mit einer eitfläche

71) $$x_i = x_i(y_1\, y_2) \qquad (i = 1, \ldots, 4)$$

nd zwei Vektoren ${}_{(1)}\lambda^i(y_1, y_2)$, ${}_{(2)}\lambda^i(y_1, y_2)$ dieser E_2 in der Form

72) $$\xi^i = x_i + \alpha\, {}_{(1)}\lambda^i + \beta\, {}_{(2)}\lambda^i$$

arstellen. Wir denken uns dabei die Leitfläche (71) so gelegt, daß ihre angentialebene keinen Vektor mit der E_2 gemeinsam hat, d. h. wir setzen:

73) $$\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\, \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\, {}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^i\right) + 0$$

oraus. Wir zeigen später, daß für jedes Ebenensystem eine solche Leitläche gefunden werden kann. Für die Ableitungen der Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$, ${}_{(1)}\lambda^i$, ${}_{(2)}\lambda^i$ verwenden wir die Bezeichnungen des Systems (19).

Das Ebenensystem (72) wird vom R_3^∞ in einem Strahlensystem geschnitten, dessen Grundform $\left({}_{(1)}\lambda^i\, {}_{(2)}\lambda^i\, \frac{\partial\, {}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}\, \frac{\partial\, {}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_q}\right) dy_p\, dy_q$ nach (19) die Gestalt hat

74) $$S_{(pq)}\, dy_p\, dy_q = \begin{vmatrix} {}_{(1)}\sigma_p^1\, dy_p & {}_{(2)}\sigma_p^1\, dy_p \\ {}_{(1)}\sigma_p^2\, dy_p & {}_{(2)}\sigma_p^2\, dy_p \end{vmatrix}.$$

Setzen wir $|S_{(pq)}| + 0$ voraus und bezeichnen wir mit τ_1^p, τ_2^p die beiden Nullrichtungen der Form (74), so gibt es für jede dieser Richtungen τ_r^p $r = 1, 2$) zwei bis auf einen Faktor bestimmte nicht zugleich verschwindende Größen α_r, β_r, daß (für τ_1^p)

75) $$[\alpha_1\, {}_{(1)}\sigma_p^r + \beta_1\, {}_{(2)}\sigma_p^r]\, \tau_1^p = 0$$

st. Daraus folgt, daß α_1, β_1 resp. α_2, β_2 die Wurzeln der quadratischen Gleichung

76) $$\begin{vmatrix} \alpha\, {}_{(1)}\sigma_1^1 + \beta\, {}_{(2)}\sigma_1^1 & \alpha\, {}_{(1)}\sigma_2^1 + \beta\, {}_{(2)}\sigma_2^1 \\ \alpha\, {}_{(1)}\sigma_1^2 + \beta\, {}_{(2)}\sigma_1^2 & \alpha\, {}_{(1)}\sigma_2^2 + \beta\, {}_{(2)}\sigma_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

sind. Wegen (75) gilt weiter:

$$\alpha_1\left({}_{(1)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}\tau_1^p\right)+\beta_1\left({}_{(2)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}\tau_1^p\right)\equiv 0,\ \mathrm{mod}\,({}_{(1)}\lambda^i,\ {}_{(2)}\lambda^i),$$

also ist $\alpha_1\,{}_{(1)}\lambda^i+\beta_1\,{}_{(2)}\lambda^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Strahlen, die den Parameterwerten y_p, $y_p+\varepsilon\tau_1^p$ entsprechen, für $\lim\varepsilon\to 0$, und $\alpha_2\,{}_{(1)}\lambda^i+\beta_2\,{}_{(2)}\lambda^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Strahlen, die den Parameterwerten y_p, $y_p+\varepsilon\tau_2^p$ entsprechen, für $\lim\varepsilon\to 0$.

Nun wollen wir das Ebenensystem (72) im R_4 betrachten.

Je zwei E_2 schneiden sich im R_4 in einem Punkte. Wir wollen ein den Parameterwerten y_1, y_2 entsprechende E_2 (72) mit der den Parameterwerten y_1+dy_1, y_2+dy_2 entsprechenden zum Schnitte bringen und die Grenzlage des Schnittpunktes für $\lim dy_p\to 0$ bestimmen.

Dieser Grenzpunkt ist von der Richtung $\frac{dy_1}{dy_2}=t$ abhängig und beschreibt, wie wir nun zeigen, in der E_2 (72) einen Kegelschnitt, dessen Asymptotenrichtungen die Richtungen $\alpha_r\,{}_{(1)}\lambda^i+\beta_r\,{}_{(2)}\lambda^i$ $(r=1,2)$ sind, sobald $\frac{dy_1}{dy_2}$ alle Richtungen der Leitfläche im Punkte y_1, y_2 durchläuft.

Sei also

$$x_i+\tilde\alpha\,{}_{(1)}\lambda^i+\tilde\beta\,{}_{(2)}\lambda^i \tag{77}$$

die den Parameterwerten y_1, y_2 entsprechende E_2, so ist die den Parameterwerten y_1+dy_1, y_2+dy_2 entsprechende unendlich benachbarte durch

$$x_i+\frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p+\alpha\left({}_{(1)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right)+\beta\left({}_{(2)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right) \tag{77'}$$

gegeben. Für den Schnittpunkt der beiden E_2 haben wir aus der Relation

$$\begin{aligned}&x_i+\tilde\alpha\,{}_{(1)}\lambda^i+\tilde\beta\,{}_{(2)}\lambda^i\\ &=x_i+\frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p+\alpha\left({}_{(1)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(1)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right)+\beta\left({}_{(2)}\lambda^i+\frac{\partial\,{}_{(2)}\lambda^i}{\partial y_p}dy_p\right)\end{aligned} \tag{78}$$

die Größen α, β, $\tilde\alpha$ und $\tilde\beta$ zu berechnen und $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde\alpha$, $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde\beta$ zu bestimmen.

Wegen (19) zerfällt (78) in:

$$\left\{\begin{aligned}0&=dy_1+\alpha\,{}_{(1)}\sigma_p^1\,dy_p+\beta\,{}_{(2)}\sigma_p^1\,dy_p,\\ 0&=dy_2+\alpha\,{}_{(1)}\sigma_p^2\,dy_p+\beta\,{}_{(2)}\sigma_p^2\,dy_p,\\ \tilde\alpha&=\alpha+\alpha\,{}_{(11)}C_p\,dy_p+\beta\,{}_{(21)}C_p\,dy_p,\\ \tilde\beta&=\beta+\alpha\,{}_{(12)}C_p\,dy_p+\beta\,{}_{(22)}C_p\,dy_p.\end{aligned}\right. \tag{79}$$

Aus den beiden letzten Gleichungen (79) schließen wir $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde\alpha=\alpha$, $\lim\limits_{dy_p=0}\tilde\beta=\beta$, während die beiden ersten Gleichungen (79) zur Berechnung von α und β als Funktion von $t=\frac{dy_1}{dy_2}$ dienen. Für die Werte $\frac{dy_1}{dy_2}$, für

e $S_{(pq)}dy_p dy_q \neq 0$ ist, erhalten wir endliche Werte α und β, die, die rsten zwei Gleichungen (79) nach dy_1, dy_2 geordnet, auf dem Kegelschnitte

80) $$\begin{vmatrix} 1+\alpha_{(1)}\sigma_1^1+\beta_{(2)}\sigma_1^1 & \alpha_{(1)}\sigma_2^1+\beta_{(2)}\sigma_2^1 \\ \alpha_{(1)}\sigma_1^2+\beta_{(2)}\sigma_1^2 & 1+\alpha_{(1)}\sigma_2^2+\beta_{(2)}\sigma_2^2 \end{vmatrix} = 0$$

egen.

Die Gleichung (76) gibt die Asymptotenrichtungen des Kegelschnittes, ie Schnittpunkte mit der unendlich entfernten Geraden entsprechen dem Werte dy_p, für die $S_{(pq)}dy_p dy_q = 0$ ist, also den Werten τ_1^p und τ_2^p. $S_{(pq)}| = 0$ heißt, daß der Kegelschnitt eine Parabel ist.)

Bezeichnen wir die (79) genügenden Werte α und β in ihrer Abängigkeit von $t = \frac{dy_1}{dy_2}$ mit $\alpha(t)$, $\beta(t)$ [6]), so stellt

81) $$\xi^i = x_i(y_1 y_2) + \alpha(t)_{(1)}\lambda^i(y_1 y_2) + \beta(t)_{(2)}\lambda^i(y_1 y_2)$$

ine F_3 dar, die wir die *Brennfläche des gegebenen Ebenensystems* nennen ollen.

Fixieren wir einen Punkt P $(y_1, y_2, t = y_3)$ der Brennfläche, so eweisen wir, daß die E_2 : $x_i(y_1 y_2) + A_{(1)}\lambda^i(y_1 y_2) + B_{(2)}\lambda^i(y_1 y_2)$ im unkte P die Brennfläche tangiert.

Dies ist bewiesen, wenn wir zeigen, daß es in P zwei in der E_2 egende Tangenten der F_3 (81) gibt. Eine Tangente der F_3 (81) ist urch $\xi^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p$, $p = 1, 2, 3$, gegeben.

Nun ist $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_3} = \frac{\partial \xi^i}{\partial t} \equiv 0$, $\mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i)$, somit liegt die Tangente $^i + \frac{\partial \xi^i}{\partial y_3}\mu$ tatsächlich in der E_2, sie ist daselbst die Tangente an dem Kegelschnitt (80).

Ferner gilt für $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}$ $(p = 1, 2)$

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y_p} + (\alpha(t)_{(1)}\sigma_p^r + \beta(t)_{(2)}\sigma_p^r)\frac{\partial x_i}{\partial y_r}, \quad \mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i).$$

Für $\frac{dy_1}{dy_2} = t$ und nur für diese Richtung folgt daraus

82) $$\sum_{p=1}^{2}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}dy_p \equiv \frac{\partial x_i}{\partial y_r}(dy_r + \alpha(t)_{(1)}\sigma_p^r dy_p + \beta(t)_{(2)}\sigma_p^r dy_p) \equiv 0,$$
$$\mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i).$$

omit ist die Tangente $\xi^i + \sum_{p=1}^{2}\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p \left(\frac{\varrho^1}{\varrho^2} = t\right)$ ebenfalls in der E_2 gelegen.

---

[6]) $\alpha(t)$, $\beta(t)$ hängen außer von t von y_1 und y_2 ab.

Wären diese beiden Tangenten nicht unabhängig, so müßte eine Relation der Form

$$\Phi_1 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_1} + \Phi_2 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_2} + \Phi_3 \frac{\partial \xi^i}{\partial y_3} = 0 \qquad (i = 1 \ldots 4) \tag{83}$$

bestehen, dann aber folgt aus diesem System partieller Differentialgleichungen, daß ξ^i eine Funktion von nur zwei Parametern wäre, also die Brennfläche eine F_2. *Solche Ebenensysteme, deren Brennfläche eine F_2 ist, wollen wir ausgeartet nennen. Für nicht ausgeartete Ebenensysteme tangiert jede Ebene des Systems die Brennfläche in jedem gemeinsamen Punkt.*

Dies zeigt die völlige Analogie mit den Strahlungssystemen des R_3. Ein solches Strahlungssystem ergibt auch der Schnitt des Ebenensystems mit jedem R_3 des R_4, *dabei wird der Schnitt der Brennfläche des Ebenensystems mit dem R_3 die Brennfläche des Strahlensystems.*

Von besonderem Interesse sind *die ausgearteten Ebenensysteme*, für die α und β von t unabhängig sind. *Die Brennfläche*

$$\xi^i(y_1 y_2) = x_i(y_1 y_2) + \alpha\, {}_{(1)}\lambda^i(y_1 y_2) + \beta\, {}_{(2)}\lambda^i(y_1 y_2)$$

wird in diesem Falle von den Ebenen des Systems eingehüllt.

Dies folgt aus (82), da hier $\frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} dy_p \equiv 0, \mod({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i)$, für jede Richtung dy_p gilt.

Sind ξ_1^i und η_1^i die Nullrichtungen der Brennfläche, die wieder $x_i = x_i(y_1 y_2)$ bezeichnet sei, so ist

$$x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\eta_1^i \tag{84}$$

das ausgeartete Ebenensystem.

$$x_i + (e\lambda_p \xi_1^i + f\mu_p \eta_p^i)\,dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\,[\xi_1^i + (\mathsf{A}_p \xi_1^i + \mu_p \eta_1^i + \lambda_p \xi_2^i)\,dy_p] + \tilde{\mathsf{B}}\,[\eta_1^i + (\lambda_p \xi_1^i + \mathsf{B}_p \eta_1^i + \mu_p \eta_2^i)\,dy_p]$$

ist die unendlich benachbarte, den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechende Ebene der E_2 (84). Daraus erhalten wir für den Schnittpunkt die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} A = \tilde{A} + (e\lambda_p + A_p \tilde{A} + \lambda_p \tilde{B}), \\ B = \tilde{B} + (f\mu_p + \mu_p \tilde{A} + B_p \tilde{B}), \\ 0 = \tilde{A}\lambda_p\, dy_p, \quad 0 = \tilde{B}\mu_p\, dy_p. \end{cases}$$

Für $dy_p \neq \lambda^p, \mu^p$ ist $\tilde{A} = \tilde{B} = 0$, also $\lim_{\|dy_p\|=0} A = \lim_{dy_p=0} B = 0$, für $dy_p = \lambda^p$ folgt $\lim B = 0$, A beliebig, für $dy_p = \mu^p$ folgt $\lim A = 0$, B beliebig. Wir erhalten somit als Schnittbild den Punkt x_i der F_2 und die Geraden $x_i + \xi_1^i \mu$, $x_i + \eta_1^i \mu$, die die Nullinien tangieren. $A = B = 0$, d. h. unabhängig von t, zeigt, *daß nur ausgeartete Ebenensysteme eine F_2 einhüllen.*

Ein sehr schönes Resultat ergibt die Diskussion des Systems der Schmiegungsebenen der Nullinien. Wir untersuchen das System der Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien (65)

$$x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\xi_2^i. \tag{85}$$

Die den Parameterwerten $y_1 + dy_1$, $y_2 + dy_2$ entsprechende unendlich benachbarte E_2 ist:

$$x_i + (e\lambda_p\xi_1^i + f\mu_p\eta_1^i)\,dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\,[\xi_1^i + (\mathsf{A}_p\xi_1^i + \mu_p\eta_1^i + \lambda_p\xi_2^i)\,dy_p] + \tilde{\mathsf{B}}\,[\xi_2^i + (\mathsf{M}_p\xi_1^i + n\lambda_p\eta_1^i + R_p\xi_2^i + t\lambda_p^x\eta_2^i)\,dy_p].$$

Dies ergibt für den Schnittpunkt die vier Gleichungen:

$$\begin{cases} \mathsf{A} = \tilde{\mathsf{A}} + (e\lambda_p + \tilde{\mathsf{A}}\mathsf{A}_p + \tilde{\mathsf{B}}\mathsf{M}_p)\,dy_p, \\ B = \tilde{B} + (\tilde{\mathsf{A}}\lambda_p + \tilde{\mathsf{B}}R_p)\,dy_p, \\ 0 = f\mu_p\,dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\mu_p\,dy_p + \tilde{\mathsf{B}}n\lambda_p\,dy_p, \quad 0 = \tilde{B}t\lambda_p\,dy_p. \end{cases}$$

Für $dy_p \neq \lambda^p, \mu^p$ folgt $\tilde{B} = 0$, $\tilde{A} = -f$ also $\lim A = -f$, $\lim B = 0$, für $dy_p = \lambda^p$ ist $\tilde{A} = -f$, $\tilde{B}$ beliebig, also $\lim A = -f$, B beliebig, für $dy_p = \mu^p$ ist $\tilde{B} = 0$, $\tilde{A}$ beliebig, also $\lim B = 0$, A beliebig.

Wir haben den ausgearteten Fall vor uns und wissen daher, daß das System der Schmiegungsebenen (85) die F_2

$$z_i = x_i - f\xi_1^i \tag{86}$$

einhüllt. Dies ergibt auch die direkte Rechnung. Wir erhalten in der Tat aus (86):

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_p} = (e\lambda_p\xi_1^i + f\mu_p\eta_1^i) - f(A_p\xi_1^i + \mu_p\eta_1^i + \lambda_p\xi_2^i) - \frac{\partial f}{\partial y_p}\xi_1^i \tag{87}$$
$$= \xi_1^i\left(e\lambda_p - fA_p - \frac{\partial f}{\partial y_p}\right) - \xi_2^i f\lambda_p.$$

Die Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien (85) *einer F_2 hüllen die der F_2 konjugierten Fläche* (86) *ein, die Schmiegungsebenen der λ^p-Nullinien der F_2 hüllen die konjugierte Fläche*

$$\tilde{z}_i = x_i - e\eta_1^i \tag{88}$$

ein. Umgekehrt: Die Schmiegungsebenen der λ^p-Nullinien der F_2 (86) *hüllen wieder ihrerseits die Ausgangs-F_2: $x_i = x_i(y_1\,y_2)$ ein.* (Analog für die F_2 (88).) *Wenn wir jetzt zeigen, daß es neben den Nullinien keine Kurvenscharen auf der F_2 gibt, deren Schmiegungsebenen eine F_2 einhüllen, so ist damit der projektive Charakter der Nullinien, sowie der Flächen $z_i = x_i - f\xi_1^i$, $\tilde{z}_i = x_i - e\eta_1^i$ bewiesen.*

Sei also auf der F_2 $\sigma^i = \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p$ der Richtungsvektor einer solchen

Kurvenschar. Wir untersuchen das System der Schmiegungsebenen dieser Kurvenschar und bezeichnen

$$(89) \qquad {}_{(2)}\lambda^i = \frac{\partial}{\partial y_q}\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p\right)\varrho^q,$$

so daß das System dieser Schmiegungsebenen durch

$$(90) \qquad \xi^i = x_i + \mathsf{A}\,\sigma^i + \mathsf{B}\,{}_{(2)}\lambda^i$$

gegeben ist. Da wegen (89) ${}_{(2)}\lambda^i \equiv \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\varrho^p\varrho^q$, mod $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\ \frac{\partial x_i}{\partial y_2}\right)$ ist, und $B^{pq} \neq \alpha\varrho^p\varrho^q$ wegen $|B^{pq}| \neq 0$ ist, so liegt ${}_{(2)}\lambda^i$ sicher nicht in der Tangentialebene der gegebenen Fläche. Wir nehmen nun in jedem Punkte der F_2 einen Vektor ${}_{(1)}\lambda^i$, der nur der Voraussetzung $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_1}\frac{\partial x_i}{\partial y_2}\,{}_{(1)}\lambda^i\,{}_{(2)}\lambda^i\right) \neq 0$ zu genügen hat. Für die Ableitungen der vier Vektoren $\frac{\partial x_i}{\partial y_1}$, $\frac{\partial x_i}{\partial y_2}$, ${}_{(1)}\lambda^i$, ${}_{(2)}\lambda^i$ verwenden wir wieder die Bezeichnungen des Systems (19). Aus (89) folgt

$$(91) \qquad {}_{(2)}\lambda^i = \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_{\Gamma}\varrho^p\varrho^q + \frac{\partial x_i}{\partial y_r}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_{\Gamma}\varrho^q,$$

wobei

$$\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_{\Gamma} = \frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q} - \Gamma^r_{pq}\frac{\partial x_i}{\partial y_r}$$

und

$$\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_{\Gamma} = \frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q} + \Gamma^r_{pq}\varrho^q$$

bedeutet. Wegen $\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_{\Gamma} = {}_{(\alpha)}B_{pq}\,{}_{(\alpha)}\lambda^i$ (19), hat (91) dann

$$(92) \qquad 0 = {}_{(1)}B_{pq}\varrho^p\varrho^q, \qquad 1 = {}_{(2)}B_{pq}\varrho^p\varrho^q, \qquad 0 = \left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_{\Gamma}\varrho^q$$

zur Folge.

Nach dieser Vorbereitung bilden wir den Schnitt zweier unendlich benachbarter Systemebenen (90):

Wir haben wie immer das System

$$\begin{aligned} &x_i + \mathsf{A}\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p + \mathsf{B}\,{}_{(2)}\lambda^i \\ &\quad = x_i + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}dy_p + \tilde{\mathsf{A}}\left[\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\varrho^p + \left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_{\Gamma}\varrho^p dy_q + \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_{\Gamma}dy_q\right] \\ &\qquad + \tilde{\mathsf{B}}\left[{}_{(2)}\lambda^i + {}_{(2)}\sigma^r_p\frac{\partial x_i}{\partial y_r}dy_p + {}_{(2\beta)}C_p\,dy_p\,{}_{(\beta)}\lambda^i\right] \end{aligned}$$

nach den vier Größen $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \tilde{\mathsf{A}}$ und $\tilde{\mathsf{B}}$ aufzulösen und $\lim_{dy_p=0}\mathsf{A}$, $\lim_{dy_p=0}\mathsf{B}$ zu berechnen.

Die obige Relation ist nun äquivalent dem System:

$$(92') \qquad \begin{cases} \mathsf{A}\varrho^r = \tilde{\mathsf{A}}\varrho^r + \left[dy_r + \tilde{\mathsf{A}}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_{\Gamma}dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(2)}\sigma^r_q dy_q\right] & (r = 1, 2) \\ 0 = \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(1)}B_{pq}\varrho^p dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(21)}C_q dy_q \\ \mathsf{B} = \tilde{\mathsf{B}} + \tilde{\mathsf{A}}\,{}_{(2)}B_{pq}\varrho^p dy_q + \tilde{\mathsf{B}}\,{}_{(22)}C_q dy_q, \end{cases}$$

oraus sofort $\lim A = \tilde{A}$, $\lim B = \tilde{B}$ folgt. Zu ϱ^p gibt es einen (bis auf nen Faktor bestimmten) kovarianten Vektor τ_p, daß

3) $$\varrho^p \tau_p = 0$$

t. Mit Hilfe von τ_p ergibt (92′):

4) $$\begin{cases} \left[dy_r + \tilde{A}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_q}\right)_\Gamma dy_q + \tilde{B}_{(2)}\sigma_q^r dy_q\right]\tau_r = 0 \\ \tilde{A}_{(1)} B_{pq}\varrho^p dy_q + \tilde{B}_{(21)} C_q dy_q = 0, \end{cases}$$

us welchem Systeme nun $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ zu berechnen ist.

Ordnen wir die Gleichungen (94) nach dy_1, dy_2, so erhalten wir für en Schnittkegelschnitt:

5) $$\begin{vmatrix} \tau_1 + \left[\tilde{A}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_1}\right)_\Gamma + \tilde{B}_{(2)}\sigma_1^r\right]\tau_r & \tau_2 + \left[\tilde{A}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_2}\right)_\Gamma + \tilde{B}_{(2)}\sigma_2^r\right]\tau_r \\ \tilde{A}_{(1)} B_{p1}\varrho^p + \tilde{B}_{(21)} C_1 & \tilde{A}_{(1)} B_{p2}\varrho^p + \tilde{B}_{(21)} C_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Multiplizieren wir die erste Spalte der Determinante (95) mit ϱ^1. nd die zweite mit ϱ^2 und addieren wir dann zur ersten die zweite Spalte, ergibt dies wegen (92) und (93):

6) $$\begin{vmatrix} \tilde{B}_{(2)}\sigma_t^r \varrho^t \tau_r & \tau_2 + \tilde{A}\left(\frac{\partial \varrho^r}{\partial y_2}\right)_\Gamma \tau_r + \tilde{B}_{(2)}\sigma_2^r \tau_r \\ \tilde{B}_{(21)} C_t \varrho^t & \tilde{A}_{(1)} B_{p2}\varrho^p + \tilde{B}_{(21)} C_2 \end{vmatrix} = 0,$$

h. *der Schnittkegelschnitt zerfällt in zwei Gerade, deren eine* $\tilde{B} = 0$, *lso* $x_i + A\sigma^i$, *die Tangente an die Kurve der Schar ist.*

Nun sind wir in der Lage zu zeigen, daß das Ebenensystem (90) nur ir die Nullinien ausgeartet ist, d. h. eine F_2 einhüllt. Soll das Ebenen- stem ausgeartet sein, so müsseu sich aus (94) die Größen $\tilde{A}$ und $\tilde{B}$ on $t = \frac{dy_1}{dy_2}$ unabhängig berechnen lassen, es müssen daher die Koeffizienten on dy_1, dy_2 dieser zwei Gleichungen, das sind die Elemente der Deter- inante (95) für das gesuchte Wertepaar $\tilde{A}, \tilde{B}$ verschwinden. Dann aber uß jedes Element der ersten Spalte von (95) eine lineare Kombination er Elemente der zweiten Spalte sein. Das gleiche gilt dann auch für e Determinante (96), woraus wir als notwendig und hinreichend

7) $$_{(1)}B_{p2}\varrho^p = 0$$

hließen. (Wir können immer $\tau_2 \neq 0$ voraussetzen, eventuell durch die ransformation $\bar{y}_1 = y_2$, $\bar{y}_2 = y_1$).

Aus (97) und (92) folgt aber $_{(1)}B_{p1}\varrho^p = 0$, also gilt

$$(_{(2)}B_{p1}\,{}_{(1)}B_{q2} - {}_{(2)}B_{q2}\,{}_{(1)}B_{p1})\varrho^p\varrho^q = 0,$$

h.

$$B_{pq}\varrho^p\varrho^q = 0,$$

h. ϱ^p ist eine Nullrichtung q. e. d.

Für die Nullrichtungen ist der Satz aber bewiesen, wir folgern ihn nun auch direkt aus den obigen Überlegungen. Sei $\varrho^p = \lambda^p$. Aus $B_{pq}\lambda^p\lambda^q = 0$ und (92) ${}_{(1)}B_{pq}\lambda^p\lambda^q = 0$ folgt wegen $B^{pq}\,{}_{(1)}B_{pq} = 0$:

$$ {}_{(1)}B_{pq} = P\lambda_p\lambda_q + Q\mu_p\mu_q + R(\lambda_p\mu_q + \lambda_q\mu_p) $$

$Q = R = 0$, also ${}_{(1)}B_{pq}\lambda^q = 0$ und dies war notwendig und hinreichend, daß die Schmiegungsebenen der λ^p Schar ausarten.

Wir notieren als Resultat:

Die Nullinien einer F_2, somit auch die durch die Schmiegungsebenen derselben eingehüllten Flächen sind projektive Invariante.

Bemerkung. Wir haben, so oft wir das Ableitungssystem (51) benützten, stets solche Ebenensysteme vorausgesetzt, deren Schnittgebilde mit dem R_3^∞ ein nicht ausgeartetes Strahlensystem ist. (Die Mantelflächen sind weder Torsen noch Kurven.)

Wir haben (73) vorausgesetzt, daß sich für ein gegebenes Ebenensystem stets eine Leitfläche (71) so angeben läßt, daß (73) gelte.

Würde es eine Leitfläche dieser Art nicht geben, gilt also, wie auch der Punkt ξ^i der Ebene, also α und β als Funktionen von y_1, y_2, gewählt ist, eine Relation

$$ (98) \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0, \mod ({}_{(1)}\lambda^i, {}_{(2)}\lambda^i), $$

so zeigen wir, daß das Ebenensystem von nur einem Parameter abhängt, also nach Definition kein Ebenensystem, sondern eine Ebenenschar ist.

Wir nehmen wieder eine Umbezeichnung vor und sei

$$ z_i = x_i(y_1 y_2) + \mathsf{A}\,\xi^i(y_1 y_2) + \mathsf{B}\,\eta^i(y_1 y_2) $$

das gegebene Ebenensystem, für das also, wie auch A und B d. h. z_i gewählt sei, ein Vektor $\varrho^p = \varrho^p(A, B)$ existiere, daß $\frac{\partial z_i}{\partial y_p}\varrho^p \equiv 0$, mod (ξ^i, η^i) sei. Wir wählen nun zwei Hilfsvektoren u^i, v^i als Funktionen von y_1, y_2, daß $(\xi^i \eta^i u^i v^i) \neq 0$ sei. Die Ableitungsgleichungen von x_i, ξ^i, η^i lauten dann mod (ξ^i, η^i):

$$ (99) \quad \frac{\partial x_i}{\partial y_p} \equiv m_p u^i + n_p v^i, \qquad \frac{\partial \xi^i}{\partial y_p} \equiv \alpha_p u^i + \beta_p v^i, \qquad \frac{\partial \eta^i}{\partial y_p} \equiv \gamma_p u^i + \delta_p v^i, \quad \mod (\xi^i, \eta^i), $$

Dies ergibt:

$$ \frac{\partial z_i}{\partial y_p} \equiv (m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p)u^i + (n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p)v^i, \quad \mod (\xi^i \eta^i), $$

somit für den Vektor ϱ^p:

$$ (m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p)\varrho^p = 0, \qquad (n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p)\varrho^p = 0, $$

so

100) $$m_p + \mathsf{A}\alpha_p + \mathsf{B}\gamma_p = C(\mathsf{A},\mathsf{B})\ (n_p + \mathsf{A}\beta_p + \mathsf{B}\delta_p).$$

In (100) ist $C(\mathsf{AB}) = \frac{u + \mathsf{A}v + \mathsf{B}w}{\bar{u} + \mathsf{A}\bar{v} + \mathsf{B}\bar{w}}$, multipliziert man den Nenner $+ \mathsf{A}\bar{v} + \mathsf{B}\bar{w}$ in (100) weg, so stellt (100), da es für jedes Wertepaar , B gilt, und m_p, n_p, α_p, β_p, γ_p, δ_p, u, v, w, $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ offensichtlich von A nd B unabhängig sind, eine Identität in Form einer bilinearen Gleichung n den A und B dar, deren Koeffizienten also verschwinden. Dies ergibt, aß alle Vektoren m_p, n_p, α_p, β_p, γ_p und δ_p proportional sind einem bestimmten Vektor, den wir s_p bezeichnen wollen. Sei dann σ^p der kontravariante Vektor, für den $s_p \sigma^p = 0$ ist, so gilt

101) $$\frac{\partial z_t}{\partial y_p}\sigma^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi^i, \eta^i),$$

obei σ^p nur von y_1, y_2, nicht aber von A und B mehr abhängt. Nehmen ir dann eine Parametertransformation $\bar{y}_1 = \bar{y}_1(y_1 y_2)$, $\bar{y}_2 = \bar{y}_2(y_1 y_2)$ vor, ir die $\bar{\sigma}^2 = 0$ wird, so lautet (101)

101′) $$\frac{\partial z_t}{\partial \bar{y}_1} \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi^i, \eta^i).$$

as heißt, daß die Variation von $\bar{y}_1$ die Ebenen des Systems im R_4 invariant läßt, somit hängen diese nur vom Parameter $\bar{y}_2$ ab, q. e. d.

Ein Beispiel eines einparametrigen Ebenen-„Systems“ liefern die F_2 n R_4, deren Tangentialebenensystem im Schnitte mit den R_3^∞ ein Strahlensystem bilden, dessen eine Mantelfläche z. B. ξ_1^i eine Torse ist.

Das System der Schmiegungsebenen $x_i + \mathsf{A}\xi_1^i + \mathsf{B}\xi_2^i$ der μ^p-Nullinien ist einparametrig für Flächen der obigen Eigenschaft.

Beweis. Wir haben (Formel (49) und Folgerungen) bewiesen, daß it unserer Annahme die Voraussetzung $t = 0$ identisch ist. Dann ist $_p = 0$ und die Integrabilitätsbedingung der dritten Gleichung des Systems 48) und zwar der Koeffizient von η_2^i ergibt $N_p = \varkappa \mu_p$, woraus nach (48) nd (61)

102) $$\frac{\partial x_i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i \xi_2^i),$$

lgt.

Daher gilt für jeden Punkt der Schmiegungsebenen

103) $$\zeta^i = x_i + A\xi_1^i + B\xi_2^i, \quad \frac{\partial \zeta^i}{\partial y_p}\mu^p \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i, \xi_2^i)$$

nd dies ist die Bedingung (101), aus der wir sofort unsere Behauptung lgern.

Weiter beweisen wir, daß die μ^p-Nullinien ebene Kurven sind. Dies lgt direkt aus der Tatsache, daß das System der Schmiegungsebenen

dieser Kurven einparametrig ist, analytisch schließt man dies aus den letzten zwei Gleichungen (102).

Umgekehrt gilt: *Sind die μ^p-Nullinien ebene Kurven,* so bestehen die Relationen (102) und aus der letzten folgt nach (48) $N_p \mu^p = 0$, $T_p \mu^p = 0$. Da aber (49) $T_p = t \lambda_p$ ist, *so muß* $t = 0$ *sein,* d. h. ξ_1^i *ist im* R_3^∞ *eine Torse.*

Zum Abschluß zeigen wir, daß in unserem Falle das „System" der Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien eine Hypertorse des R_4 bildet. Wegen $N_p = \varkappa \mu_p$ hat die dritte Gleichung (48) die Gestalt

$$\frac{\partial \xi_2^i}{\partial y_p} = \mathsf{M}_p \xi_1^i + \varkappa \mu_p \eta_1^i + R_p \xi_2^i. \tag{104}$$

Die Fläche

$$z_i(y_1 y_2 \tau) = x_i(y_1 y_2) + \tau \xi_1^i(y_1 y_2) - \frac{f+\tau}{\varkappa} \xi_2^i(y_1 y_2) \tag{105}$$

ist, wie wir jetzt zeigen, nur von zwei Parametern abhängig und eine Torse des R_4, deren Tangentialebenensystem das System (103) ist.

In der Tat! Aus (48), (61) und (104) folgt:

$$\frac{\partial z_i}{\partial y_p} \equiv \left(f \mu_p + \tau \mu_p - \frac{f+\tau}{\varkappa} \varkappa \mu_p\right) \eta_1^i \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i \xi_2^i). \tag{106}$$

Desgleichen gilt nach (105):

$$\frac{\partial z_i}{\partial \tau} \equiv 0, \quad \mathrm{mod}\,(\xi_1^i \xi_2^i), \tag{106'}$$

also besteht eine Relation $\Phi_1 \frac{\partial z_i}{\partial y_1} + \Phi_2 \frac{\partial z_i}{\partial y_2} + \Phi \frac{\partial z_i}{\partial \tau} = 0$, d. h. z_i ist nur von zwei Parametern abhängig. Für $y_1 =$ konst., $y_2 =$ konst. ist (105) eine Gerade, somit ist die Fläche (105) eine Regelfläche.

Wir fixieren auf der Erzeugenden y_1, y_2 durch τ einen Punkt der Regelfläche.

Die Tangentialebene im Punkte y_1, y_2, τ ist nach (106), (106'), (105)

$$z_i + \mathsf{A} \xi_1^i + \mathsf{B} \xi_2^i = x_i + \bar{\mathsf{A}} \xi_1^i + \bar{\mathsf{B}} \xi_2^i, \tag{107}$$

also die Ebene (103) für y_1, y_2.

Die Tangentialebene hängt demnach von τ nicht ab, *jede Ebene* (103) *des „Systems" tangiert die Fläche* (105) *längs der ganzen Erzeugenden* y_1, y_2.

Damit ist auch bewiesen, daß die Fläche (105) eine Torse ist, also das Ebenen„system" (103) eine Hypertorse[7]).

[7]) Unter einer Hypertorse verstehen wir die Schar der Schmiegungsebenen einer Raumkurve.

Denn wenn eine Regelfläche die Eigenschaft besitzt, daß die Tangentialebene in einem Punkte längs der Erzeugenden durch diesen Punkt Tangentialebene ist, so ist diese Regelfläche eine Torse. Den Beweis bringen wir für den R_n.

Sei $z_i = x_i(s) + t\varphi_i(s)$, $i = 1, \ldots, n$, die gegebene Regelfläche und $, t$; s, τ zwei Punkte der Erzeugenden s. Die Gleichheit der Tangentialebenen hat eine Relation

(108) $$x_i + t\varphi_i + \mathsf{A}(x_i' + t\varphi_i') + \mathsf{B}\varphi_i = x_i + \tau\varphi_i + \bar{\mathsf{A}}(x_i' + \tau\varphi_i') + \bar{\mathsf{B}}\varphi_i$$

zur Folge, d. h. es muß eine Relation

(109) $$\alpha\varphi_i + \beta x_i' + \gamma\varphi_i' = 0$$

bestehen.

Indem wir nur den allgemeinen Fall $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ diskutieren, setzen wir $\bar{x}_i = x_i + \frac{\gamma}{\beta}\varphi_i$, woraus $\bar{x}_i' = p\varphi_i$ folgt. Für

$$z_i = \left(x_i + \frac{\gamma}{\beta}\varphi_i\right) + \left(t - \frac{\gamma}{\beta}\right)\varphi_i$$

erhalten wir, $p \neq 0$ vorausgesetzt: $z_i = \bar{x}_i + T\bar{x}_i'$, d. h. Torse.

Für die nichtdiskutierten Fälle ergibt sich ebenfalls dasselbe Resultat (Zylinder, Kegel). Wir können demnach das Ebenen„system“ (103) in der Gestalt:

(110) $$z_i = \tilde{x}_i(s) + \mathsf{A}\tilde{x}_i'(s) + \mathsf{B}\tilde{x}_i''(s)$$

darstellen und $\tilde{x}_i + \mathsf{A}\tilde{x}_i'(s)$ stellt dann die eingehüllte F_2 (105) dar. Da für die zugrunde liegende F_2 die μ^p-Nullinien in (110) liegen, so hat diese F_2 die Darstellung:

(111) $$z_i = \tilde{x}_i(s) + \mathsf{A}(sy)\tilde{x}_i'(s) + \mathsf{B}(sy)\tilde{x}_i''(s).$$

Umgekehrt ist für jede solche F_2 (121) $s = \text{konst.}$ eine Nullinie.

In der Tat, setzt man $y_1 = s$, $y_2 = y$, so folgt $B_{22} = 0$, d. h. $dy_1 = 0$ ist eine Nullrichtung; aus dem soeben Bewiesenen und der Tatsache, daß die Kurven $s = \text{konst.}$ der Fläche (111), von denen wir gezeigt haben, daß sie Nullinien sind, eben sind, folgt dann, daß die eine Mantelfläche des Strahlensystems, in dem der R_3^∞ von den Tangentialebenen der F_2 (111) geschnitten wird, eine Torse sein muß.

Somit ist (111) die allgemeinste Fläche dieser Art ($t = 0$).

Es ist somit der Satz bewiesen:

Im Falle die Mantelfläche ξ_1^i des Strahlensystems der Tangentialebenen im R_3^∞ eine Torse ist, umhüllen die Schmiegungsebenen der μ^p-Nullinien $x_i + \mathsf{A}\xi_1^i + \mathsf{B}\xi_2^i$ eine Torse im R_4 und umgekehrt.

Anhang. *Eine zweite Konstruktion der konjugierten Flächen* (86) *und* (88) *einer* F_2: $x_i = x_i(y_1\, y_2)$.

Die Tangentialebene eines Punktes P der F_2 wird von jeder unendlich benachbarten im Flächenpunkte P geschnitten. Eine Ausnahme bilden jene unendlich benachbarten Tangentialebenen, die Punkten entsprechen, die auf einer Nullinie durch P liegen.

Wir wollen nun die Schnittpunkte solcher unendlich benachbarter Tangentialebenen berechnen. Nach (84) genügt es nicht, in der Reihenentwicklung die Glieder der ersten Ordnung allein zu berücksichtigen; wir suchen den Schnittpunkt der Tangentialebenen der Punkte $P(y_i(t))$ und $\overline{P}(y_i(t+\varepsilon))$ und den Grenzpunkt dieses Schnittpunktes für $\lim \varepsilon = 0$. Bei Berücksichtigung der Entwicklungsglieder zweiter Ordnung besteht das System:

$$
\begin{aligned}
(112)\qquad x_i + \mathsf{A}\,\xi_1^i + \mathsf{B}\,\eta_1^i = x_i + \varepsilon \frac{\partial x_i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \\
+ \overline{\mathsf{A}}\left(\xi_1^i + \varepsilon \frac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q\right) \\
+ \overline{\mathsf{B}}\left(\eta_1^i + \varepsilon \frac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 \eta_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q\right),
\end{aligned}
$$ [8]

aus dem wir $\mathsf{A}, \mathsf{B}, \overline{\mathsf{A}}$ und $\overline{\mathsf{B}}$ zu berechnen haben.

Nun gilt nach (61) und (51), sobald wir λ^p so normieren, daß $\mu_p \lambda^p = 1$ ist:

$$
(113)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial^2 x_i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv f\,\eta_2^i, \quad \mod (\xi_1^i,\ \eta_1^i), \\ \text{ebenso nach (51)} \\ \left(\dfrac{\partial^2 \xi_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv \eta_2^i, \quad \left(\dfrac{\partial^2 \eta_1^i}{\partial y_p \partial y_q}\right)_R \lambda^p \lambda^q \equiv \varrho\,\xi_2^i + \cdot\,\eta_2^i, \quad \mod (\xi_1^i,\ \eta_1^i). \end{cases}
$$

Wir erhalten demnach für die Koeffizienten von η_2^i, ξ_2^i von (112) $\left(\dfrac{\partial \xi_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv 0,\ \dfrac{\partial \eta_1^i}{\partial y_p}\lambda^p \equiv \eta_2^i\right)$, $\mod (\xi_1^i,\ \eta_1^i)$:

$$
(114)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 f + \overline{\mathsf{A}}\dfrac{1}{2}\varepsilon^2 + \overline{\mathsf{B}}\left(\varepsilon + \dfrac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot\right) \\ 0 = \overline{\mathsf{B}}\,\varrho. \end{cases}
$$

---

[8]) Für den hier verwendeten Parameter t, hat die Nullinie $y_i = y_i(t)$ das Differentialgleichungssystem: $y_r'' + \left\{ {p\ q \atop r} \right\} y_p' y_q' = 0$. $B_{pq} y_p' y_q' = c$ ist ja ein Integral dieses Systems, somit die Nullinie bei Benutzung eines geeigneten Parameters eine Lösung.

Lassen wir den Ausartungsfall $\varrho = 0$ beiseite, so erhalten wir $\overline{\mathsf{B}} = 0$, $\overline{\lambda} = -f$.

Die Koeffizienten der Vektoren ξ_1^i, η_1^i in (112) wieder ergeben $\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{B} = \overline{\mathsf{B}}$, $\lim_{\varepsilon=0} \mathsf{A} = \overline{\mathsf{A}}$. *Somit ist*

$$z_i = x_i - f\xi_1^i$$

der Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangentialebenen der λ^p-Nullinie, und ebenso $\tilde{z}_i = x_i - e\eta_1^i$ der Schnittpunkt unendlich benachbarter Tangentialebenen der μ^p-Nullinie.

Im ausgearteten Falle, daß das Ebenensystem eine F_2 einhüllt, erhalten wir als Schnittfigur des Schnittes unendlich benachbarter Ebenen somit die drei Punkte x_i, z_i und $\bar{z}_i$.

In obiger Konstruktion ist auch ein recht einfacher Beweis für die projektive Invarianz der Nullinien und der Flächen z_i und $\tilde{z}_i$ enthalten.

(Eingegangen am 30. Januar 1926.)

Bemerkung über das Doppelintegral $\iint (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy$.

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Aus einem Briefe an Herrn Lichtenstein.

Diese Bemerkungen sind gelegentlich einer Untersuchung entstanden, die ich auf Anregung von Herrn F. Riesz unternommen habe, um die tiefgehenden Arbeiten von Z. v. Geöcze, die dieser früh verstorbene, hochbegabte ungarische Mathematiker der Theorie der Flächenmessung gewidmet hatte, vom gegenwärtigen Standpunkte der reellen Funktionentheorie zu deuten und zu vereinfachen[1]). Ich werde die Ergebnisse dieser Untersuchung an anderer Stelle ausführlich besprechen, möchte aber Ihnen gegenwärtig an einem wichtigen Beispiele die Bedeutung der Geöczeschen Ansätze zeigen.

1. Sei Q ein Quadrat in der xy-Ebene mit achsenparallelen Seiten, und sei $f(x, y)$ eine im abgeschlossenen Quadrate Q stetige Funktion, die dort einer Lipschitzschen Bedingung genügt. Sind also (x_1, y_1), (x_2, y_2) irgend zwei Punkte in Q, so gilt die Ungleichung

$$\text{(I)} \qquad \frac{|f(x_2, y_2) - f(x_1, y_1)|}{((x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2)^{1/2}} \leqq L[f],$$

wobei $L[f]$ eine endliche Konstante, die Lipschitzkonstante von f, bedeutet.

Alsdann existieren fast überall in Q die partiellen Ableitungen f_x

---

[1]) Von den Geöczeschen Arbeiten, die teils in ungarischer, teils in französischer Sprache erschienen sind, möchte ich hier nur die folgenden anführen:

Quadrature des surfaces courbes, Thèse, Paris 1908, 88 Seiten.

Quadrature des surfaces courbes, Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn 26 (1910), S. 1–88.

Recherches générales sur la quadrature des surfaces courbes, ebendort 27 (1911), S. 1–21 und 131–163.

Sur la fonction semi-continue, Bulletin de la société mathématique de France 38 (1911), S. 256–295.

und f_y und sie sind beschränkte und meßbare Funktionen. Wir können also das Integral

$$J_Q[f] = \iint_Q (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$$

bilden, und wir wollen mit Geöcze dieses Integral in bezug auf seine Abhängigkeit von der Argumentfunktion f untersuchen[2]). Wir wollen den Satz beweisen, daß *dieses Integral $J_Q[f]$ in bezug auf die Funktion f, in der seit Baire üblichen Terminologie, halbstetig von unten ist*, worunter folgendes zu verstehen ist. Sei $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ eine Folge von Funktionen, die in Q je einer Lipschitzbedingung genügen und gleichmäßig gegen f konvergieren. Dann braucht natürlich keineswegs $\lim J_Q[f_n] = J_Q[f]$ zu sein, das Integral ist also in bezug auf f nicht stetig; wohl aber gilt stets die Ungleichung

$$\text{II)} \qquad \underline{\lim}\, J_Q[f_n] \geqq J_Q[f],$$

welche die Halbstetigkeit von unten des Integrals $J_Q[f]$ in bezug auf f ausdrückt. Wir wollen also (II) beweisen[3]).

2. Zu dem Ende führen wir mit Geöcze gewisse endliche Summen ein, die das Integral $J_Q[f]$ approximieren. Wir zerlegen das Quadrat Q in endlich viele achsenparallele Rechtecke und bilden dann die folgenden Ausdrücke.

Sei R ein Rechteck der betrachteten Einteilung und seien (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2) die Eckpunkte von R, wobei $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ ist. Wir setzen

$$\text{III)} \qquad \pi_R[f] = \int_{y_1}^{y_2} |f(x_2,y) - f(x_1,y)|\,dy, \quad \varkappa_R[f] = \int_{x_1}^{x_2} |f(x,y_2) - f(x,y_1)|\,dx,$$

$$\tau_R = (x_2 - x_1)(y_2 - y_1).$$

---

[2]) Geöcze untersucht den Flächeninhalt der Fläche $z = f(x,y)$, wie derselbe durch Herrn Lebesgue in seiner Thèse erklärt wurde. Geöcze zeigt aber, daß man stets eine Folge von approximierenden Polyederflächen angeben kann, deren Eckpunkte auf der Fläche liegen, deren Flächeninhalte gegen den Lebesgueschen Flächeninhalt der Fläche $z = f(x,y)$ konvergieren, und die noch überdies eine gewisse Eigenschaft besitzen — und zwar eben diejenige Eigenschaft, die nach einem neueren Satze von Herrn Rademacher [Über partielle und totale Differenzierbarkeit II, Math. Annalen 81 (1920), S. 52–63] hinreicht, damit die Flächeninhalte der approximierenden Polyeder gegen $\iint (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ konvergieren. Daraus geht die auch an sich wichtige Tatsache hervor, daß der von Lebesgue erklärte Flächeninhalt, für die hier betrachtete Flächenklasse, ebenfalls durch das Integral $\iint (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ gegeben ist.

[3]) Über die geometrischen Beziehungen dieser Tatsache vgl. z. B. die zusammenfassende Darstellung bei M. Fréchet, Sur le prolongement des fonctionnelles semi-continues et sur l'aire des surfaces courbes, Fundamenta Mathematicae, VII (1925), S. 210–224.

Weiter wird gesetzt

$$(IV) \qquad g_R[f] = (\tau_R^2 + \pi_R[f]^2 + \varkappa_R[f]^2)^{1/2}.$$

Wir bilden nun die Summe $\sum g_R[f]$, erstreckt auf alle Rechtecke der betrachteten Einteilung, und bezeichnen diese Summe mit $G[f; T]$, wobei T die Rechtecksteilung bedeutet, welche bei der Summenbildung verwendet wurde. Wir wollen zunächst diejenigen einfachen Eigenschaften der eingeführten Ausdrücke zusammenstellen, die wir in der Folge benötigen.

a) Wenn $L[f]$ die Lipschitzkonstante von f bedeutet, so gilt wegen

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leqq L[f](y_2 - y_1)$$

offenbar

$$0 \leqq \varkappa_R[f] \leqq L[f](x_2 - x_1)(y_2 - y_1) = L[f]\tau_R,$$

und ebenso

$$0 \leqq \pi_R[f] \leqq L[f]\tau_R,$$

also auch

$$0 \leqq g_R[f] \leqq \tau_R(1 + 2L[f]^2)^{1/2},$$

wobei, wie bei (III), τ_R den Inhalt des Rechteckes R bedeutet.

b) Wird das Rechteck R parallel zur x- oder y-Achse in zwei Rechtecke R', R'' zerlegt, so gilt

$$g_R[f] \leqq g_{R'}[f] + g_{R''}[f].$$

Es werde nämlich R etwa durch die Gerade $x = x_0$, wo $x_1 < x_0 < x_2$, zerlegt. Aus (III) folgt dann unmittelbar

$$\tau_R = \tau_{R'} + \tau_{R''}, \quad \pi_R[f] \leqq \pi_{R'}[f] + \pi_{R''}[f], \quad \varkappa_R[f] = \varkappa_{R'}[f] + \varkappa_{R''}[f],$$

also

$$g_R[f] \leqq \{(\tau_{R'} + \tau_{R''})^2 + (\pi_{R'}[f] + \pi_{R''}[f])^2 + (\varkappa_{R'}[f] + \varkappa_{R''}[f])^2\}^{1/2},$$

und die rechte Seite ist auf Grund einer bekannten elementaren Abschätzung nicht größer als

$$(\tau_{R'}^2 + \pi_{R'}[f]^2 + \varkappa_{R'}[f]^2)^{1/2} + (\tau_{R''}^2 + \pi_{R''}[f]^2 + \varkappa_{R''}[f]^2)^{1/2} = g_{R'}[f] + g_{R''}[f].$$

c) Ist f_n eine Folge von Funktionen, die im Quadrate Q gleichmäßig gegen f konvergieren, und ist R ein bestimmtes Rechteck in Q, so folgt aus den Definitionsformeln (III) sogleich, daß

$$\lim_{n\to\infty} \pi_R[f_n] = \pi_R[f], \qquad \lim_{n\to\infty} \varkappa_R[f_n] = \varkappa_R[f],$$

also auch

$$\lim_{n\to\infty} g_R[f_n] = g_R[f].$$

Aus a), b), c) ersieht man unmittelbar die folgenden Eigenschaften der Summen $G[f; T]$:

A. Es gilt für jede Einteilung T die Ungleichung

$$G[f;T] \leqq (1+2L[f]^2)^{1/2} \times \text{Inhalt des Quadrates } Q.$$

B. Ist T^* eine Unterteilung von T, so gilt

$$G[f;T] \leqq G[f;T^*].$$

C. Ist $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ eine Folge von Funktionen, welche in Q gleichmäßig gegen f konvergieren, und ist T eine feste Einteilung, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} G[f_n;T] = G[f;T].$$

3. Wir werden fortan nur solche Einteilungen betrachten, bei welchen das Quadrat Q in kongruente kleinere Quadrate zerlegt wird. Eine derartige Einteilung ist vollkommen bestimmt, sobald die Anzahl m^2 der kleinen Quadrate gegeben ist; dementsprechend wollen wir die entsprechende Summe $G[f;T]$ einfacher mit $G_m[f]$ bezeichnen. Wir werden in Nr. 4 und 5 beweisen, daß für jede Funktion f, welche einer Lipschitzschen Bedingung genügt, die Relation

(V) $$\lim_{m\to\infty} G_m[f] = \iint_Q (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy = J_Q[f]$$

gilt, und wollen sogleich zeigen, wie aus dieser Limesgleichung (V) die zu beweisende Ungleichung (II) erhalten werden kann.

Zunächst ziehen wir aus (V) den Schluß, daß die Ausdrücke $G_m[f]$ *von unten* gegen ihren Grenzwert $J_Q[f]$ konvergieren, daß also für jede positive ganze Zahl k die Ungleichung

(VI) $$G_k[f] \leqq J_Q[f]$$

besteht. In der Tat, wenn das Quadrat Q zunächst in ν^2, dann in $(2\nu)^2$ kongruente kleinere Quadrate zerlegt wird (wobei ν eine beliebige positive ganze Zahl bedeutet), so ist die zweite Teilung eine Unterteilung der ersteren, so daß nach Nr. 2, B die Ungleichung

$$G_\nu[f] \leqq G_{2\nu}[f]$$

gilt. Es ist also einerseits

$$G_k[f] \leqq G_{2k}[f] \leqq G_{4k}[f] \leqq \cdots,$$

andererseits konvergiert diese Folge, als Teilfolge von $G_2[f], G_3[f], \ldots$ nach (V) gegen $J_Q[f]$; es ist also tatsächlich

$$G_k[f] \leqq J_Q[f].$$

Sei nun ε eine beliebig kleine positive Zahl. Wegen (V) können wir dann m so fixieren, daß

(VII) $$G_m[f] > J_Q[f] - \varepsilon.$$

Für diesen nunmehr festen Wert von m gilt dann nach Nr. 2, C:

$$\lim_{n\to\infty} G_m[f_n] = G_m[f]. \tag{VIII}$$

Nach (VI) ist aber $J_Q[f_n] \geqq G_m[f_n]$, woraus, mit Rücksicht auf (VIII),

$$\underline{\lim}\, J_Q[f_n] \geqq G_m[f],$$

also nach (VII)

$$\underline{\lim}\, J_Q[f_n] > J_Q[f] - \varepsilon$$

folgt. Da hier ε beliebig klein ist, so ist also tatsächlich

$$\underline{\lim}\, J_Q[f_n] \geqq J_Q[f].$$

4. Bisher sind wir fast wörtlich der ursprünglichen Geöczeschen Darstellung gefolgt; seinen äußerst geistreichen und schwierigen Beweis der Limesgleichung (V) ersetzen wir aber durch einen wesentlich einfacheren, welcher auf den Resultaten von Herrn Rademacher über partielle und totale Differenzierbarkeit beruht[4]).

Wir gehen von der Bemerkung aus, daß die Summen $G_m[f]$ als bestimmte Integrale von gewissen einfach gebauten Funktionen aufgefaßt werden können, die wir wie folgt erhalten. Wir führen zunächst zwei Hilfsfunktionen $\Pi_{m,f}(x, y)$, $\mathsf{K}_{m,f}(x, y)$ ein, die von der Funktion f und der positiven ganzen Zahl m wie folgt abhängen. Das Quadrat Q werde in m^2 kongruente kleine Quadrate zerlegt; dann ist $\Pi_{m,f}(x, y)$ in einem jeden der kleinen Quadrate konstant, und zwar wenn R ein solches kleines Quadrat ist, so ist dort

$$\Pi_{m,f}(x, y) = \frac{\pi_R[f]}{\tau_R}, \tag{IX}$$

wo $\pi_R[f]$, τ_R durch (III) gegeben sind; ebenso wird $\mathsf{K}_{m,f}(x, y)$ mit Hilfe von $\varkappa_R[f]$ gebildet. Beachtet man nun, daß τ_R den Inhalt des kleinen Quadrates R bedeutet, so erkennt man, daß

$$g_R[f] = (\tau_R^2 + \pi_R[f]^2 + \varkappa_R[f]^2)^{1/2} = \tau_R\left(1 + \frac{\pi_R[f]^2}{\tau_R^2} + \frac{\varkappa_R[f]^2}{\tau_R^2}\right)^{1/2}$$

gleich dem Integrale

$$\iint_R (1 + \Pi_{m,f}(x, y)^2 + \mathsf{K}_{m,f}(x, y)^2)^{1/2}\, dx\, dy$$

ist; demnach gilt, wegen $G_m[f] = \Sigma g_R[f]$,

$$G_m[f] = \iint_Q (1 + \Pi_{m,f}(x, y)^2 + \mathsf{K}_{m,f}(x, y)^2)^{1/2}\, dx\, dy. \tag{X}$$

---

[4]) H. Rademacher, Über partielle und totale Differenzierbarkeit I., Math. Annalen 79 (1919), S. 340–359.

In Nr. 5 werden wir den Nachweis erbringen, daß fast überall im uadrate Q die Beziehungen

$$\lim_{m\to\infty} \Pi_{m,f}(x,y) = |f_x(x,y)|,$$
$$\lim_{m\to\infty} \mathsf{K}_{m,f}(x,y) = |f_y(x,y)| \qquad \text{(XI)}$$

lten. Aus der Definitionsformel (IX), in Verbindung mit Nr. 2, a) folgt rner, daß

$$0 \leqq \Pi_{m,f}(x,y) \leqq L[f], \qquad 0 \leqq \mathsf{K}_{m,f}(x,y) \leqq L[f]$$

lt. Die Funktionenfolge

$$(1+\Pi_{m,f}(x,y)^2+\mathsf{K}_{m,f}(x,y)^2)^{1/2}$$

t also gleichmäßig beschränkt, und konvergiert nach den Relationen (XI), eren Beweis wir in Nr. 5 nachholen werden, im Quadrate Q fast überall gen

$$(1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}.$$

us dem fundamentalen Konvergenzsatze der Lebesgueschen Integraltheorie lgt also

$$\lim_{m\to\infty} \iint_Q (1+\Pi_{m,f}(x,y)^2+\mathsf{K}_{m,f}(x,y)^2)^{1/2}\,dx\,dy = \iint_Q (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy,$$

oraus sich, mit Rücksicht auf (X), die zu beweisende Relation

$$\lim_{m\to\infty} G_m[f] = \iint_Q (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$$

gibt.

5. Wir haben nun die Relationen (XI) zu beweisen. Da f in Q ner Lipschitzschen Bedingung genügt, so ist dort f, nach einem Satze on Herrn Rademacher, fast überall total differenzierbar[5]). Sei $\mathfrak{M}_0'$ die ullmenge, wo dies nicht der Fall ist; sei weiter $\mathfrak{M}_0''$ diejenige Null- enge, die aus den Punkten aller Einteilungslinien besteht, welche auf- eten, wenn für $m = 2, 3, \ldots$ das Quadrat Q in m^2 kongruente kleine uadrate zerlegt wird, und sei schließlich $\mathfrak{M}_0$ die Vereinigungsmenge der eiden Nullmengen $\mathfrak{M}_0'$ und $\mathfrak{M}_0''$. Wir zeigen: Ist (x_0, y_0) ein Punkt im uadrate Q, der nicht in der Nullmenge $\mathfrak{M}_0$ enthalten ist, so gelten im unkte (x_0, y_0) die Beziehungen (XI); wir können uns dabei etwa auf en Nachweis der Gleichung

$$\lim_{m\to\infty} \Pi_{m,f}(x_0,y_0) = |f_x(x_0,y_0)|$$

eschränken.

[5]) Vgl. loc. cit. [4]).

Da im Punkte (x_0, y_0) die Funktion f total differenzierbar ist, so haben wir eine Darstellung

$$(XII)\quad f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) + ((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2)^{1/2}\zeta(x,y),$$

wobei für $x \to x_0$, $y \to y_0$ die Funktion $\zeta(x,y)$ gegen Null geht. Sei nun m eine positive ganze Zahl, und sei R dasjenige kleine Quadrat, in welchem der Punkt (x_0, y_0) liegt, wenn Q in m^2 kongruente kleine Quadrate zerlegt wird; es seien wieder (x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_1, y_2) die Eckpunkte von R, wobei $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$ ist. Auf Grund der Definitionsformel (IX) haben wir dann

$$\Pi_{m,f}(x_0,y_0) = \frac{\pi_R[f]}{\tau_R} = \frac{\int_{y_1}^{y_2} |f(x_2,y) - f(x_1,y)|\,dy}{(x_2-x_1)(y_2-y_1)}.$$

Da aber f stetig ist, so gibt es einen Wert η zwischen y_1 und y_2, so daß

$$\int_{y_1}^{y_2} |f(x_2,y) - f(x_1,y)|\,dy = (y_2-y_1)|f(x_2,\eta) - f(x_1,\eta)|$$

wird. Wir haben also weiter

$$(XIII)\qquad \Pi_{m,f}(x_0,y_0) = \frac{|f(x_2,\eta) - f(x_1,\eta)|}{x_2-x_1}.$$

Nach (XII) ergibt sich aber

$$\frac{f(x_2,\eta)-f(x_1,\eta)}{x_2-x_1} = f_x(x_0,y_0) + \frac{((x_2-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1}\zeta(x_2,\eta) - \frac{((x_1-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1}\zeta(x_1,\eta),$$

also, wenn

$$(XIV)\quad \frac{((x_2-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1}|\zeta(x_2,\eta)| + \frac{((x_1-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1}|\zeta(x_1,\eta)| = H$$

gesetzt und (XIII) berücksichtigt wird:

$$(XV)\qquad |f_x(x_0,y_0)| - H \leqq \Pi_{m,f}(x_0,y_0) \leqq |f_x(x_0,y_0)| + H.$$

Da nun R ein Quadrat ist, so gilt $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$; da ferner (x_0, y_0) innerhalb R liegt und $y_1 < \eta < y_2$ ist, so haben wir

$$|\eta - y_0| < x_2 - x_1 = y_2 - y_1,$$

also

$$(XVI)\qquad \frac{((x_2-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1}, \quad \frac{((x_1-x_0)^2+(\eta-y_0)^2)^{1/2}}{x_2-x_1} < 1\overline{2}.$$

Wenn nun m gegen Unendlich geht, so gilt $x_1 \to x_0$, $x_2 \to x_0$, $\eta \to y_0$, also wegen (XII) und (XVI) auch $H \to 0$. Demnach ergibt sich aus (XV):

$$\lim_{m\to\infty} \Pi_{m,f}(x_0,y_0) = |f_x(x_0,y_0)|;$$

ie entsprechende Gleichung für $K_{m,f}$ wird ebenso hergeleitet. Damit ist ie Beweisführung zu Ende.

6. Ich möchte noch bemerken, daß die Anwendbarkeit der entickelten Methode nicht auf das Doppelintegral $\iint (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ eschränkt ist; in ganz analoger Weise kann man die Halbstetigkeit einer anzen Klasse von Integralen nachweisen, von welchen ich hier nur das irichletsche Integral $\iint (f_x^2+f_y^2)\,dx\,dy$ besprechen möchte.

Man behalte die durch (III) erklärten Ausdrücke τ_R, $\pi_R[f]$, $\varkappa_R[f]$, ähle aber

$$g_R[f]=\frac{\pi_R[f]^2+\varkappa_R[f]^2}{\tau_R},$$

nd bilde wieder die Summen $G[f;T]=\Sigma g_R[f]$. Alle die Entwickngen bleiben bestehen, mit den folgenden unerheblichen Modifikationen. ie in Nr. 2 angegebene Eigenschaft a) von $g_R[f]$ erhält jetzt die Form

$$g_R[f]\leqq 2L[f]^2\tau_R;$$

eim Nachweise der Eigenschaft b) hat man jetzt die Ungleichung

$$\frac{(\pi_{R'}[f]+\pi_{R''}[f])^2+(\varkappa_{R'}[f]+\varkappa_{R''}[f])^2}{\tau_{R'}+\tau_{R''}}\leqq\frac{\pi_{R'}[f]^2+\varkappa_{R'}[f]^2}{\tau_{R'}}+\frac{\pi_{R''}[f]^2+\varkappa_{R''}[f]^2}{\tau_{R''}}$$

u verifizieren, die offenbar richtig ist. Die Eigenschaft A. lautet jetzt

$$G[f;T]\leqq 2L[f]^2\times \text{ Inhalt des Quadrates } Q.$$

Sonst bleiben alle die Überlegungen wörtlich bestehen, wobei natürich statt $\iint (1+f_x^2+f_y^2)^{1/2}\,dx\,dy$ überall $\iint (f_x^2+f_y^2)\,dx\,dy$ zu setzen st, und man erhält den Satz, daß *das Dirichletsche Integral*

$$D[f]=\iint (f_x^2+f_y^2)\,dx\,dy$$

n bezug auf die Funktion f halbstetig von unten ist[6]).

Szeged, den 12. Februar 1926.

[6]) Vgl. Bd. I, S. 27 des Lehrbuches von L. Tonelli, Fondamenti di calcolo lelle variazioni.

(Eingegangen am 15. Februar 1926.)

(Anmerkung während der Korrektur, den 7. IX. 1926). Die Theorie der Flächenmessung ist inzwischen durch Resultate von Herrn Tonelli bereichert worden, die in vieler Hinsicht als abschließend gelten können. Insbesondere hat Herr Tonelli die notwendige und hinreichende Bedingung dafür aufgestellt, daß der Lebesguesche Flächeninhalt einer Fläche $z=f(x,y)$ gleich dem Doppelintegrale $\iint (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy$

ist. (Vgl. Rendiconti della r. Accademia dei Lincei 1926, vol. III, serie 6ª, 1° sem., fasc. 7, 8, 11, 12 und Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris 1926, t. 182, p. 1198.) — Da der Lebesguesche Flächeninhalt einer krummen Fläche nach Definition halbstetig von der Fläche abhängt, so ist die Halbstetigkeit des Doppelintegrals $\iint (1+p^2+q^2)^{1/2}\,dx\,dy$ sozusagen eine anschauliche geometrische Tatsache. Herr Tonelli hat im Laufe seiner bekannten grundlegenden Untersuchungen über Variationsrechnung gerade den Umstand in den Vordergrund gerückt, daß es sich hier nicht um eine isolierte, an die geometrische Bedeutuug des betrachteten Integrals gebundene Erscheinung handelt. Herr Tonelli hat eine ganze Reihe von Sätzen über die Halbstetigkeit von einfachen Integralen bewiesen (vgl. die zusammenfassende Darstellung in seinem unter [6]) zitierten Lehrbuche), und über Doppelintegrale hat er den allgemeinen Satz ausgesprochen, daß *jedes Doppelintegral, welches zu einem regulären Variationsproblem Anlaß gibt, halbstetig ist* (vgl. Bd. I, S. 26—27 seines Lehrbuches, ferner den Bericht von R. Courant *Über direkte Methoden bei Variations- und Randwertproblemen* im Bd. 34 des Jahresberichtes der deutschen Mathematikervereinigung, insbesondere S. 94). Die Geöczesche Methode reicht in ihrer gegenwärtigen Form zum Beweise dieses allgemeinen Satzes — der mir übrigens zur Zeit der Absendung der vorliegenden Mitteilung auch nicht bekannt war — nicht hin. Der Beweis desselben wurde inzwischen, durch eine anders geartete Methode, von Herrn A. Haar im Laufe seiner Untersuchungen über das Plateausche Problem erbracht.

Bemerkungen zu meiner Arbeit „Zur Theorie stetiger Abbildungen in Funktionalräumen“[1]).

Von

Julius Schauder in Przemyślany (Polen).

Der Satz I′ meiner oben zitierten Arbeit[2]) gilt nur in solchen Feldern, die alle sechs Postulate erfüllen. Besonders das sechste Postulat ist von Wichtigkeit. Es gibt nämlich Räume, so z. B. das Feld aller stetigen Funktionen, in welchen er seine Gültigkeit verliert. Es gelang mir nun, dem Satz I′ eine solche Gestalt zu geben, daß nur die ersten fünf Postulate benutzt werden.

Ich erinnere zuerst kurz an die in A. F. benutzten Definitionen der schwachen Konvergenz und der Schwachstetigkeit.

Definition. *Wir sagen, die Elementenfolge* $\{\Psi_n\}_{n=1,2,\ldots}$ *konvergiert (in bezug auf die Basis* B*) schwach gegen das Element* Ψ*, wenn*

$$1. \qquad \|\Psi_n\| \leqq M,$$

$$2. \qquad \lim_{n\to\infty} c_m(\Psi_n) = c_m(\Psi).$$

Für diese Tatsache wollen wir die folgende Schreibweise benutzen:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \Psi_n \sim \Psi}_B$$

Es sei nun H eine beliebige zum Vektorfelde V gehörende Punktmenge.

Definition. *Eine in* H *erklärte Funktionaloperation* $F(\mathfrak{e}) - \mathfrak{e} \varepsilon H -$ *heißt in* H *schwachstetig (in bezug auf die Basis* B*), wenn aus*

$$\boxed{\lim \Psi_n \sim \Psi}_B; \quad \Psi_n \varepsilon H, \ \Psi \varepsilon H$$

immer folgt

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} F(\Psi_n) \sim \Psi}_B$$

[1]) Math. Zeitschrift 26, S. 47–65.

[2]) Im folgenden werden wir diese Arbeit kurz mit A. F. bezeichnen.

Definition. *Die Menge H heißt schwachkompakt (in bezug auf die Basis B), wenn aus*

$$\{\Psi_n\}_{n=1,2,\ldots} \subset H$$

die Existenz eines solchen zu H gehörenden Elements Ψ folgt, daß

$$\boxed{\lim_{i\to\infty} \Psi_{n_i} \sim \Psi}_B$$

für eine gewisse Teilfolge $\{\Psi_{n_i}\}$ gilt.

Bei allen diesen Definitionen gebrauchen wir nur die ersten fünf Postulate. Wenn die hier eingeführten Begriffe für jede Basis B gelten, so wollen wir diese Tatsache zum Ausdruck bringen, indem wir an entsprechenden Stellen die Worte resp. Zeichen „in bezug auf die Basis B" streichen.

Wir werden die folgenden Sätze beweisen.

Satz I. *In einer konvexen und schwachkompakten Menge H sei eine schwachstetige Funktionaloperation definiert, die H auf eine echte oder unechte Teilmenge von H abbildet. Dann gibt es (ein zu H gehörendes) Element $\mathfrak{e}$, so daß*

$$\mathfrak{e} = F(\mathfrak{e}).$$

Satz II. *Die stetige Funktion $f(x, y, z, p, q)$ sei im ganzen 5-dimensionalen Raume definiert. Sie soll im Unendlichen beschränkt sein, d. h.*

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqq M. \tag{1}$$

Dann ist die erste Randwertaufgabe[3]) *der Differentialgleichung*

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q) \tag{2}$$

lösbar für beliebige stetige Randwerte und für alle beschränkten Gebiete, die keine punktförmigen Randkomponenten besitzen.

Satz III. *Wenn die stetige Funktion $f(x, y, z, p, q)$ der allgemeinen Bedingung*

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqq \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\ ^4) \tag{3}$$

und die stetige Randfunktion $\varphi(P)$ der Bedingung

$$|\varphi(P)| \leqq m \tag{4}$$

[3]) Wohlbemerkt verlangen wir nur, daß die Differentialgleichung

$$\Delta z = f(x, y, z, p, q)$$

fast überall gilt, oder daß die entsprechende Integralformel überall gilt.

[4]) $\Phi(u)$ ist eine beliebige Funktion. Man sieht sofort ein, daß $\Phi(t)$ monoton wachsend angenommen werden kann. Wenn $\Phi(u) = M = \text{konst.}$ gesetzt wird, so erhalten wir die frühere Bedingung.

genügen, so ist die vorher gestellte Aufgabe lösbar für alle „genügend kleinen" Bereiche).* Die Einschränkung auf nicht punktförmige Randkomponenten bleibt bestehen.

Satz IV. *Die stetige Funktion* $f(x, y, z, p, q)$ *sei im 5-dimensionalen Intervalle J:*

$$|x| \leqq d, \quad |y| \leqq d, \quad |z| \leqq d, \quad |p| \leqq d, \quad |q| \leqq d$$

erklärt. Unsere Randwertaufgabe ist dann lösbar für besondere Familien von Bereichen, deren Durchmesser D genügend klein ist. Die Randfunktion $\varphi(P)$ *muß stetig sein und außerdem den folgenden Bedingungen genügen:*

$$(6) \qquad \begin{aligned} &1. \quad |\varphi(P)| \leqq \vartheta < d, \\ &2. \quad \left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| \leqq \vartheta < d, \\ &3. \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| \leqq \vartheta < d; \end{aligned}$$

$v(xy)$ ist die zu $\varphi(P)$ gehörende harmonische Funktion.

Bevor wir zum Beweise dieser Sätze übergehen, wollen wir die auf Seite 416—419 eingeführten Begriffe an einigen Beispielen erörtern.

Beispiel einer schwachkompakten Folge.

Im Felde der im Intervall $\langle a\,b\rangle$ stetigen Funktionen deckt sich der Begriff der schwachen Konvergenz mit der gewöhnlichen (nicht notwendig gleichmäßigen) Konvergenz; oder genauer die Aussage:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} f_n(x) \sim f(x)}$$

für jede Basis B ist mit:

$$\begin{aligned} &1. \quad |f_n(x)| \leqq M \\ &2. \quad \lim f_n(x) = f(x) \end{aligned}$$

gleichbedeutend.

Dieselbe Äquivalenz gilt auch für Funktionen mehrerer Veränderlichen.

Beispiel einer schwachkompakten Menge.

Es sei Ω ein beliebiges beschränktes Gebiet, das keine punktförmigen Randkomponenten besitzt; $G(x, y; \xi, \eta)$ die zu Ω gehörende klassische Greensche Funktion. Dann bilden die stetigen Funktionen

$$(7) \qquad z(x,y) = \iint_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta)\, p(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta; \qquad |p(\xi, \eta)| \leqq M$$

*) (Anmerkung bei der Korrektur). Dies bedeutet nur, daß der Durchmesser des Bereiches genügend klein ist.

eine schwachkompakte und zugleich konvexe Teilmenge im Felde der im abgeschlossenen Gebiete Ω stetigen Funktionen. Dies bedeutet: in jeder Folge

$$(8_1) \qquad z_n(x,y) = \iint_\Omega G(x,y;\xi,\eta)\, p_n(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$(8_2) \qquad |p_n(\xi,\eta)| \leqq M$$

kann man eine solche Teilfolge $\{z_{n_i}\}$ wählen, daß

$$\lim_{i\to\infty} z_{n_i}(x,y) = z(x\,y)$$

existiert. $z(x,y)$ stellt eine Funktion dar, die sich wieder durch (7) darstellen läßt.

In der Tat folgt aus (8_2) nach bekannten Sätzen die Existenz

1. einer solchen Teilfolge $\{p_{n_i}(\xi,\eta)\}$ und

2. einer solcher Funktion $p(\xi,\eta)$, daß für jede im Lebesgueschen Sinne intregierbare Funktion $\varphi(\xi\,\eta)$:

$$(9) \qquad \lim_{i\to\infty} \iint_\Omega p_{n_i}(\xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta = \iint_\Omega p(\xi,\eta)\,\varphi(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Setzen wir in (9) insbesondere $\varphi(\xi,\eta) = G(x,y;\xi,\eta)$, so folgt unsere Behauptung. Die Ungleichung $|p| \leqq M$ beweist man leicht.

Beispiel einer schwachstetigen Funktionaloperation.

Hilfssatz 1. *Wenn die Funktion $p(\xi,\eta)$ quadratisch integrierbar ist und wenn*

$$(10) \qquad z(x,y) = \iint_\Omega G(x,y;\xi,\eta)\, p(\xi,\eta)\, d\zeta\, d\eta$$

gesetzt wird, so gilt fast überall

$$\Delta z = p(x,y).$$

Beweis. Nach einem Satze von Herrn Lichtenstein[5]) ist

$$z_1(x,y) = \iint_\Omega \log r_{12} \cdot p(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta; \qquad r_{12} = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$$

fast überall die Lösung der Gleichung

$$\Delta z_1 = p(x,y)$$

und es genügt also zu zeigen, daß

$$(11) \qquad z_2(x,y) = \iint_\Omega g(x,y;\xi,\eta)\, p(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta$$

---

[5]) L. Lichtenstein, Über das Poissonsche Integral und über die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung des logarithmischen Potentials. Crelles Journal 141, S. 42.

eine harmonische Funktion darstellt. Dabei setzen wir

$$g(x,y;\xi,\eta) = G(x,y;\xi,\eta) - \log r_{12}.$$

Schätzen wir zuerst das Integral (11) ab:

$$|z_2(x,y)| \leqq \sqrt{\iint_\Omega g^2(x,y;\xi,\eta)} \sqrt{\iint_\Omega p^2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta} \tag{12}$$

Da aber

$$|g(x,y;\xi,\eta)| \leqq A_\Omega + |\log(r_{12})|, \tag{13}$$

wo A_Ω eine von Ω abhängende Konstante bedeutet, so folgt aus (12), (13)

$$|z_2(x,y)| \leqq \text{konst.} \sqrt{\iint_\Omega p^2(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta}\,. \tag{14}$$

Wir nehmen jetzt eine solche Folge von Funktionen

$$\{p_n(\xi,\eta)\}_{n=1,2,\ldots},$$

daß jede p_n nur endlich viele Werte annimmt und daß

$$\iint_\Omega (p-p_n)^2\,d\xi\,d\eta \to 0\,. \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt, daß die Funktionen

$$z_2^n(x,y) = \iint_\Omega g(x,y;\xi,\eta)\,p_n(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta$$

gleichmäßig gegen $z_2(x,y)$ konvergieren; $z_2(x,y)$ ist also harmonisch, wenn diese Eigenschaft für sämtliche z_2^n besteht. Es genügt also, unsere Behauptung nur für solche Funktionen p zu beweisen, die in einer Teilmenge Ω' des Gebietes Ω gleich Eins und sonst gleich Null sind. Mit anderen Worten: es genügt zu zeigen, daß

$$\iint_{\Omega'} g(x,y;\zeta,\eta)\,d\xi\,d\eta \tag{16}$$

harmonisch ist.

Hilfssatz 2. *Wenn die Funktionen* (8) *nach einer Funktion* $z(x,y)$ *konvergieren, dann konvergiert* $\frac{\partial z_n}{\partial x}$ $\left(bzw.\ \frac{\partial z_n}{\partial y}\right)$ *nach* $\frac{\partial z}{\partial x}$ $\left(bzw.\ \frac{\partial z}{\partial y}\right)$.

Beweis. Wir zeigen zuerst: Aus (8) und aus den übrigen Voraussetzungen unseres Hilfssatzes folgt die Existenz einer und nur einer solchen Funktion $p(\xi,\eta)$, so daß

$$\lim \iint_\Omega p_n \varphi\,d\xi\,d\eta = \iint_\Omega p\varphi\,d\xi\,d\eta \tag{17}$$

für jede integrierbare Funktion $\varphi(\xi,\eta)$.

(D. h. mit anderen Worten: die Funktionen p_n konvergieren schwach nach einer Funktion p im Felde der integrierbaren Funktionen.)

Wäre unsere Behauptung falsch, dann gäbe es zwei Teilfolgen $\{p_{n_i}\}$, $\{p_{k_i}\}$ mit wesentlich verschiedenen „schwachen Grenzen“ p und p'. D. h. es wäre für jede integrierbare $\varphi(\xi, \eta)$

$$\lim \iint_\Omega p_{n_i} \varphi \, d\xi \, d\eta = \iint_\Omega p \varphi \, d\xi \, d\eta,$$

$$\lim \iint_\Omega p_{k_i} \varphi \, d\xi \, d\eta = \iint_\Omega p' \varphi \, d\xi \, d\eta, \tag{18}$$

$$\iint_\Omega |p - p'| \, d\xi \, d\eta > 0.$$

Setzen wir insbesondere $\varphi(\xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta)$, so ergibt sich

$$\lim z_{n_i}(x, y) = z(x, y) = \iint_\Omega G(x, y; \xi, \eta) \, p(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

$$\lim z_{k_i}(x, y) = z(x, y) = \iint_\Omega G(x, y; \xi, \eta) \, p'(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta. \tag{19}$$

Es ist weiter

$$|p| \leqq M; \quad |p'| \leqq M. \tag{20}$$

Aus (19) (20) folgt nach Hilfssatz 1 fast überall:

$$\Delta z = p = p',$$

was mit (18_3) unvereinbar ist. Also ist (17) erwiesen.

Setzen wir jetzt in (17) $\varphi(\xi, \eta) = \frac{\partial G}{\partial x}(x, y; \xi \eta)$, so ergibt sich der Hilfssatz 2.

Wir sind jetzt imstande das Beispiel einer schwachstetigen Funktionaloperation zu geben. Es sei $f(x, y, z, p, q)$ eine im ganzen 5-dimensionalen Raume stetige Funktion, die der Bedingung

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqq \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \text{ [6]} \tag{21}$$

genügt. Wir betrachten die Funktionaloperation

$$Z(xy) = \iint_\Omega G(x, y; \xi, \eta) \, f\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\xi \, d\eta, \tag{22}$$

wo $z(x, y)$ in der durch (7) gegebenen schwachkompakten Menge H gelegen ist. $Z = U(z)$ ist H schwachstetig. In der Tat folgt nach Hilfssatz 2 aus:

$$z_n(x, y) \to z(x, y),$$

daß auch

$$f\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right) \to f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

[6]) Gemäß der Bemerkung [4]) nehmen wir hier und in folgenden an, daß $\Phi(u)$ monoton ist.

Wir haben noch zu zeigen, daß die Funktionen $f\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}\right)$ gleichmäßig beschränkt sind. Zu diesem Zwecke wollen wir $z(x, y)$ abschätzen:

$$|z(x, y)| = \left|\iint_\Omega G\, p\, d\xi\, d\eta\right| \leqq \sqrt{\iint_\Omega p^2\, d\xi\, d\eta}\,\sqrt{\iint_\Omega G^2(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}.$$

Da aber

$$|G(x, y; \xi, \eta)| \leqq \log(1 + D) + |\log r_{12}|, \text{ [7]} \tag{23}$$

so ist

$$|z(x, y) \leqq \Psi(D)\sqrt{\iint_\Omega p^2\, d\xi\, d\eta} \leqq \Psi(D) \cdot M. \text{ [8]} \tag{24}$$

$\Psi(D)$ ist eine Funktion, die mit dem Durchmesser D nach Null konvergiert. Aus (21), (24) folgt

$$\begin{aligned} |f(x, y, z, p, q) &\leqq \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \leqq \Phi(\sqrt{D^2 + z^2}) \\ &\leqq \Phi[D + \Psi(D)\, M]. \end{aligned} \tag{25}$$

Beweis des Satzes I. Diesen Beweis möchte ich nicht in extenso geben, sondern nur diejenigen Punkte hervorheben, die vom Beweise des Satzes I in A. F. abweichen.

Der entsprechende Hilfssatz lautet hier folgendermaßen: *Es seien $m < n$ zwei feste natürliche Zahlen, H_n eine im Vektorfelde V_n eingebettete, konvexe, abgeschlossene und beschränkte Punktmenge.*

In H_n sei eine Funktion $F_n(\mathfrak{e})$ definiert, die H_n auf eine echte oder unechte Teilmenge von H_n abbildet. Für ein gewisses Zahlenpaar $\varepsilon_0\, \vartheta_0$ sei weiter

$$|c_i[F_n(\mathfrak{e})] - c_i[F_n(\mathfrak{e}')]| < \varepsilon_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n),$$

sobald nur

$$\|\mathfrak{e} - \mathfrak{e}'\| < \vartheta_0 \qquad (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}' \varepsilon H_n).$$

Dann gibt es in H_n ein Element $\mathfrak{e}$, so daß

$$|c_i[F_n(\mathfrak{e})] - c_i(\mathfrak{e})| < \varepsilon_0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n).$$

Der Beweis des Hauptsatzes gestaltet sich dann wie folgt:

Es sei m eine feste natürliche Zahl, ε eine beliebige positive Zahl. Ich behaupte, daß man zwei Zahlen, ein natürliches n und ein positives ϑ finden kann, daß aus:

$$\|s_n(\mathfrak{e}) - s_n(\mathfrak{e}')\| < \vartheta \qquad (\mathfrak{e}, \mathfrak{e}' \varepsilon H;\ n > m)$$

immer folgt:

$$|c_i[F(\mathfrak{e})] - c_i[F(\mathfrak{e}')]| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ n > m). \tag{26}$$

[7]) D ist der Durchmesser des Bereiches Ω.

[8]) Ich erinnere, daß $|p| \leqq M$ nach (7).

Andernfalls gäbe es für unendlich viele natürliche Zahlen n_i, Elemente $\{e_{n_i}\}$ und $\{e'_{n_i}\}$, so daß zugleich

$$\|s_{n_i}(e_{n_i}) - s_{n_i}(e'_{n_i})\| \leqq \frac{1}{n_i}, \tag{27}$$

$$|c_r[F(e_{n_i})] - c_r[F(e'_{n_i})]| > \varepsilon \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

wäre. Aus (27_1) folgt aber, daß die Elemente $\{e_{n_i}\}$ sowie $\{e'_{n_i}\}$ nach demselben Elemente e schwach konvergieren. Dann müßten auch — wegen der vorausgesetzten Schwachstetigkeit von $F(e)$ — die

$$c_r[F(e_{n_i})] \text{ sowie } c_r[F(e'_{n_i})] \qquad (r = 1, 2, \ldots, m)$$

nach $c_r[F(e)]$ konvergieren, was mit (27_2) unvereinbar ist. Also ist (26) erwiesen.

Wir denken uns beliebige m und ε festgesetzt und $n(m, \varepsilon)$, $\vartheta(m, \varepsilon)$ der Bedingung (26) gemäß gewählt. Wir definieren H_n als die Menge der Elemente $s_n(e)$, wenn e zu H gehört. In H_n wird $F_n(e)$ wie in A. F. erklärt[9]). Dann ist nach (26)

$$|c_i[F_n(e)] - c_i[F_n(e')]| < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n),$$

sobald nur

$$\|e - e'\| < \vartheta; \qquad e, e' \varepsilon H_n.$$

Nach dem Hilfssatze ist für ein gewisses $e \varepsilon H_n$

$$|c_i[F_n(e)] - c_i(e)| < 3\varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, m;\ m < n;\ e \varepsilon H_n). \tag{28}$$

Ist $e \varepsilon H$ dasjenige Element, für welches

$$e_n(e) = e,$$

dann ist (nach der Definition der Funktion F_n)

$$F_n(e) = s_n[F(e)],$$

$$c_i[F_n(e)] = c_i[F(e)] \qquad (i = 1, 2, \ldots, m), \tag{29}$$

$$c_i(e) = c_i(e),$$

also nach (28), (29)

$$|c_i[F(e)] - c_i(e)| < 3\varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Da man aber ein solches e für jedes m und ε finden kann, so folgt für ein gewisses $e_0 \varepsilon H$

$$c_i[F(e_0)] = c_i(e_0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m, \ldots),$$

d. h. $e = F(e)$.

Beweis des Satzes II. Man betrachte die folgende H-Menge im Felde der im Bereiche Ω stetigen Funktionen:

[9]) A. F. S. 55, Zeile 11–22. (Anmerkung bei der Korrektur.) Die Funktion F_n entspricht der dort eingeführten Funktion F_N.

$$z(x,y) = v(x,y) + \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta)\, p(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta,$$

$$|p(\xi,\eta)| \leqq M.\ ^{10})$$

$v(x,y)$ ist die mit den gegebenen Randwerten gebildete harmonische Funktion. Man soll den Fixpunkt der Funktionaloperation $z_1 = F(z)$:

$$z_1(x,y) = v(x,y) + \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta)\, f\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right) d\xi\, d\eta$$

finden. Da nach der Voraussetzung[11]) immer auch

$$\left|f\left(\xi,\eta,z,\frac{\partial z}{\partial \xi},\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)\right| \leqq M$$

und nach den früheren Erörterungen $z_1 = F(z)$ in H schwachstetig ist, so folgt wirklich für ein gewisses $z(x,y)$ (nach Satz I) Satz II.

Beim Beweis dieses Satzes (und der folgenden) haben wir nirgends die Stetigkeit der Funktion $f(x,y,z,p,q)$ in den Variablen (x,y) benutzt. In der Tat genügt es, nur die Meßbarkeit der Funktion f in (x,y) vorauszusetzen.

Übrigens läßt sich Satz II dahin verschärfen, daß man statt

$$|f(x,y,z,p,q)| \leqq M$$

die allgemeinere Bedingung nimmt

(30) $$|f(x,y,z,p,q)| \leqq \Psi(x,y),$$

wo

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{+\infty}^{+\infty} \Psi^2(x,y)\, dx\, dy$$

existiert.

Beweis des Satzes III. Man bestimme zuerst die Zahl M, [12]) so daß

(31) $$0 \leqq \Phi(+m) < M$$

und betrachte die H-Menge.

(32) $$z(x,y) = \iint_{\Omega} G(x,y;\xi,\eta)\, p(\xi,\eta)\, d\xi\, d\eta + v(x,y),$$

$$|p(\xi,\eta)| \leqq M.$$

Es ist nach (25)

(33) $$\left|f\left(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| \leqq \Phi\left(\sqrt{D^2+z^2}\right)\ ^{13}) = \Phi[D + M\Psi(D) + m].$$

---

[10]) M ist die in Ungleichung (1) vorkommende Konstante.

[11]) Nach (1).

[12]) Die Zahl m kommt vor in Ungleichuug (4).

[13]) Nach (3).

Da aber die Funktion $\Psi(D)$ mit dem Durchmesser D nach Null konvergiert, so folgt für genügend kleine Bereiche infolge von (31), (33)

$$\left|f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\right| < M, \qquad \text{w. z. b. w.}^{14})$$

Satz III′. *Wenn $f(x, y, z, p, q)$ der Bedingung*

$$|f(x, y, z, p, q)| \leqq (1 + |p| + |q|)\, \Phi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \tag{34}$$

genügt, dann kann die erste Randwertaufgabe für alle genügend kleinen Gebiete Ω gelöst werden[15]).

Die Randfunktion $\varphi(P)$ muß jetzt den folgenden Bedingungen genügen:

$$1. \qquad |v(x, y)| \leqq M.$$

$$2. \qquad \left[\iint_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^{\alpha} dx\, dy\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq M, \qquad (1 < \alpha < 2) \tag{35}$$

$$3. \qquad \left[\iint_{\Omega} \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right|^{\alpha} dx\, dy\right]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq M.$$

$v(x, y)$ hat hier ihre frühere Bedeutung. Wir schicken zwei Hilfssätze voraus.

Hilfssatz 1. *Wenn*

$$\iint_{\Omega} |\bar{p}|^{\beta} d\xi\, d\eta \qquad (\beta > 2) \tag{36}$$

existiert, so gilt für

$$\bar{w}(x, y) = \iint_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial \xi}(x, y; \xi, \eta)\, \overline{p(\xi, \eta)}\, d\xi\, d\eta \tag{37}$$

die Abschätzung

$$|\overline{w(x, y)}| \leqq \text{konst.} \left[\iint_{\Omega} |\bar{p}|^{\beta} d\xi\, d\eta\right]^{\frac{1}{\beta}}, \; ^{16}) \tag{38}$$

sobald nur der Durchmesser des Bereiches Ω die Zahl 1 nicht übersteigt.

Beweis. Es ist in der Tat

$$|\overline{w(x, y)}| \leqq \left[\iint_{\Omega} \left|\frac{\partial G}{\partial \eta}(x, y; \xi, \eta)\right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta\right]^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left[\iint_{\Omega} |\bar{p}|^{\beta}\right]^{\frac{1}{\beta}}.$$

[14]) Der Durchmesser D ist natürlich von m abhängig.

[15]) Der Beweis wird nur für einfach zusammenhängende Bereiche geführt.

[16]) konst. bedeutet eine absolute Konstante.

Es genügt also

$$\iint_{\Omega} \left| \frac{\partial G}{\partial \xi} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta \leqq \text{konst.}$$

oder allgemeiner

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} d\xi\, d\eta \leqq \text{konst.}$$

zu zeigen. Es werde zu diesem Zwecke der Punkt x_0, y_0 festgesetzt und es bedeute $w = \varphi(z)$ diejenige analytische Funktion, die den Kreis K: $|w| \leqq 1$ in der w-Ebene auf das Gebiet Ω in der z-Ebene konform abbildet, so daß $w_0 = 0$ in $z_0 = x_0 + i\, y_0$ übergeht. Es ist keine Beschränkung der Allgemeinheit, wenn wir $z_0 = 0$ voraussetzen. Dann ist

$$\frac{\partial G}{\partial \xi} + i \frac{\partial G}{\partial \eta} = \frac{d}{dz} \log \varphi(z) = \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)},$$

also

$$\iint_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial \eta} \right)^2 \right]^{\frac{\beta}{2(\beta-1)}} d\xi\, d\eta = \iint_{\Omega} \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta.$$

Dieses letzte Integral spalten wir in zwei Teile, die über das Teilgebiet Ω_1 resp. Ω_2 erstreckt werden. In Teilgebiet Ω_1 sei

$$|\varphi'(z)| \leqq 1.$$

Dann ist

$$\iint_{\Omega_1} \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta = \iint_{\Omega_1} \left| \frac{1}{\varphi(z)} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta.$$

Da aber der Durchmesser von Ω kleiner als 1 vorausgesetzt war, so ist nach dem bekannten Schwarzschen Lemma:

$$\left| \frac{1}{\varphi(z)} \right| \leqq \frac{1}{|z|}.$$

Also

$$\iint_{\Omega_1} \left| \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta = \iint_{\Omega_1} \left| \frac{1}{z} \right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta \leqq \text{konst.}\ ^{17})$$

In $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1$ gilt

$$|\varphi'(z)| > 1,$$

---

[17]) Denn $\frac{\beta}{\beta-1} < 2$ nach (36).

also

$$\iint\limits_{\Omega_2} \left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta \text{ [17)]} \leqq \iint\limits_{\Omega_2} \frac{|\varphi'|^2}{|\varphi|^{\frac{\beta}{\beta-1}}} d\xi\, d\eta \leqq \iint\limits_{\Omega} \frac{|\varphi'|^2}{|\varphi|^{\frac{\beta}{\beta-1}}} d\xi\, d\eta\,.$$

Wenn wir zur Variablen $w = w_1 + i w_2$ übergehen, so gewinnen wir

$$\iint\limits_{\Omega_2} \left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right|^{\frac{\beta}{\beta-1}} d\xi\, d\eta \leqq \iint\limits_{K} \frac{|\varphi'|^2}{|\varphi|^{\frac{\beta}{\beta-1}}} \frac{1}{|\varphi'|^2} dw_1\, dw_2 = \iint\limits_{K} \frac{dw_1\, dw_2}{|w|^{\frac{\beta}{\beta-1}}} \leqq \text{Konst.} \text{ [17)]}$$

Hilfssatz 2. *Wenn*

$$\iint\limits_{\Omega} |p|^{\alpha} d\xi\, d\eta \qquad (1<\alpha<2) \tag{39}$$

existiert und wenn $w = U(p)$

$$w(xy) = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial x} \cdot p \cdot d\xi\, d\eta \tag{40}$$

gesetzt wird, so gilt

$$[\iint\limits_{\Omega} |w|^{\alpha} d\xi\, d\eta]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq \text{Konst.} \times \text{Durchm.} \times [\iint\limits_{\Omega} |p|^{\alpha} d\xi\, d\eta]^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{41}$$

Beweis. Wir betrachten die durch

$$\bar{w}(xy) = \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial G}{\partial \xi} \cdot \bar{p}\, d\xi\, d\eta$$

dargestellte Funktionaloperation $\bar{w} = \bar{U}(\bar{p})$, die im Felde aller samt β-ten $\left(\beta = \frac{\alpha}{\alpha-1}\right)$ Potenz integrierbaren Funktionen $\bar{p}(\xi\eta)$ erklärt ist. Nach Hilfssatz 1 ist $\bar{U}(\bar{p})$ linear und stetig. Es gilt nach (38) die genauere Abschätzung

$$(\iint\limits_{\Omega} |\bar{w}|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} d\xi\, d\eta)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \leqq \text{Konst.} \times \text{Durchm.} \times [\iint\limits_{\Omega} |\bar{p}|^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}]^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}.$$

Die Funktionaloperation $\bar{w} = \bar{U}(\bar{p})$ ist zu $w = U(p)$ adjungiert. Also besitzt $U(p)$, das durch (40) gegeben ist, dieselbe Schränkungskonstante: Konst. $\times$ Durchmesser.

Wir sind jetzt imstande, Satz III′ zu beweisen. Man bestimme die Zahl m, so daß

$$2M \cdot \Phi(+M) < m, \tag{42}$$

und betrachte die Gesamtheit H aller Funktionen p, für welche

$$[\iint\limits_{\Omega} |p|^{\alpha} d\xi\, d\eta]^{\frac{1}{\alpha}} \leqq m \qquad (1<\alpha<2). \tag{42′}$$

Wir ordnen der Funktion p die Funktion p_1:

$$p_1 = f\Big(x, y, v + \iint_\Omega G \cdot p\, d\xi\, d\eta,\ \ \frac{\partial v}{\partial x} + \iint_\Omega \frac{\partial G}{\partial x} \cdot p\, d\xi\, d\eta,$$

43)

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \iint_\Omega \frac{\partial G}{\partial y} \cdot p\, d\xi\, d\eta\Big)$$

zu. Diese Zuordnung ist schwachstetig im Felde der Funktionen p, die samt ihrer α-ten Potenz integrierbar sind $(1 < \alpha < 2)$.

Es ist (wenn wir $z = v + \iint_\Omega G \cdot p\, d\xi\, d\eta$ setzen):

44) $$\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \leqq \Phi(D + |z|) \leqq \Phi(D + |v| + |\iint_\Omega G \cdot p\, d\xi\, d\eta|)$$

$$\leqq \Phi\Big(D + |v| + \Psi(D) \cdot (\iint_\Omega |p|^\alpha d\xi\, d\eta)^{\frac{1}{\alpha}}\Big),$$

wo die Funktion $\Psi(D)$ mit dem Durchmesser D des Bereiches Ω nach Null konvergiert. Wir schätzen weiter (44) mit Benutzung von (35) und (42′) ab:

$$\Phi(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \leqq \Phi[D + M + m \cdot \Psi(D)].$$

Also ist nach (34)

$$\Big|f\Big(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\Big)\Big| \leqq \Big(1 + \Big|\frac{\partial z}{\partial x}\Big| + \Big|\frac{\partial z}{\partial y}\Big|\Big)\, \Phi(D + |M| + \Psi(D) \cdot m),$$

und schließlich infolge von (41), (35)

$$\Big[\iint_\Omega p_1^\alpha\Big]^{\frac{1}{\alpha}} = \Big[\iint_\Omega |f|^\alpha d\xi\, d\eta\Big]^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$\leqq \Phi[D + |M| + \Psi(D)\, m] \cdot \Big(\Big[\iint_\Omega \Big|\frac{\partial z}{\partial x}\Big|^\alpha d\xi\, d\eta\Big]^{\frac{1}{\alpha}} + \Big[\iint_\Omega \Big|\frac{\partial z}{\partial y}\Big|^\alpha d\xi\, d\eta\Big]^{\frac{1}{\alpha}} + D^{\frac{1}{\alpha}}\Big)$$

$$\leqq \Phi[D + |M| + \Psi(D) \cdot m] \cdot \Big(2 \cdot \text{Konst.}\, D \cdot m + D^{\frac{1}{\alpha}} + 2M\Big).$$

Ist der Durchmesser D genügend, so ist nach (42)

$$\Big[\iint_\Omega |p_1|^\alpha d\xi\, d\eta\Big]^{\frac{1}{\alpha}} < m.\ ^{18})$$

Man kann jetzt Satz I zur Anwendung bringen.

Diese Beweisführung besitzt eine Lücke. Wir wissen nämlich nicht, ob die Felder aller Funktionen $p(x, y)$, die α-integrierbar sind, ein Vektorfeld bilden, d. h. alle unsere fünf Postulate erfüllen.

---

[18]) Die Bedingung (34) erfüllt z. B. jede lineare Gleichung.

Für Funktionen einer Veränderlichen $f(x)$, die α-integrierbar sind, bildet das Haarsche Orthogonalsystem eine lineare Basis. Es ist anzunehmen, daß das Haarsche Orthogonalsystem zweier Variablen dieselbe Eigenschaft besitzt*).

Beweis des Satzes IV. Den Satz IV werden wir für besondere Klassen K von Bereichen beweisen. Es sei

$$z(x, y) = \iint_{\Omega} G \cdot p \cdot d\xi\, d\eta \qquad (|p| \leqq M)$$

Dann soll für jedes Gebiet der Klasse K die folgende Abschätzung gelten:

$$\left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leqq C_{\Omega} \cdot \mathrm{Max}\,|p|\,; \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leqq C_{\Omega} \cdot \mathrm{Max}\,|p|\,.$$

Die Konstante C_{Ω} soll mit dem Durchmesser D des Bereiches Ω nach Null konvergieren. Eine solche (abgeschlossene) Klasse K bilden nach Dini[19]) in ihrer Gesamtheit die Kreise. Weitere Klassen erhält man durch konforme Abbildung.

Der Beweis des Satzes IV gestaltet sich nun wie folgt:

Die im Intervall J:

$$|x| \leqq d; \quad |y| \leqq d; \quad |z| \leqq d; \quad |p| \leqq d; \quad |q| \leqq d$$

stetige Funktion $f(x, y, z, p, q)$ wird stetig auf den ganzen 5-dimensionalen Raum erweitert, so daß sie im Unendlichen beschränkt bleibt. Wir erhalten so eine Funktion $F(x, y, z, p, q)$, die in J mit $f(x, y, z, p, q)$ übereinstimmt. Nach Satz II hat die Gleichung

$$\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

wenigstens eine Lösung $z(xy)$ mit dem Randwerte $\varphi(P)$. Die spezielle Annahme von Gebieten und die Bedingungen (Bedingung (6)), denen die mit den Randwerten $\varphi(P)$ gebildete harmonische Funktion genügen muß, bewirken, daß der Punkt $x, y, z(xy)$, $\frac{\partial z}{\partial x}(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}(x, y)$ für genügend kleine Bereiche zum Intervall J gehört. D. h. es gilt für solche $z(xy)$:

$$\Delta z = f\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Die hier dargestellte Methode, angewandt auf gewöhnliche Differentialgleichungen, liefert uns die Lösung des Cauchyschen Problems in solcher Allgemeinheit, wie sie z. B. in den Carathéodoryschen Vorlesungen über

*) (Anmerkung bei der Korrektur.) Die hier aufgeworfene Frage habe ich inzwischen in einer an die Mathematische Zeitschrift eingesandten Note: J. Schauder, Sur une propriété du système orthogonal de M. Haar, im positiven Sinne beantwortet.

[19]) M. Dini, Acta math. 25 (1902), S. 185–230.

reelle Funktionen vorkommt. In der Tat betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y).$$ [20])

Der Definitionsbereich der Funktion $f(x, y)$ sei die ganze Ebene. $f(x, y)$ sei stetig in y und genüge in bezug auf die Veränderliche x der Bedingung

$$|f(x, y)| < \varphi(x),$$

wo $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx$ existiert. Dann ist die Gleichung

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{a} f[s, y(s)]\,ds \qquad (-\infty < x < +\infty)$$

für jedes x_0, y_0 lösbar. Die Funktionen

$$y(x) = y_0 + \int_{a_0}^{x} p(s)\,ds; \qquad |p(x)| \leqq \varphi(x)$$

bilden nämlich — beim festgehaltenen x_0, y_0 — eine schwachkompakte[21]) Menge H. Das durch die schwachstetige Funktionaloperation

$$y_0 + \int_{x_0}^{x} f[s, y(s)]\,ds$$

entworfene Bild gehört wieder zu H. Also sind die Bedingungen des Satzes I erfüllt, w. z. b. w.

Will man z. B. das System

$$\frac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2),$$

$$\frac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2)$$

lösen, so beweise man zuerst die folgende Verallgemeinerung des Satzes I.

Ist V ein Vektorfeld, so betrachte man die abstrakte Menge E, die aus allen geordneten Paaren $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'$ — $\mathfrak{e}, \mathfrak{e}' \varepsilon V$ — besteht. Als Norm $\|\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'\|$ definiere man

$$\|\mathfrak{e}, \mathfrak{e}'\| \overset{\text{df}}{=} \|\mathfrak{e}\| + \|\mathfrak{e}'\|,$$

Dann beweist man leicht:

Ist H eine kompakte (schwachkompakte) abgeschlossene (schwachabgeschlossene) Teilmenge in E, $F(\mathfrak{e})$ eine stetige (schwachstetige) Funktionaloperation in H, so gilt, wenn $F(\mathfrak{e})$ die Teilmenge H auf H abbildet, für ein gewisses $\mathfrak{e}_0$

$$\mathfrak{e}_0 = F(\mathfrak{e}_0).$$

---

[20]) Den Fall eines durchwegs stetigen $f(x, y)$ erledigen Birkhoff und Kellog in ihrer in A. F. zitierten Arbeit.

[21]) Sogar kompakte.

(Eingegangen am 4. März 1926.)

Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales

Par

A. Kolmogoroff et D. Menchoff in Moskau.

Le résultat principal de cet article est renfermé dans le théorème suivant:

Théorème I. *Il existe un système de fonctions* $\varphi_n(x)$, *orthogonales sur l'intervalle* $(0, 1)$ *et ne prenant que les valeurs* ± 1, *et une suite de constantes* a_n *telles que la série*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \tag{1}$$

converge, tandis que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{2}$$

diverge partout.

On sait que, dans le cas des fonctions orthogonales arbitraires, la condition suffisante de la convergence presque partout de la série (2) est la convergence de la série suivante:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\log n)^2 a_n^2. \tag{3}$$

On sait, de plus, que le facteur $(\lg n)^2$ ne peut être remplacé par un autre, croissant moins vite[1]).

Dans le cas des fonctions $\varphi_n(x)$ bornées dans leur ensemble nous ne pouvons donner une solution aussi définitive. Nous ne pouvons démontrer que le théorème suivant:

Théorème II. *Quelle que soit la fonction positive* $W(n)$, *vérifiant la condition* $W(n) = o(\lg n)$, *il existe toujours un système de fonctions* $\varphi_n(x)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, *orthogonales dans* $(0, 1)$ *et ne prenant que les*

---

[1]) H. Rademacher, Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen [Math. Ann. 87 (1922), p. 112]. — D. Menchoff, Sur les séries de fonctions orthogonales [Fundamenta Mathematicae 4 (1923), p. 82].

valeurs ± 1, *et une suite de constantes réelles* a_n *telles que la série* (2) *diverge partout, tandis que la série*

(4) $$\sum_{n=1}^{\infty} W(n)\, a_n^2$$

converge.

Ainsi il peut arriver que, dans le cas des fonctions $\varphi_n(x)$ bornées dans leur ensemble, la convergence de la série

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} \lg n \cdot a_n^2$$

est une condition suffisante pour la convergence de la série (2). Pour les séries trigonométriques il en est effectivement ainsi[2]).

On peut encore construire une série (2) divergente presque partout en utilisant comme fonctions $\varphi_n(x)$ les fonctions trigonométriques. Mais, dans ce cas, on ne peut pas s'approcher de la limite $W(n) = \lg n$. C'est pourquoi nous ne faisons ici qu'indiquer sans démonstration le théorème suivant:

Théorème III. *Il existe une série divergente presque partout de la forme*:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(m_n x + \lambda_n),$$

la série (1) *étant convergente et les nombres entiers* m_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ *étant tous différents*[3]).

Le théorème I est une conséquence immédiate du théorème II. Pour la démonstration de ce dernier théorème nous avons besoin du lemme suivant:

Lemme fondamental. *Quel que soit un entier positif* n, *il existe une somme*

(6) $$\sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)$$

possédant les propriétés suivantes:

I. *Les fonctions* $\varphi_k(x)$ *sont deux-à-deux orthogonales sur l'intervalle* $(0, 1)$, *ne prennent que les valeurs* ± 1 *et sont constantes sur chacun des intervalles* δ, *en nombre fini, qu'on obtient par une division convenable de l'intervalle* $(0, 1)$.

II. $$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 = 1.$$

---

[2]) J. Plessner, Crelle Journal **155**, Heft 1, p. 15. Ce théorème a été indépendamment obtenu par M. M. A. Kolmogoroff et G. Seliverstoff et se trouve à ce moment sous presse.

[3]) Le théorème a été démontré par A. Kolmogoroff.

III. *Il existe pour chaque point d'un ensemble E de mesure égale à $\frac{1}{2}$ un entier $p \leqq n$, tel qu'on a*

$$\sum_{k=1}^{p} a_k \varphi_k(x) \geqq C \cdot \sqrt{\lg n},$$

C étant une constante absolue positive.

Démonstration du lemme fondamental.

1°. Nous ne considérons que le cas où $n = 12(4^m - 1)$, m étant un entier positif. On passe sans peine au cas général. Dans l'inégalité III nous remplacons $C \cdot \sqrt{\lg n}$ par $\frac{1}{3}\sqrt{m}$, ce qui est aussi légitime.

Dans la suite nous construirons les termes de la somme (6) en nombre $12(4^m - 1)$ et, ensuite, dans le 11° nous fixerons leur numération par des indices n. Introduisons, d'abords, quelques fonctions auxiliaires.

2°. Soit $S_l(i, r)$ une fonction aux arguments entiers jouissant des propriétés suivantes:

a) Elle est définie pour

$$1 \leqq i \leqq 3 \cdot 2^l,$$
$$1 \leqq r \leqq 3 \cdot 2^l - 1.$$

b) Si $i = \text{const.}$, elle prend une et une seule fois chacune des valeurs $1, 2, 3, \ldots, 3 \cdot 2^l$, à l'exception de i.

c) Si $r = \text{const.}$, elle prend toutes les valeurs entières de 1 à $3 \cdot 2^l$.

d) $$S_l[S_l(i, r), r] = i.$$

e) A chaque couple de nombres $i_1, i_2 (i_1 \neq i_2, 1 \leqq i_1 \leqq 3 \cdot 2^l, 1 \leqq i_2 \leqq 3 \cdot 2^l)$ correspond un nombre unique r satisfaisant les deux relations:

$$S_l(i_1, r) = i_2, \qquad S_l(i_2, r) = i_1.$$

La propriété e) est une conséquence des propriétés b) et d). Nous définissons la fonction $S_l(i, r)$ par une loi de récurrence.

A. Si $l = 1$, les valeurs de $S_l(i, r)$ sont données dans le tableau suivant:

i						
6	5	4	2	3	1	
5	6	2	3	1	4	
4	3	6	1	2	5	
3	4	1	5	6	2	
2	1	5	6	4	3	
1	2	3	4	5	6	
	1	2	3	4	5	r

B. On obtient les valeurs de $S_{l+1}(i,r)$ de $S_l(i,r)$ de la manière suivante:

α) Si $r < 3\cdot 2^l$, $i \leqq 3\cdot 2^l$,

$$S_{l+1}(i,r) = S_l(i,r).$$

β) Si $r < 3\cdot 2^l$, $i > 3\cdot 2^l$,

$$S_{l+1}(i,r) = S_l(i - 3\cdot 2^l, r) + 3\cdot 2^l.$$

γ) Si $r \geqq 3\cdot 2^l$, $i \leqq 3\cdot 2^l$,

$$S_{l+1}(i,r) = i + r, \text{ lorsque } i + r \leqq 3\cdot 2^{l+1},$$

$$S_{l+1}(i,r) = i + r - 3\cdot 2^l, \text{ lorsque } i + r > 3\cdot 2^{l+1}.$$

δ) Si $r \geqq 3\cdot 2^l$, $i > 3\cdot 2^l$,

les valeurs de $S_{l+1}(i,r)$ sont définies, à l'aide de la propriété d), d'une manière univoque par ses valeurs déterminées dans le cas précédent [4]).

3°. Soit $S_{l,q}(i,r)$ une fonction possédant les propriétés b), c), d), e) de $S_l(i,r)$ et la propriété a'):

a') Elle est définie pour

$$1 \leqq i \leqq 3\cdot 2^l,$$

$$1 \leqq r \leqq 3\cdot 2^l \qquad (r \neq q).$$

---

[4]) Pour $l = 2$, les valeurs de $S_l(i,r)$ sont données dans le tableau suivant:

i											
12	11	10	8	9	7	6	5	4	3	2	1
11	12	8	9	7	10	5	4	3	2	1	6
10	9	12	7	8	11	4	3	2	1	6	5
9	10	7	11	12	8	3	2	1	6	5	4
8	7	11	12	10	9	2	1	6	5	4	3
7	8	9	10	11	12	1	6	5	4	3	2
6	5	4	2	3	1	12	7	8	9	10	11
5	6	2	3	1	4	11	12	7	8	9	10
4	3	6	1	2	5	10	11	12	7	8	9
3	4	1	5	6	2	9	10	11	12	7	8
2	1	5	6	4	3	8	9	10	11	12	7
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	r

Au point de vue de la correspondance entre i_1 et i_2 (propriété e)) la construction de ce tableau peut être expliquée ainsi: la correspondance entre i_1 et i_2 dans les limites de 1 à 6 est établie dans le quartier gauche inférieur; la correspondance entre i_1 et i_2 variant tous deux entre 7 et 12 est établie de la même manière dans le quartier gauche supérieur; enfin, la correspondance entre i_1 variant de 1 à 6 et i_2 variant de 7 à 12 est établie dans la moitié droite.

Nous déterminons $S_{l,q}(i,r)$ de la manière suivante:

$$S_{l,q}(i,r) = S_l(i, r-q), \quad \text{si} \quad r-q>0;$$
$$S_{l,q}(i,r) = S_l(i, r-q+3\cdot 2^l), \quad \text{si} \quad r-q<0.$$

On a donc $S_l(i,r) = S_{l,3\cdot 2^l}(i,r)$.

4°. Soit

$$U_{l,q}(i,r) = \operatorname{Min}[i, S_{l,q}(i,r)].$$

De la propriété (d) de la fonction $S_l(i,r)$ on peut déduire que

$$U_{l,q}(i,r) = U_{l,q}[S_{l,q}(i,r), r]; \tag{7}$$

de la propriété e) il suit que, pour r correspondant au couple i_1, i_2, on aura:

$$U_{l,q}(i_1,r) = U_{l,q}(i_2,r) = \operatorname{Min}(i_1,i_2). \tag{8}$$

5°. Posons $\psi_l(x) = +1$ dans les intervalles $\left(\frac{k-1}{3\cdot 2^l}, \frac{2k-1}{6\cdot 2^l}\right)$, $\psi_l(x) = -1$ dans les intervalles $\left(\frac{2k-1}{6\cdot 2^l}, \frac{k}{3\cdot 2^l}\right)$, k étant un nombre entier arbitraire.

6°. *La définition des fonctions* φ_{lqi}. Soit

$$1 \leqq l \leqq m, \quad 1 \leqq q \leqq 3\cdot 2^l, \quad 1 \leqq i \leqq 3\cdot 2^l.$$

Ainsi le nombre total des fonctions φ_{lqi} est égal à

$$n = \sum_{l=1}^{m} (3\cdot 2^l)^2 = 12\,(4^m - 1).$$

Posons $\varphi_{lqi} = \psi_l$ dans l'intervalle $\left(\frac{q-1}{3\cdot 2^l}, \frac{q}{3\cdot 2^l}\right)$,

$$\varphi_{lqi} = \pm\psi_\alpha, \quad \alpha = m + 9\cdot 4^l + 3\cdot 2^l\cdot q + U_{l,q}(i,r)$$

dans l'intervalle $\left(\frac{r-1}{3\cdot 2^l}, \frac{r}{3\cdot 2^l}\right)$, $r \neq q$, où l'on prend le signe $(+)$ dans le cas $U_{l,q}(i,r) = i$ et le signe $(-)$ dans le cas $U_{l,q}(i,r) = S_{l,q}(i,r)$

7°. *La définition des coefficients* a_{lqi}:

$$a_{lqi} = \pm\frac{1}{\sqrt{m\cdot 3\cdot 2^l}},$$

où l'on prend le signe $(+)$ dans le cas $1 \leqq i \leqq 2\cdot 2^l$, et le signe $(-)$ dans le cas $2\cdot 2^l < i \leqq 3\cdot 2^l$.

8°. La somme (6) possédant les propriétés indiquées dans le lemme fondamental, sera formée des termes $a_{lqi}\varphi_{lqi}(x)$ dont le nombre total a été déjà défini dans 6°. Déterminons la somme des carrés de leurs coefficients:

$$\sum a_{lqi}^2 = \sum_{l=1}^{m}\sum_{q=1}^{3\cdot 2^l}\sum_{i=1}^{3\cdot 2^l}\frac{1}{m\cdot 9\cdot 4^l} = 1.$$

La condition II du lemme fondamental est ainsi vérifiée.

9°. Pour démontrer que les fonctions φ_{lqi} sont deux-à-deux orthogonales (condition I), nous aurons besoin des trois lemmes qui établissent les propriétés des fonctions $\psi_t(x)$ (voir 5°).

Lemme I.

$$\int_{\frac{k-1}{3\cdot 2^n}}^{\frac{k}{3\cdot 2^n}} \psi_t(x)\,dx = 0, \quad \text{lorsque} \quad t \geqq n.$$

Lemme II.

$$\int_{\frac{k-1}{3\cdot 2^n}}^{\frac{k}{3\cdot 2^n}} \psi_{t_1}(x)\cdot\psi_{t_2}(x)\,dx = 0, \quad \text{lorsque} \quad t_1 \neq t_2,\ t_1 \geqq n.$$

Lemme III.

$$\int_{\frac{k-1}{3\cdot 2^n}}^{\frac{k}{3\cdot 2^n}} [\psi_t(x)]^2\,dx = \frac{1}{3\cdot 2^n}.$$

Dans tous ces trois lemmes k et n sont des entiers positifs.

Dans la suite, nous aurons encore besoin du

lemme IV. *L'ensemble des points x de l'intervalle $\left(\frac{g-1}{3\cdot 2^t}, \frac{g}{3\cdot 2^t}\right)$ où la somme*

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \psi_{t_k}(x)$$

est positive a une mesure égale à celle de l'ensemble de points du même intervalle où cette somme est négative. On suppose ici que g est un nombre entier et tous les t_k sont supérieurs ou egaux à t (t et t_k des entiers positifs).

La démonsration du lemme s'obtient immédiatement de la relation évidente

$$\sigma\left(\frac{g}{3\cdot 2^t} - y\right) = -\sigma\left(\frac{g-1}{3\cdot 2^t} + y\right)$$

qui est certainement vraie pour tout y irrationnel.

10°. Pour démontrer que les deux fonctions $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ sont orthogonales, il nous faut considérer séparément les cas suivants:

Premier cas. $l_1 \neq l_2$. Posons, pour fixer les idées, $l_1 > l_2$ et considérons l'intervalle $\left(\frac{k-1}{3\cdot 2^{l_1}}, \frac{k}{3\cdot 2^{l_1}}\right)$. On a, dans cet intervalle, $\varphi_{l_1 q_1 i_1} = \psi_{l_1}$,

$\varphi_{l_2 q_2 i_2} = \psi_{t_2}$, où t_1, t_2 dépendent en général de k. Quel que soit k, il vient, en vertu de la définition des φ_{lqi} (voir 6°): $t_1 \neq t_2$, $t_1 \geqq l_1$; donc il résulte du lemme II que, dans chacun des intervalles considérés, l'intégrale du produit $\varphi_{l_1 q_1 i_1} \cdot \varphi_{l_2 q_2 i_2}$ est égale à zéro, d'où il résulte que les deux fonctions $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$ et $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ sont orthogonales dans $(0, 1)$.

Deuxième cas. $l_1 = l_2 = l$; $q_1 \neq q_2$. On a dans l'intervalle $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{k}{3 \cdot 2^l}\right)$: $\varphi_{l q_1 i_1} = \psi_{t_1}$, $\varphi_{l q_2 i_2} = \psi_{t_2}$, où $t_1 \geqq l$, $t_2 \geqq l$, $t_1 \neq t_2$; donc, dans cet intervalle, l'intégrale du produit $\varphi_{l_1 q_1 i_1} \cdot \varphi_{l_2 q_2 i_2}$ est aussi égale à zéro et les deux fonctions $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$, $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ sont orthogonales dans $(0, 1)$.

Troisième cas. $l_1 = l_2 = l$, $q_1 = q_2 = q$, $i_1 \neq i_2$. En répétant les raisonnements des deux premiers cas, on voit que dans chacun des intervalles $\left(\frac{k-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{k}{3 \cdot 2^l}\right)$, sauf deux intervalles exceptionnels, l'intégrale du produit $\varphi_{l_1 q_1 i_1} \cdot \varphi_{l_2 q_2 i_2}$ est égale à zéro. Un de ces intervalles exceptionnels correspond au $k = q$ et l'on a, dans cet intervalle, $\varphi_{lqi_1} = \varphi_{lqi_2} = \psi_t$ (voir 6°). Donc, en vertu du lemme III, l'intégrale du produit est égale à $+\frac{1}{3 \cdot 2^l}$.

Le deuxième intervalle exceptionnel est celui pour lequel, en vertu de (8), $U_{lq}(i_1, k) = U_{lq}(i_2, k)$. On a, dans cet intervalle, $\varphi_{lqi_1} = -\varphi_{lqi_2} = \pm \psi_t$ (la valeur de t est définie dans 6°). Donc, en vertu du lemme III, l'intégrale du produit est égale à $-\frac{1}{3 \cdot 2^l}$. On voit ainsi que, dans ce troisième cas, les deux fonctions $\varphi_{l_1 q_1 i_1}$ et $\varphi_{l_2 q_2 i_2}$ sont aussi orthogonales dans $(0, 1)$.

11°. Déterminons, pour chacune des fonctions φ_{lqi} un point fondamental x_{lqi} par les conditions:

$$x_{lqi} = \frac{2q-1}{6 \cdot 2^l}, \quad \text{lorsque} \quad i \leqq 2 \cdot 2^l,$$

et

$$x_{lqi} = \frac{q}{3 \cdot 2^l}, \quad \text{lorsque} \quad i > 2 \cdot 2^l.$$

Numérotons les fonctions φ_{lqi} dans l'ordre de *décroissance* des x_{lqi}. Les fonctions ayant le même point fondamental peuvent être numérotées dans un ordre arbitraire. Numérotons, en suite, les coefficients a_{lqi} et les points x_{lqi} dans le même ordre que les φ_{lqi} correspondantes. Considérons la somme

$$(6) \qquad \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x), \quad n = 12 \cdot (4^m - 1),$$

où a_k et $\varphi_k(x)$ sont les a_{lqi} et φ_{lqi} numérotées dans l'ordre indiqué ci-dessus.

Nous allons démontrer que la somme (6) possède toutes les trois

propriétés énoncée dans le lemme fondamental. Les propriétés I et II ont été déjà obtenues dans 8° et 10°. Il nous reste à démontrer que la somme (6) possède la propriété III.

12°. Soit g un nombre entier quelconque. Désignons par x_k $(1 \leqq k \leqq n)$ les points x_{lqi} numérotés dans le même ordre que les termes $a_k \varphi_k(x)$, c'est-à-dire de droite à gauche. Considérons, dans l'intervalle $\Delta = \left(\frac{g-1}{6 \cdot 2^m}, \frac{g}{6 \cdot 2^m}\right)$, une somme partielle

$$\sum_{k=1}^{r_g} a_k \varphi_k(x) \tag{9}$$

qui consiste de tous les termes $a_k \varphi_k(x)$ pour lesquels les points fondamentaux correspondents x_k sont à droite de Δ. (Puisque les x_k sont numérotés de droite à gauche, il existe un entier p_g, ne dépendant pas des points de l'intervalle Δ et tel que la somme (9) possède cette propriété.)

Il existe, pour chaque valeur de l $(1 \leqq l \leqq m)$ un et un seul entier q tel que l'intervalle Δ est compris dans l'intervalle $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. Pour certaines valeurs de l l'intervalle Δ est situé tout entièrement dans la moitié gauche de l'intervalle $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$, tandis que pour les autres valeurs de l cet intervalle Δ est compris dans la moitié droite de $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. Considérons une valeur quelconque de l telle que Δ est compris dans la moitié gauche de l'intervalle indiqué. Dans ce cas, pour toutes les valeurs de i $(1 \leqq i \leqq 3 \cdot 2^l)$ les points x_{lqi} sont situés à droite de Δ (voir 11°), et par suite, on trouve dans la somme (9) tous les termes de la forme $a_{lqi} \cdot \varphi_{lqi}$. Parmi ces termes, les $2 \cdot 2^l$ premiers sont égaux à $+\frac{1}{\sqrt{m} \cdot 3 \cdot 2^l}$, tandis que les autres 2^l termes sont égaux à $-\frac{1}{\sqrt{m} \cdot 3 \cdot 2^l}$ (voir 6° et 7°).

Donc la somme de tous les termes considérés est égale à $\frac{1}{3 \cdot \sqrt{m}}$.

Considérons maintenant une valeur de l telle que Δ est compris dans la moitié droite de $\left(\frac{q-1}{3 \cdot 2^l}, \frac{q}{3 \cdot 2^l}\right)$. Dans ce cas, les points x_{lqi} qui sont situés à droite de Δ ne correspondent qu'aux valeurs de $i > 2 \cdot 2^l$. Donc il n'existe, dans la somme (9), que 2^l termes de la forme $a_{lqi} \cdot \varphi_{lqi}$, et tous ces termes sont positifs, puisque a_{lqi} et φ_{lqi} sont négatives. La somme des termes considérés est égale à $\frac{1}{3 \cdot \sqrt{m}}$. On obtient donc la même valeur que dans le cas précédent.

Désignons par Σ' la somme de tous les termes dans (9) qui ont été considérés jusqu'ici. Il résulte des raisonnements précédents que

$$\Sigma' = \frac{1}{3}\sqrt{m}$$

pour tous les points de Δ.

Considérons, ensuite, la somme Σ'' de tous les termes dans (9) qui n'appartiennent pas à Σ'. Dans l'intervalle Δ chaque terme $a_k \varphi_k(x)$ de Σ'' est égal à une certaine expression $a_k \cdot \psi_{t_k}(x)$, où $t_k > m$ (voir la définition des fonctions φ_{lqi} dans 6°). Donc, en vertu du lemme IV, Σ'' est non négative dans un ensemble de mesure égale à la moitié de l'intervalle Δ, et par suite, la somme totale (9) est supérieure ou égale à $\frac{1}{3}\sqrt{m}$ au moins dans un ensemble de mesure égale à $\frac{1}{2}$ de Δ. On obtient ainsi la propriété III énoncée dans le lemme fondamental.

La démonstration du théorème II.

1°. Désignons, pour n quelconque, par a_{kn} et $\varphi_{kn}(x)$ les quantités a_k et les fonctions $\varphi_k(x)$ vérifiant les conditions du lemme fondamental. Posons, pour un intervalle arbitraire $\delta = (a, b)$,

$$\varphi_{kn}(x, \delta) = \varphi_{kn}\left(\frac{x-a}{b-a}\right),$$

La somme

$$\sum_{k=1}^{n} a_{kn} \varphi_{kn}(x, \delta)$$

possède les mêmes propriétés que la somme (6) du lemme fondamental; il faut seulement remplacer l'intervalle $(0, 1)$ par δ et l'ensemble E par un ensemble $E(\delta)$, Mes $E(\delta) = \frac{1}{2}\delta$.

2°. Pour démontrer le théorème II, considérons une fonction positive quelconque $W(n)$, assujettie à une seule condition

$$\lim_{n \to \infty} \frac{W(n)}{\lg n} = 0. \tag{10}$$

Il existe, évidemment, une suite infinie d'entiers positifs n_ν $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$, qui possèdent les propriétés:

$$\sum_{i=1}^{\nu-1} n_i < n_\nu, \tag{11}$$

$$\frac{W(n)}{\lg n} < \frac{1}{\nu^2}, \quad \text{pour} \quad n \geqq n_\nu. \tag{12}$$

Posons

$$N_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} n_i; \tag{13}$$

on a, en vertu de (11),

$$N_\nu < 2 n_\nu. \tag{14}$$

3°. Déterminons les quantités a_n et les fonctions $\varphi_n(x)$ de la manière suivante:

a) Pour $n \leqq n_1$

$$a_n = \frac{a_{nn_1}}{\sqrt{\lg n_1}}, \quad \varphi_n(x) = \varphi_{nn_1}(x).$$

b) En admettant que a_n et $\varphi_n(x)$ sont déjà définies pour $n \leqq N_{\nu-1}$ et en supposant déjà connu que l'intervalle $(0, 1)$ peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels δ dans chacun desquels toutes les fonctions $\varphi_n(x)$ $(n \leqq N_{\nu-1})$ conservent des valeurs constantes, nous posons, pour $N_{\nu-1} < n \leqq N_\nu$:

$$a_n = \frac{a_{k n_\nu}}{\sqrt{\lg n_\nu}},$$

$$\varphi_n(x) = \varphi_{k n_\nu}(x, \delta)$$

dans chacun des intervalles δ, où $k = n - N_{\nu-1}$.

La propriété des fonctions $\varphi_n(x)$ d'être constantes dans certains intervalles δ, obtenus par une subdivision de $(0, 1)$ en un nombre fini de parties, est conservée à chaque pas; donc on peut définir de proche en proche les fonctions $\varphi_n(x)$ et les coefficients a_n pour toutes les valeurs de n.

4°. On peut facilement démontrer que les fonctions $\varphi_n(x)$ sont deux-à-deux orthogonales et que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \tag{5}$$

diverge presque partout. En changeant les valeurs de certaines fonctions $\varphi_n(x)$ sur un ensemble de mesure nulle, on peut, ensuite, transformer la série (5) en une série divergente partout.

Pour achever la démonstration du théorème II, il nous reste à montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} W(n) \cdot a_n^2 \tag{4}$$

converge. Cela résulte du calcul suivant:

$$\sum_{n=N_1+1}^{\infty} W(n) \cdot a_n^2 = \sum_{\nu=2}^{\infty} \sum_{n=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_n^2 \frac{W(n)}{\lg n} \cdot \lg n$$

$$\leqq \sum_{\nu=2}^{\infty} \lg N_\nu \cdot \sum_{n=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_n^2 \cdot \frac{W(n)}{\lg n}$$

$$\leqq C' \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \lg n_\nu \cdot \frac{1}{(\nu-1)^2} \cdot \sum_{k=N_{\nu-1}+1}^{N_\nu} a_n^2 = C' \cdot \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{1}{(\nu-1)^2} = C,$$

où C' et C sont des constantes[5]).

[5]) La démonstration du théorème II est analogue aux raisonnements déjà employés par M. Menchoff dans l'ouvrage «Sur les séries de fonctions orthogonales» (Fundamenta Mathematicae 4, p. 99).

(Eingegangen am 5. März 1926.)

Über die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung.

Von

Hans Späth in Stuttgart.

In Bd. 19 dieser Zeitschrift wies Herr Grandjot[1]) darauf hin, daß der Beweis von Herrn Mertens[2]) für die Irreduzibilität der Kreisteilungsgleichung (im Körper der rationalen Zahlen) durch Benutzung des Dirichletschen Satzes über die Existenz unendlich vieler Primzahlen in der arithmetischen Progression sehr vereinfacht werden kann. Vielleicht ist auch der folgende, ähnliche Beweis von Interesse, der die Verwendbarkeit dieses Satzes klar hervortreten läßt, ihn aber dann auch ganz elementar umgeht.

Ich benutze die bekannte Tatsache: Wird für ganze rationale $k \geqq 1$

$$F_k(x) = (x - \alpha_1^k) \cdots (x - \alpha_l^k)$$

gesetzt und hat $F_1(x)$ ganze rationale Koeffizienten, so haben alle $F_k(x)$ ganze rationale Koeffizienten, und wenn $k = p$ Primzahl ist, gilt

$$F_p(x) \equiv F_1(x) \pmod{p}. \tag{1}$$

(Die Kongruenz bezieht sich auf die entsprechenden Koeffizienten und folgt aus

$$\sum \alpha_1^p \cdots \alpha_i^p \equiv (\sum \alpha_1 \cdots \alpha_i)^p \equiv \sum \alpha_1 \cdots \alpha_i \pmod{p} \qquad (i = 1, \ldots, l).)$$

Es mögen nun die $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ primitive n-te Einheitswurzeln sein. Für $k \equiv h \pmod{n}$ ist dann wegen $\alpha_i^k = \alpha_i^h$

$$F_k(x) \equiv F_h(x). \tag{2}$$ [3])

---

[1]) Math. Zeitschrift 19 (1924), S. 128/129.

[2]) Sitzungsber. der K. Akad. der Wissensch. zu Wien, Math. naturw. Klasse, Abt. IIa, Jahrg. 1908, S. 689 690.

[3]) Zur Unterscheidung der Identität von der Kongruenz ist hier die Identität durch $\equiv$ bezeichnet.

ür $(k, n) = 1$ und $p \equiv k \pmod{n}$ ist daher nach (1)

$$F_k(x) \equiv F_p(x) \equiv F_1(x) \pmod{p},$$

$$F_k(x) - F_1(x) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Da es aber nach dem Dirichletschen Satze unendlich viele Primzahlen $\equiv k \pmod{n}$ gibt, folgt für $(k, n) = 1$ stets

$$F_k(x) \equiv F_1(x).$$

omit ist jedes α_1^k mit $(k, n) = 1$, d. h. jede primitive n-te Einheitswurzel, in α. Also ist die Kreisteilungsgleichung irreduzibel.

Nun kommt man aber auch ganz elementar zum Ziel. Die zu n teilerremden positiven Zahlen k mögen in die Klasse $\mathfrak{A}$ getan werden, wenn

$$F_k(x) \equiv F_1(x),$$

onst in die Klasse $\mathfrak{B}$. Es genügt nach dem Vorangehenden zu zeigen, laß $\mathfrak{B}$ leer ist. — Mit a_1 und a_2 gehört nun auch $a_1 a_2$ zu $\mathfrak{A}$; denn

$$F_{a_1 a_2}(x) \equiv (F_{a_1})_{a_2}(x) \equiv F_{a_2}(x) \equiv F_1(x).$$

Daher muß jede etwaige Zahl aus $\mathfrak{B}$ durch wenigstens eine Primzahl aus $\mathfrak{B}$ teilbar sein. Ferner gehört mit den Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ auch

$$b = n p_1 \cdots p_{m-1} + p_m$$

zu $\mathfrak{B}$, wegen

$$b \equiv p_m \pmod{n}$$

und (2). Also ist b durch eine Primzahl aus $\mathfrak{B}$ teilbar. Da aber $p_1, \ldots, p_m$ in b nicht aufgehen, so gibt es zu m Primzahlen $p_1, \ldots, p_m$ in $\mathfrak{B}$ noch eine weitere. Somit enthält $\mathfrak{B}$, wenn es nicht leer ist, unendlich viele Primzahlen. Dann gibt es auch in wenigstens einer der endlich vielen in $\mathfrak{B}$ enthaltenen Restklassen mod n unendlich viele Primzahlen, etwa in $p \equiv h \pmod{n}$. Für diese ist aber nach (1) und (2) wie oben

$$F_h(x) \equiv F_p(x) \equiv F_1(x) \pmod{p},$$

$$F_h(x) - F_1(x) \equiv 0 \pmod{p},$$

also

$$F_h(x) \equiv F_1(x).$$

Demnach gehörte h doch zu $\mathfrak{A}$. Der Widerspruch löst sich, wenn $\mathfrak{B}$ leer ist.

Bemerkung. Ähnlich kann man auch die Irreduzibilität der Gleichung der primitiven n-ten Einheitswurzeln in einem erweiterten Körper

$\Omega(\varepsilon)$ beweisen, wo ε eine m-te Einheitswurzel und $(m, n) = 1$ ist. Die $F_k(x)$ brauchen dann nur in $\Omega(\varepsilon)$ ganze Koeffizienten zu haben. Es zeigt sich, daß (1) auch jetzt noch richtig bleibt für Primzahlen p mit $\varepsilon^p = \varepsilon$, also sicher für $p \equiv 1 \pmod{m}$. Man kann daher die Schlüsse des ersten Beweises analog durchführen, wenn man in den Restklassen $(\mathrm{mod}\, n)$ nur die Primzahlen $p \equiv 1 \pmod{m}$ berücksichtigt, und der Dirichletsche Satz führt auch hier ohne weiteres zum Ziel. Die elementaren Schlüsse des zweiten Beweises versagen jedoch.

Stuttgart, den 12. März 1926.

(Eingegangen am 16. März 1926.)

Über die Gitterpunkte auf homothetischen Kurven.

Von

Vojtěch Jarník in Prag.

§ 1.

Einleitung.

Es seien in der Ebene zwei rechtwinklige Koordinatenachsen x, y und eine Punktmenge L gegeben. Die Punktmenge L möge folgenden Voraussetzungen genügen[1]):

I. L ist eine beschränkte Punktmenge.

II. Alle Punkte von L liegen im Gebiet $x > 0$, $0 \leqq y \leqq x$.[2])

III. Es gibt zwei Zahlen u, v mit $0 \leqq u < v \leqq 1$, so daß es in L einen und nur einen Punkt (x, y) mit $\frac{y}{x} = w$ gibt, wenn w eine Zahl mit $u \leqq w \leqq v$ ist, dagegen keinen Punkt mit $\frac{y}{x} = w$, wenn $w > v$ oder $w < u$.

Wenn λ eine positive Zahl ist und wenn der Punkt (x, y) die Punktmenge L durchläuft, so durchläuft der Punkt $(\sqrt{\lambda}\, x, \sqrt{\lambda}\, y)$ eine Punktmenge, die mit $L(\lambda)$ bezeichnet werde. Zu jedem Punkte (x, y) des Gebietes

$$x > 0, \quad u \leqq \frac{y}{x} \leqq v \tag{1}$$

gibt es offenbar einen und nur einen Wert von λ, für welchen der Punkt (x, y) in der Menge $L(\lambda)$ enthalten ist. Dieser Wert von λ ist also in (1) eine wohldefinierte Funktion von x, y; wir bezeichnen sie mit $f(x, y)$.

---

[1]) Alle vorkommenden Zahlen und Punkte sind reell; alle Quadratwurzeln sind positiv zu nehmen.

[2]) Diese Voraussetzung ist nicht wesentlich; sie wurde eingeführt, nur um unendliche Werte von $\frac{y}{x}$ und die Zweideutigkeit gewisser Funktionen zu vermeiden. Durch Spiegelungen an den Geraden $x = 0$, $y = 0$, $y = x$, $y = -x$ kann man sich allerdings von dieser Voraussetzung leicht befreien.

Diese Funktion ist offenbar positiv-homogen zweiter Ordnung in (1), d. h. wenn $a > 0$ und wenn (1) gilt, so ist

$$f(ax, ay) = a^2 f(x, y). \tag{2}$$

Weiter ist in (1) offenbar $f(x, y) > 0$. Wir machen über $f(x, y)$ noch folgende Voraussetzung:

IV. $f(x, y)$ ist in (1) stetig[3]) und besitzt für

$$x > 0, \quad u < \frac{y}{x} < v \tag{3}$$

stetige partielle Ableitungen bis zur vierten Ordnung.

Wir betrachten nun alle in (1) liegenden Gitterpunkte (a, b). Die zugehörigen Werte $f(a, b)$ bilden eine abzählbare Menge. Wir bezeichnen die verschiedenen unter ihnen, wachsend geordnet[4]), mit $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$. Es ist also $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$; offenbar gibt es unendlich viele λ_n und es ist $\lim_{n=\infty} \lambda_n = +\infty$.

Die vorliegende Note ist dem Beweis folgender vier Behauptungen gewidmet:

Behauptung I. *Wenn in* (1) *gilt*

$$f(x, y) = \alpha(ax + by)^2 \qquad (\alpha \textit{ beliebig}^5);\ a, b \textit{ ganz}), \tag{4}$$

so ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{\lambda_{n+1} - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} = 2\sqrt{\alpha}\,\delta > 0,$$

wo $\delta = (a, b)$ *den größten gemeinsamen Teiler von* a, b *bedeutet.*

Behauptung II. *Wenn in* (1) *gilt*

$$f(x, y) = (ax + by)^2 \qquad \left(\frac{b}{a} \textit{ irrational}\right), \tag{5}$$

so ist

$$\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

endlich.

Behauptung III. *Wenn in* (1) *gilt*

$$f(x, y) = \alpha(ax^2 + 2bxy + cy^2) \tag{6}$$

$$(\alpha \textit{ beliebig};\ a, b, c \textit{ ganz};\ b^2 - ac \neq 0)$$

---

[3]) Die Punktmenge L ist also ein stetiger Kurvenbogen; die Koordinaten x, y eines Punktes von L lassen sich z. B. als stetige Funktionen des Parameters $\tau = \frac{y}{x}$ $(u \leqq \tau \leqq v)$ darstellen.

[4]) Die Möglichkeit einer solchen Anordnung folgt sofort aus der Beschränktheit von L.

[5]) α ist dann von selbst positiv.

ist

$$\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$$

endlich und von Null verschieden.

Behauptung IV. *In allen anderen Fällen ist*

$$\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$$

endlich.

Die geometrische Bedeutung dieser Behauptungen wird sofort klar, wenn man sich vergegenwärtigt, daß $f(x, y) = 1$ mit den Nebenbedingungen (1) die Gleichung der Kurve L ist und daß $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ diejenigen Werte von λ sind, für welche die Kurve $L(\lambda)$ (d. h. die in bezug auf den Nullpunkt im Verhältnis $\sqrt{\lambda}:1$ gestreckte Kurve L) durch mindestens einen Gitterpunkt hindurchgeht.

Die Behauptungen I, II, III sind fast trivial; man findet ihre Beweise im § 3. Auch der Beweis der Behauptung IV, dem der § 2 gewidmet ist, verläuft ganz elementar. Es wird nur von den einfachsten Sätzen der Differentialrechnung Gebrauch gemacht; aus der Zahlentheorie wird nur folgender wohlbekannter Satz herangezogen:

Hilfssatz 1. *Es sei $\varrho > 0$; dann gibt es eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i $(i = 1, 2, \ldots)$ mit*

$$p_i, q_i \text{ ganz und positiv}, \quad \lim_{i=\infty} p_i = \lim_{i=\infty} q_i = +\infty,$$

$$\left| \frac{p_i}{q_i} - \varrho \right| < \frac{1}{q_i^2}.$$

Ich beweise gleich noch folgenden einfachen

Hilfssatz 2. Voraussetzung: *Es seien A, B, C drei Zahlen mit $B^2 - AC \neq 0$; es gebe zwei Zahlen τ_1, τ_2 mit $\tau_1 < \tau_2$, so daß die Funktion $\sigma(\tau) = -\frac{A+B\tau}{B+C\tau}$ für jedes irrationale τ mit $\tau_1 < \tau < \tau_2$, $B + C\tau \neq 0$ einen irrationalen Wert hat.*

Behauptung. *Man kann eine Zahl α und drei ganze Zahlen a, b, c so finden, daß $A = \alpha a$, $B = \alpha b$, $C = \alpha c$.*

Beweis. Es ist $\sigma(\tau)$ für alle τ mit $\tau_1 < \tau < \tau_2$ definiert, höchstens mit Ausnahme eines einzigen Wertes, und nimmt für $\tau_1 < \tau < \tau_2$ unendlich viele Werte — also auch unendlich viele rationale Werte — an. Es sei also τ' eine Zahl mit $\tau_1 < \tau' < \tau_2$, für welche $\sigma(\tau')$ rational ist und es sei τ'' eine von τ' und $\sigma(\tau')$ verschiedene Zahl mit $\tau_1 < \tau'' < \tau_2$, für welche $\sigma(\tau'')$ rational ist. Nach der Voraussetzung sind dann auch τ' und τ'' rationale Zahlen. Es ist weiter

$$A+B(\tau'+\sigma(\tau'))+C\tau'\sigma(\tau')=0,$$
$$A+B(\tau''+\sigma(\tau''))+C\tau''\sigma(\tau'')=0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber, daß die Zahlen A, B, C wirklich — wie behauptet — zueinander in rationalen Verhältnissen stehen, außer wenn gleichzeitig

$$\tau'+\sigma(\tau')=\tau''+\sigma(\tau''), \qquad \tau'\sigma(\tau')=\tau''\sigma(\tau'').$$

Diese beiden Gleichungen würden aber besagen, daß entweder $\tau'=\tau''$, $\sigma(\tau')=\sigma(\tau'')$ oder $\tau'=\sigma(\tau'')$, $\sigma(\tau')=\tau''$ ist. Dies ist aber nicht der Fall, da τ'' von τ' und $\sigma(\tau')$ verschieden angenommen wurde, w. z. b. w.

Bemerkung. Die Voraussetzung IV hat eine Form, die die Eigenschaften der Kurve L vielleicht nicht ganz deutlich hervortreten läßt. Ich will sie darum durch folgende Voraussetzung V ersetzen:

V. Es gebe zwei Zahlen t_1, t_2 $(t_1<t_2)$ und zwei Funktionen $F(t), G(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $F(t), G(t)$ sind für $t_1\leqq t\leqq t_2$ stetig und besitzen für $t_1<t<t_2$ stetige Ableitungen vierter Ordnung.

2. Die Menge der Punkte $(F(t), G(t))$ $(t_1\leqq t\leqq t_2)$ ist mit L identisch und aus $F(t)=F(t')$, $G(t)=G(t')$ folgt $t=t'$.

3. Für $t_1<t<t_2$ ist stets $F'(t)\,G(t)-F(t)\,G'(t)\neq 0$. [6])

Ich behaupte: die Voraussetzungen I, II, III, IV sind mit den Voraussetzungen I, II, III, V äquivalent. Denn erstens, wenn I, II, III, IV gilt, so ist die Kurve L durch $f(x,y)=1$ oder durch $x^2 f\left(1,\frac{y}{x}\right)=1$ mit den Nebenbedingungen (1) gegeben; die Parameterdarstellung

$$x=\frac{1}{\sqrt{f(1,\tau)}}, \qquad y=\frac{\tau}{\sqrt{f(1,\tau)}} \qquad (u\leqq\tau\leqq v)$$

zeigt also, daß die Voraussetzung V erfüllt ist.

Andererseits, wenn I, II, III, V gilt, so kann man die Kurve $L(\lambda)$ durch die Gleichungen

$$(\alpha) \qquad x=\sqrt{\lambda}\,F(t), \qquad y=\sqrt{\lambda}\,G(t) \qquad (t_1\leqq t\leqq t_2)$$

ausdrücken. Also ist $\frac{y}{x}$ eine stetige Funktion von t, die jeden Wert höchstens einmal annimmt; sie ist also monoton und man kann daher t als eine stetige Funktion von $\frac{y}{x}$ ausdrücken $\left(\text{für } x>0, \quad u\leqq\frac{y}{x}\leqq v\right)$; aus der ersten Gleichung (α) folgt dann, daß auch λ in (1) eine stetige

[6]) Die Kurve L besitzt also für $t_1<t<t_2$ in jedem Punkte eine wohldefinierte, nicht durch den Nullpunkt gehende Tangente.

Funktion $f(x, y)$ von x, y ist. Daß diese Funktion in (3) stetige partielle Ableitungen bis zu vierter Ordnung besitzt, folgt sofort aus (α) nach dem Satze über implizite Funktionen, da die Funktionaldeterminante $(F'(t)\,G(t) - F(t)\,G'(t))$ nicht verschwindet.

Die Voraussetzung IV besagt also über die Kurve L mehr als eine bloße Stetigkeits- und Differentiierbarkeitsbedingung. Man kann aber diesen Übelstand in den meisten Fällen leicht beseitigen und die Gültigkeit unserer Behauptungen auf allgemeinere Kurven ausdehnen. Z. B. kann man folgendes behaupten: Die Punktmenge L möge den Voraussetzungen I, II, III genügen; man definiere $f(x, y)$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, L(\lambda)$ wie am Anfang dieses Paragraphen. Es gebe weiter zwei Zahlen u', v' $(u \leqq u' < v' \leqq v)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $f(x, y)$ ist für $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ stetig und besitzt in jedem inneren Punkt dieser Punktmenge stetige partielle Ableitungen bis zu vierter Ordnung.

2. Keine der Gleichungen (4), (5), (6) sei erfüllt für alle x, y mit $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$. Dann ist $\liminf\limits_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich. Denn es sei L' diejenige Teilmenge von L, für welche $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ gilt, und es seien $\lambda_{n_1}, \lambda_{n_2}, \ldots, (n_1 < n_2 < \ldots)$ diejenigen Werte von λ, für welche $L(\lambda)$ durch einen Gitterpunkt des Gebietes $x > 0$, $u' \leqq \frac{y}{x} \leqq v'$ hindurchgeht. Dann besagt die Behauptung IV, auf die Kurve L' angewandt, daß $\liminf\limits_{k=\infty} ((\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k})\sqrt{\lambda_{n_k}})$ endlich ist; um so mehr ist also $\liminf\limits_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich.

Ich will aber bei solchen naheliegenden Modifikationen unseres Satzes nicht länger verweilen und gehe zu seinem Beweis über.

§ 2.

Beweis der Behauptung IV.

Nach dem Eulerschen Satz über homogene Funktionen gilt in (3) wegen (2) und infolge der Voraussetzung IV):

$$2f(x, y) = x^2 f_{x^2}(x, y) + 2xy f_{xy}(x, y) + y^2 f_{y^2}(x, y). \tag{7}$$

Dabei sind f_{x^2}, f_{xy}, f_{y^2} positiv-homogene Funktionen nullter Ordnung; man kann also in (3) setzen

$$f_{x^2}(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_{xy}(x, y) = \psi\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_{y^2}(x, y) = \chi\left(\frac{y}{x}\right), \tag{8}$$

wo die Funktionen $\varphi(\tau)$, $\psi(\tau)$, $\chi(\tau)$ für $u < \tau < v$ stetig sind und eine stetige zweite Ableitung besitzen.

Aus (8) folgt weiter in (3) $\left(\text{wir setzen } \frac{d\varphi(\tau)}{d\tau} = \varphi'(\tau) \text{ usw.}\right)$

$$(9)\quad \begin{cases} f_{x^3}(x,y) = -\frac{y}{x^2}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_{x^2y}(x,y) = \frac{1}{x}\varphi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^3}\psi'\left(\frac{y}{x}\right), \\ f_{xy^2}(x,y) = \frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{y}{x^2}\chi'\left(\frac{y}{x}\right), \quad f_{y^3}(x,y) = \frac{1}{x}\chi'\left(\frac{y}{x}\right). \end{cases}$$

Um die Behauptung IV nachzuweisen, genügt es offenbar, folgendes zu zeigen: falls in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt, so ist es möglich, vier Folgen ganzer Zahlen

$$\begin{aligned} &a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n, \quad \ldots \\ &b_1, \quad b_2, \quad \ldots, \quad b_n, \quad \ldots \\ &c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n, \quad \ldots \\ &d_1, \quad d_2, \quad \ldots, \quad d_n, \quad \ldots \end{aligned}$$

zu finden, die folgende Eigenschaften besitzen:

1. Die Punkte (a_n, b_n) und (c_n, d_n) liegen im Gebiet (1) $(n = 1, 2, \ldots)$.

2. $$\lim_{n=\infty} a_n = \lim_{n=\infty} b_n = \lim_{n=\infty} c_n = \lim_{n=\infty} d_n = +\infty.$$

3. $$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) \neq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

4. $$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(a_n, b_n)}}\right),$$
$$f(a_n, b_n) - f(c_n, d_n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(c_n, d_n)}}\right)$$

(Das Zeichen O bezieht sich auf wachsendes n.)

Wir setzen also jetzt voraus, daß in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt. Dann sind zwei Fälle möglich:

Fall A. Es ist $\chi'(\tau) = 0$ für alle τ mit $u < \tau < v$.

Fall B. Es gibt ein τ_1 mit $u < \tau_1 < v$, $\chi'(\tau_1) \neq 0$.

Wir werden diese beiden Fälle nacheinander diskutieren.

Fall A. Nach (9) ist dann auch $\psi'(\tau) = \varphi'(\tau) = 0$ für $u < \tau < v$; es ist also nach (7) und (8) in diesem Falle

$$(10)\quad f(x,y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2$$

in (3), wo A, B, C, Konstanten sind. Wegen der Stetigkeit von $f(x,y)$ gilt dann (10) im ganzen Gebiet (1). Weil in (1) weder (4) noch (5) noch (6) gilt, so ist $B^2 - AC \neq 0$ und es ist nicht möglich, eine reelle Zahl α und drei ganze Zahlen a, b, c so zu bestimmen, daß $A = \alpha a^2$,

$B = ab$, $C = ac$. Nach dem Hilfssatz 2 gibt es eine irrationale Zahl τ_0 mit $B + C\tau_0 \neq 0$, $u < \tau_0 < v$, so daß $-\frac{A + B\tau_0}{B + C\tau_0}$ rational ist. Wir setzen

11) $$-\frac{A + B\tau_0}{B + C\tau_0} = \frac{r}{s} \quad (r, s \text{ ganz und teilerfremd})$$

und bestimmen nach Hilfssatz 1 eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i (p_i, q_i ganz und positiv, $\lim_{i=\infty} p_i = \lim_{i=\infty} q_i = +\infty$), so daß

12) $$\frac{p_i}{q_i} = \tau_0 + \frac{c_i}{q_i^2}, \quad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist für $i > i_0$: $0 < q_i - s$, $u < \frac{p_i - r}{q_i - s} < v$, $0 < q_i + s$, $u < \frac{p_i + r}{q_i + s} < v$ und

13) $$\begin{aligned} &f(q_i + s,\ p_i + r) - f(q_i - s,\ p_i - r) \\ &\quad = 4\,(A q_i s + B(q_i r + p_i s) + C p_i r). \end{aligned}$$

Aus (11), (12) folgt aber

14) $$\begin{aligned} 0 &= s\,(A + B\tau_0) + r(B + C\tau_0) \\ &= s\left(A q_i + B\left(p_i - \frac{c_i}{q_i}\right)\right) + r\left(B q_i + C\left(p_i - \frac{c_i}{q_i}\right)\right). \end{aligned}$$

Aus (13), (14) folgt

15) $$\begin{cases} f(q_i + s,\ p_i + r) - f(q_i - s;\ p_i - r) = 4\frac{c_i}{q_i}(s B + r C) \\ \quad = 4\frac{c_i}{q_i} k (B^2 - AC) \qquad \text{(nach (11))}, \end{cases}$$

wo k die von Null verschiedene Zahl $\frac{s}{B + C\tau_0}$ bedeutet. Es ist offenbar für wachsendes i (wegen $f(1, \tau_0) > 0$)

16) $$\begin{cases} f(q_i + s,\ p_i + r) = q_i^2 f\left(1 + \frac{s}{q_i},\ \frac{p_i}{q_i} + \frac{r}{q_i}\right) \sim q_i^2 f(1, \tau_0), \\ f(q_i - s,\ p_i - r) = q_i^2 f\left(1 - \frac{s}{q_i},\ \frac{p_i}{q_i} - \frac{r}{q_i}\right) \sim q_i^2 f(1, \tau_0); \end{cases}$$

also ist nach (15) und (16)

17) $$f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i + s, p_i + r)}}\right),$$

18) $$f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) = O\left(\frac{1}{\sqrt{f(q_i - s, p_i - r)}}\right).$$

Es ist weiter τ_0 irrational, also $c_i \neq 0$ (nach (12)), also gilt nach (15)

19) $$f(q_i + s, p_i + r) - f(q_i - s, p_i - r) \neq 0 \text{ für } i > i_0.$$

Aus (17), (18), (19) folgt aber nach dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten, daß in diesem Falle wirklich $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich ist, w. z. b. w.

Fall B. Es ist nicht identisch $\chi'(\tau) = 0$ für $u < \tau < v$; wegen der Stetigkeit von $\chi'(\tau)$ gibt es also zwei Zahlen u_1, v_1 mit $u < u_1 < v_1 < v$, so daß $\chi'(\tau)$ für $u_1 < \tau < v_1$ stets von Null verschieden ist; also ist $\chi(\tau)$ eine für $u_1 < \tau < v_1$ entweder stets wachsende oder stets abnehmende Funktion von τ, woraus sofort folgt, daß die Funktion von τ

$$f_y(1, \tau) = f_y(1, u_1) + \int_{u_1}^{\tau} f_{yy}(1, \xi)\, d\xi = f_y(1, u_1) + \int_{u_1}^{\tau} \chi(\xi)\, d\xi$$

für $u_1 < \tau < v_1$ höchstens zweimal verschwindet. Wir können also zwei Zahlen u_2, v_2 mit $u_1 < u_2 < v_2 < v_1$ so wählen, daß $f_y(1, \tau)$ für $u_2 < \tau < v_2$ stets von Null verschieden ist. Für $u_2 < \tau < v_2$ ist dann die Funktion $\frac{f_x(1, \tau)}{f_y(1, \tau)}$ stetig und, wie ich behaupte, nicht konstant. Denn gesetzt, es wäre für $u_2 < \tau < v_2$

$$f_x(1, \tau) + h f_y(1, \tau) = 0 \qquad (h \text{ konst.})$$

so wäre wegen

$$f_x(x, y) = x f_x\left(1, \frac{y}{x}\right), \quad f_y(x, y) = x f_y\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

auch

$$f_x(x, y) + h f_y(x, y) = 0 \tag{20}$$

für

$$x > 0, \quad u_2 < \frac{y}{x} < v_2, \tag{21}$$

also auch

$$f_{xx}(x, y) + h f_{xy}(x, y) = 0, \quad f_{xy}(x, y) + h f_{yy}(x, y) = 0;$$

daraus würde aber nach (7) und (8) folgen

$$2 f(x, y) = (h x - y)^2 f_{yy}(x, y) = (h x - y)^2 \chi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die Gleichung (20) würde dann besagen, daß in (21) gilt

$$(h x - y)^2 \frac{y - h x}{x^2} \chi'\left(\frac{y}{x}\right) = 0;$$

es müßte also für $u_2 < \tau < v_2$ gelten

$$(h - \tau)^3 \chi'(\tau) = 0,$$

was mit der Voraussetzung im Widerspruch steht, daß $\chi'(\tau)$ für $u_2 < \tau < v_2$ von Null verschieden ist. Die Funktion $\frac{f_x(1, \tau)}{f_y(1, \tau)}$ ist also für $u_2 < \tau < v_2$ stetig und nicht konstant, also gibt es sicher einen Wert τ_0 mit $u_2 < \tau_0 < v_2$, so daß $\frac{f_x(1, \tau_0)}{f_y(1, \tau_0)}$ rational und von Null verschieden ist.

Wir haben also die Existenz einer Zahl τ_0 mit

$$u < \tau_0 < v, \quad \chi'(\tau_0) \neq 0, \quad f_y(1, \tau_0) \neq 0, \quad \frac{f_x(1, \tau_0)}{f_y(1, \tau_0)} = -\frac{r}{s}$$

(r, s ganz, teilerfremd und von Null verschieden)

achgewiesen.

Es ist noch $r - s\tau_0 \neq 0$; denn aus $r - s\tau_0 = 0$ würde folgen $_x(1, \tau_0) + \tau_0 f_y(1, \tau_0) = 0$, während aus dem Eulerschen Satz

$$f_x(1, \tau_0) + \tau_0 f_y(1, \tau_0) = 2 f(1, \tau_0) > 0$$

olgt.

Ich wähle nun eine ganze positive Zahl k so, daß

22) $$k^2 \frac{|(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0)|}{6} > 2 |s\psi(\tau_0) + r\chi(\tau_0)|.$$

s sei weiter p_i, q_i eine (nach dem Hilfssatz 1 existierende) Folge von ahlenpaaren mit (p_i, q_i ganz und positiv, $\lim_{i=\infty} p_i = \lim_{i=\infty} q_i = +\infty$)

$$\frac{p_i}{q_i} = \tau_0 + \frac{c_i}{q_i^2}, \quad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Für $i > i_0$ ist das Rechteck $\mathfrak{P}_i$ mit den Ecken $(q_i - ks$, $_i - kr)$, $(q_i - ks,\ p_i + kr)$, $(q_i + ks,\ p_i - kr)$, $(q_i + ks,\ p_i + kr)$ anz im Gebiet

23) $$x > 0, \quad \frac{u + \tau_0}{2} \leqq \frac{y}{x} \leqq \frac{\tau_0 + v}{2}$$

nthalten. Es ist also für $i > i_0$ nach dem Taylorschen Lehrsatz

24)
$$\begin{cases} f(q_i + ks, p_i + kr) = f(q_i, p_i) + k(s f_x(q_i, p_i) + r f_y(q_i, p_i)) \\ \quad + \frac{k^2}{2}(s^2 f_{x^2}(q_i, p_i) + 2rs f_{xy}(q_i, p_i) + r^2 f_{y^2}(q_i, p_i)) \\ \quad + \frac{k^3}{6}(s^3 f_{x^3}(q_i, p_i) + 3rs^2 f_{x^2y}(q_i, p_i) + \ldots) + R_i', \end{cases}$$

o für den Rest R_i' die Abschätzung gilt

$$|R_i'| \leqq \frac{k^4}{24}(|r| + |s|)^4 M_i^{(4)};$$

abei bedeutet $M_i^{(4)}$ die kleinste gemeinsame obere Schranke der absoluten eträge der vierten Ableitungen $f_{x^4}(x, y)$, $f_{x^3y}(x, y)$, ..., $f_{y^4}(x, y)$ im echteck $\mathfrak{P}_i$.

Man bekommt eine der Formel (24) analoge Formel für $f(q_i - ks$, $_i - kr)$, die aus (24) entsteht, indem man k durch $-k$ und R_i' durch $_i''$ ersetzt, wo für R_i'' dieselbe Abschätzung wie für R_i' gilt. Durch ubtraktion dieser beiden Formeln ergibt sich endlich

$$(25)\quad \begin{cases} f(q_i+ks,\,p_i+kr)-f(q_i-ks,\,p_i-kr)=2k(sf_x(q_i,p_i) \\ +rf_y(q_i,p_i))+\frac{k^3}{3}(s^3f_{x^3}(q_i,p_i)+3rs^2f_{x^2y}(q_i,p_i)+\ldots)+R_i, \end{cases}$$

wo $|R_i|\leqq\frac{k^4}{12}(|r|+|s|)^4M_i^{(4)}$.

Es ist aber (weil der Punkt (q_i,τ_0q_i) wegen $\left|\frac{c_i}{q_i}\right|<1$ in $\mathfrak{P}_i$ liegt)

$$(26)\quad \begin{cases} f_x(q_i,p_i)=f_x\left(q_i,\tau_0q_i+\frac{c_i}{q_i}\right)=f_x(q_i,\tau_0q_i)+\frac{c_i}{q_i}f_{xy}(q_i,\tau_0q_i)+S_i', \\ f_y(q_i,p_i)=f_y\left(q_i,\tau_0q_i+\frac{c_i}{q_i}\right)=f_y(q_i,\tau_0q_i)+\frac{c_i}{q_i}f_{y^2}(q_i,\tau_0q_i)+S_i'', \end{cases}$$

wo $|S_i'|\leqq\frac{c_i^2}{2q_i^2}M_i^{(3)}$, $|S_i''|\leqq\frac{c_i^2}{2q_i^2}M_i^{(3)}$; dabei ist $M_i^{(3)}$ die kleinste gemeinsame obere Schranke von $|f_{xy^2}(x,y)|$, $|f_{y^3}(x,y)|$ in $\mathfrak{P}_i$.

Endlich ist

$$(27)\quad \begin{cases} f_{x^3}(q_i,p_i)=f_{x^3}(q_i,\tau_0q_i)+T_i', \\ f_{x^2y}(q_i,p_i)=f_{x^3y}(q_i,\tau_0q_i)+T_i'' \text{ usw.} \end{cases}$$

Dabei ist $|T_i'|\leqq\frac{|c_i|}{q_i}M_i^{(4)}$, $|T_i''|\leqq\frac{|c_i|}{q_i}M_i^{(4)}$ usw.

Es ist aber in (23) für wachsendes x nach (9)

$$f_{xy^2}(x,y)=\frac{1}{x}\psi'\left(\frac{y}{x}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right),\quad f_{x^3}(x,y)=\frac{1}{x}\chi'\left(\frac{y}{x}\right)=O\left(\frac{1}{x}\right)$$

gleichmäßig in y. Bei wachsendem i gilt aber in $\mathfrak{P}_i$:

$$x\sim q_i,\quad y\sim p_i\sim\tau_0q_i;\quad \text{also ist}\quad M_i^{(3)}=O\left(\frac{1}{q_i}\right).$$

Aus (9) folgt weiter in (23)

$$f_{x^4}''(x,y)=\frac{2y}{x^3}\varphi'\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''\left(\frac{y}{x}\right)=O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

gleichmäßig in y; dieselbe Abschätzung gilt für die anderen vierten Ableitungen; also ist $M_i^{(4)}=O\left(\frac{1}{q_i^2}\right)$. Es ist also

$$R_i=O\left(\frac{1}{q_i^2}\right),\quad S_i'=O\left(\frac{1}{q_i^3}\right),\quad S_i''=O\left(\frac{1}{q_i^3}\right),$$

$$T_i'=O\left(\frac{1}{q_i^3}\right),\quad T_i''=O\left(\frac{1}{q_i^3}\right)\text{ usw.}$$

Wenn wir nun aus (26), (27) in (25) einsetzen, bekommen wir:

$$\begin{aligned} f(q_i + k s, p_i + k r) - f(q_i - k s, p_i - k r) \\ = 2k(s f_x(q_i, \tau_0 q_i) + r f_y(q_i, \tau_0 q_i)) \\ + \frac{k^3}{3}(s^3 f_{x^3}(q_i, \tau_0 q_i) + 3 r s^2 f_{x^2 y}(q_i, \tau_0 q_i) + \ldots) \\ + \frac{2 k c_i}{q_i}(s f_{xy}(q_i, \tau_0 q_i) + r f_{y^2}(q_i, \tau_0 q_i)) + O\left(\frac{1}{q_i^2}\right). \end{aligned}$$

Es ist aber

$$s f_x(q_i, \tau_0 q_i) + r f_y(q_i, \tau_0 q_i) = q_i(s f_x(1, \tau_0) + r f_y(1, \tau_0)) = 0$$

und nach (8) und (9) ist

$$s f_{xy}(q_i, \tau_0 q_i) + r f_{y^2}(q_i, \tau_0 q_i) = s \psi(\tau_0) + r \chi(\tau_0),$$

$$s^3 f_{x^3}(q_i, \tau_0 q_i) + 3 r s^2 f_{x^2 y}(q_i, \tau_0 q_i) + \ldots = \frac{1}{q_i}(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0).$$

Also ist

$$(28)\quad \begin{cases} f(q_i + k s, p_i + k r) - f(q_i - k s, p_i - k r) \\ \quad = \dfrac{2 k c_i}{q_i}(s \psi(\tau_0) + r \chi(\tau_0)) + \dfrac{k^3}{3 q_i}(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0) + O\left(\dfrac{1}{q_i^2}\right). \end{cases}$$

Es ist also wegen (22) und wegen $|c_i| < 1$:

$$\begin{aligned} |f(q_i + k s, p_i + k r) - f(q_i - k s, p_i - k r)| \\ > \frac{k^3}{6 q_i}|(r - s\tau_0)^3 \chi'(\tau_0)| + O\left(\frac{1}{q_i^3}\right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$(29)\quad f(q_i + k s, p_i + k r) - f(q_i - k s, p_i - k r) \neq 0$$

für $i > i_1$.

Andererseits folgen aus (28) wegen

$$f(q_i + k s, p_i + k r) \sim f(q_i - k s, p_i - k r) \sim q_i^3 f\left(1, \frac{p_i}{q_i}\right) \sim q_i^3 f(1, \tau_0)$$

(denn $f(1, \tau_0) > 0$)

die Beziehungen

$$(30)\quad \begin{cases} f(q_i + k s, p_i + k r) - f(q_i - k s, p_i - k r) \\ \quad = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{f(q_i + k r, p_i + k s)}}\right) = O\left(\dfrac{1}{\sqrt{f(q_i - k r, p_i - k s)}}\right). \end{cases}$$

Aus (29) und (30) folgt aber nach dem am Anfang dieses Paragraphen Gesagten, daß auch in diesem Falle B $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich ist, womit die Behauptung IV vollständig bewiesen ist.

Bemerkung 1. Es sei $u = 0$, $v = 1$; dann genügt die Funktion $f(x, y) = (x^3 + y^3)^{2/3}$ allen Voraussetzungen, die wir für die Anwendbar-

keit der Behauptung IV verlangten. Es sind hier die $\lambda_n^{3/2}$ ganze Zahlen, also $\lambda_{n+1}^{3/2} - \lambda_n^{3/2} \geqq 1$, woraus $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) \geqq \frac{2}{3}$ folgt. Man darf also die Behauptung IV *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) = 0$" ersetzen.

Bemerkung 2. Es sei

$$\sigma = 1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{3^4} + \frac{2}{3^{16}} + \ldots = 1 + 2\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^{2^{2i}}},$$

$$\pi_k = 3^{2^{2k}}, \quad \varrho_k = \left(1 + 2\sum_{i=0}^{k} \frac{1}{3^{2^{2i}}}\right)\pi_k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

π_k, ϱ_k sind positiv und ungerade, $\sigma > 1$. Es ist

$$(31) \qquad 0 < \sigma - \frac{\varrho_k}{\pi_k} = 2\sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{1}{3^{2^{2i}}} < \frac{2}{3^{2^{2k+2}}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{3^i} = \frac{3}{(3^{2^{2k}})^4} = \frac{3}{\pi_k^4}.$$

Also ist σ eine irrationale Zahl. Ich setze nun $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = x^2 + \sigma y^2$; die Bedingungen für die Anwendbarkeit der Behauptung IV sind offenbar erfüllt. Es sei

$$\xi_i = \frac{\varrho_i + 1}{2}, \quad \xi_i' = \frac{\varrho_i - 1}{2}, \quad \eta_i = \frac{\pi_i - 1}{2}, \quad \eta_i' = \frac{\pi_i + 1}{2}.$$

Für $i > i_0$ ist $\xi_i > 0$, $\xi_i' > 0$, $0 < \frac{\eta_i}{\xi_i} < 1$, $0 < \frac{\eta_i'}{\xi_i'} < 1$ und

$$f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i, \eta_i) = \xi_i'^2 - \xi_i^2 + \sigma(\eta_i'^2 - \eta_i^2) = -\varrho_i + \sigma\pi_i;$$

also

$$0 < f(\xi_i', \eta_i') - f(\xi_i, \eta_i) < \frac{3}{\pi_i^3} = O\left(\frac{1}{(f(\xi_i, \eta_i))^{3/2}}\right)$$

$$\left(\text{denn } f(\xi_i, \eta_i) \sim \frac{\varrho_i^2 + \sigma\pi_i^2}{4} \sim \frac{\sigma^2 + \sigma}{4}\pi_i^2\right).$$

Es ist also um so mehr $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n}) = 0$; man darf also die Behauptung IV *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf_{n=\infty} ((\lambda_{n+1} - \lambda_n)\sqrt{\lambda_n})$ endlich und von Null verschieden" ersetzen.

§ 3.

Beweis der Behauptungen I, II, III.

Beweis der Behauptung I. Es sei in (1)

$$f(x, y) = \alpha(ax + by)^2, \quad a, b \text{ ganz}, \quad \alpha > 0.$$

Wegen $f(x, y) > 0$ hat der Ausdruck $ax + by$ in (1) ein unveränderliches Vorzeichen; o. B. d. A. können wir annehmen, daß er in (1)

sitiv ist. Es sei δ der größte gemeinsame Teiler von a und b. Dann nd die Werte von $\sqrt{\lambda_n}$ ganzzahlige Vielfache von $\sqrt{a}\cdot\delta$, also

2) $$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \geqq \sqrt{a}\,\delta.$$

Es sei andererseits $n > 0$ eine ganze Zahl; dann ist $\lambda_n = a(a h_n + b k_n)^2$, o (h_n, k_n) ein Gitterpunkt in (1) ist. Wir können dann zwei ganze ahlen h_n', k_n' so wählen, daß

$$a(h_n' - h_n) + b(k_n' - k_n) = \delta$$

nd man kann offenbar — indem man statt h_n', k_n' bzw. $h_n' - b m_n$, $+ a m_n$ mit geeignet gewähltem ganzzahligem m_n schreibt — noch reichen, daß der Punkt (h_n', k_n') in (1) liegt, mindestens für hinreichend roße Werte von n. Also ist für $n > n_0$

3) $$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} \leqq \sqrt{a}\,\delta.$$

Aus (32), (33) folgt für $n > n_0$

$$\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n} = \sqrt{a}\,\delta,$$

so erstens $\sqrt{\lambda_{n+1}} \sim \sqrt{\lambda_n}$ und endlich

$\lambda_{n+1} - \lambda_n = (\sqrt{\lambda_{n+1}} - \sqrt{\lambda_n})(\sqrt{\lambda_{n+1}} + \sqrt{\lambda_n}) \sim 2\delta\sqrt{a}\sqrt{\lambda_n}$, w. z. b. w.

Beweis der Behauptung II. Es sei in (1)

$$f(x, y) = (ax + by)^2, \qquad \frac{b}{a} \text{ irrational.}$$

ir wählen eine Folge von Zahlenpaaren p_i, q_i (p_i, q_i ganz und positiv, n $p_i = \lim_{i=\infty} q_i = +\infty$), wo

$$\frac{p_i}{q_i} = \left|\frac{b}{a}\right| + \frac{c_i}{q_i^2}, \quad |c_i| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

ir setzen

$$x_i = \operatorname{Max}\left(\left[\frac{6\,u\,p_i}{v-u}\right], \left[\frac{3\,q_i}{v-u}\right]\right) + 1$$

nd wählen eine ganze Zahl y_i so, daß

$$\frac{u+v}{2} < \frac{y_i}{x_i} < \frac{u+2v}{3},$$

as für hinreichend große Werte von x_i, d. h. von i, offenbar möglich . Dann ist, $x_i' = x_i + p_i$, $y_i' = y_i - q_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a}$ gesetzt,

$$u < \frac{\frac{y_i}{x_i} - \frac{q_i}{x_i}}{1 + \frac{p_i}{x_i}} \leqq \frac{y_i'}{x_i'} < \frac{y_i}{x_i} + \frac{q_i}{x_i} < \frac{u+2v}{3} + \frac{v-u}{3} = v$$

und

$$|f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i)|$$
$$= |(a(x_i' + x_i) + b(y_i' + y_i))(a(x_i' - x_i) + b(y_i' - y_i))|$$
$$= \left|\left(a(p_i + 2x_i) + b\left(-q_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a} + 2y_i\right)\right|\right| \cdot \left|ap_i - bq_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a}\right)\Big|.$$

Wegen $p_i = O(q_i)$, $x_i = O(q_i)$, $y_i = O(q_i)$, $ap_i - bq_i \operatorname{sgn}\frac{b}{a} = a\frac{c_i}{q_i}$ ist also

$$|f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i)| < C \cdot |c_i|, \tag{34}$$

wo C von i unabhängig ist. Weiter ist

$$f(x_i', y_i') - f(x_i, y_i) \neq 0,$$

da sonst entweder $x_i = x_i'$, $y_i = y_i'$ oder $x_i = -x_i'$, $y_i = -y_i'$ sein müßte, was nicht der Fall ist. Daraus folgt, wegen $|c_i| < 1$, daß $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ endlich ist, w. z. b. w.

Bemerkung 1. Es seien jetzt σ, π_k, ϱ_k die in der Bemerkung 2 des § 2 definierten Zahlen. Es sei $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = (x + \sigma y)^2$; dann sind alle Voraussetzungen für die Anwendbarkeit der Behauptung II erfüllt. Wenn wir im Beweise der Behauptung II für a, b, p_i, q_i die Zahlen $1, \sigma, \varrho_i, \pi_i$ nehmen, so ist nach (31): $|c_i| < \frac{3}{\pi_i^2}$, also $\lim_{i=\infty} c_i = 0$. Wegen (34) ist also jetzt $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) = 0$. Man darf also die Behauptung II *nicht* durch die schärfere Behauptung „es ist $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ endlich und von Null verschieden" ersetzen.

Bemerkung 2. Hurwitz[7]) hat folgenden Satz bewiesen: Es sei $c > \sqrt{5}$; dann gibt es nur endlich viele Zahlenpaare p, q mit p, q ganz, $q \neq 0$, $\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{cq^2}$. Es gibt also eine Zahl $d > \sqrt{5}$, so daß für *alle* p, q (p, q ganz, $q \neq 0$) gilt

$$\left|\frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{p}{q}\right| > \frac{1}{dq^2}.$$

Wir setzen $\frac{\sqrt{5}+1}{2} = \zeta$ und wählen $u = 0$, $v = 1$, $f(x, y) = (\zeta x + y)^2$. Dann sind alle Voraussetzungen erfüllt, die wir für die Anwendbarkeit der Behauptung II verlangten. Wenn (p, q) und (r, s) zwei verschiedene Gitterpunkte des Gebietes (1) sind, so ist

$$|f(p, q) - f(r, s)| = |\zeta(p + r) + (q + s)| \cdot |\zeta(p - r) + (q - s)|.$$

[7]) Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. Math. Annalen 39 (1891), S. 279–284.

ist

$$|\zeta(p+r) \quad (q+s)| > \mathrm{Max}(p,r) \geqq 1.$$

eiter ist entweder $p=r$, also $q \neq s$, und dann

$$|\zeta(p-r)+(q-s)| \geqq 1$$

er $p \neq r$, und dann ist

$$|\zeta(p-r)+(q-s)| > \frac{1}{d\,|p-r|} > \frac{1}{d\,\mathrm{Max}(p,r)}.$$

so ist

$$|f(p,q)-f(r,s)| > \mathrm{Min}\left(1, \frac{1}{d}\right) = \frac{1}{d}.$$

m so mehr ist also

$$\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1}-\lambda_n) > 0.$$

an darf also *nicht* die Behauptung II durch die schärfere Behauptung s ist $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1}-\lambda_n) = 0$" ersetzen.

Beweis der Behauptung III. Es sei in (1)

$x, y) = \alpha(ax^2+2bxy+cy^2)$, α beliebig; a, b, c ganz; $b^2-ac \neq 0$.

ann ist offenbar $\lambda_n = \alpha \cdot m_n$ (m_n ganz), also

5) $$\lambda_{n+1}-\lambda_n \geqq \alpha.$$

Vir wählen nun einen Gitterpunkt (p,q) mit $p>0$, $u < \frac{q}{p} < v$, und es i $h>0$ eine ganze Zahl; für $h > h_0$ gilt dann auch

$$u < \frac{hq-ap-bq}{hp+bp+cq} < v,$$

nd es ist, wie leicht nachzurechnen,

6) $$f(hp+bp+cq, hq-ap-bq) - f(hp, hq) = (ac-b^2) f(p,q),$$

so von Null verschieden und von h unabhängig. Aus (35) und (36) lgt aber, daß $\liminf_{n=\infty} (\lambda_{n+1}-\lambda_n)$ endlich und von Null verschieden ist, . z. b. w.

(Eingegangen am 6. April 1926.)

Einige Sätze über Raumkurven dritter Ordnung.

Von

Tadahiko Kubota in Sendai (Japan).

---

1. Hilfssatz. *Die Matrix*

$$(1) \qquad \left\| \begin{matrix} d_1 & d_2 & d_3 & \dots & d_n \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-k,1} & x_{n-k,2} & x_{n-k,3} & \dots & x_{n-k,n} \end{matrix} \right\|$$

sei vom Rang $n-k+1$, *und man betrachte die Determinante*

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-k,1} & x_{n-k,2} & x_{n-k,3} & \dots & x_{n-k,n} \end{vmatrix} .$$

Wenn die Determinanten, die man durch Substituieren der Horizontalreihe $d_1, d_2, d_3, \dots, d_n$ *der Reihe nach in die erste, die zweite, ..., die* k*-te Horizontalreihe der Determinante* (2) *erhält, alle verschwinden, dann muß die Determinante* (2) *auch verschwinden.*

Dieser Satz läßt sich leicht durch vollständige Induktion beweisen. Man bezeichne die n dimensionalen Vektoren mit den Komponenten

$$\begin{matrix} a_{i1}, & a_{i2}, & a_{i3}, & \dots, & a_{in} \\ x_{i1}, & x_{i2}, & x_{i3}, & \dots, & x_{in} \\ d_1, & d_2, & d_3, & \dots, & d_n \end{matrix}$$

w. durch a_i, x_i, d. Unser Satz ist selbstverständlich für den Fall $= 2$. Dann ist nämlich die Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \dots d_n \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-2,1} & x_{n-2,2} & x_{n-2,3} & \dots x_{n-2,n} \end{array} \right\|$$

om Rang $n-1$. Denn die Vektoren a_1 und a_2 sind nach der Voraus-tzung durch die Vektoren $d, x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ linear darstellbar. Folg-ch verschwindet die Determinante (2) für den Fall $k=2$, d. h. es ist

$$|a_1 a_2 x_1 x_2 \dots x_{n-2}| = 0.$$

Nun setze man voraus, daß dieser Satz für die Fälle $k = l-1$, $-2, \dots$ gilt. Dann wird der Satz auch für den Fall $k = l$ gelten. Die atrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} a_{l1} & a_{l2} & a_{l3} & \dots a_{ln} \\ d_1 & d_2 & d_3 & \dots d_n \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-l,1} & x_{n-l,2} & x_{n-l,3} & \dots x_{n-l,n} \end{array} \right\|$$

i vom Rang $n-l+2$. Dann ergibt sich aus den Relationen

$$\begin{array}{l} |d\ a_2\ a_3 \dots\ a_l\ x_1\ x_2 \dots x_{n-l}| = 0, \\ |a_1\ d\ a_3 \dots\ a_l\ x_1\ x_2 \dots x_{n-l}| = 0, \\ \dots \\ |a_1\ a_2\ a_3 \dots d\ a_l\ x_1\ x_2 \dots x_{n-l}| = 0 \end{array}$$

e Relation

$$|a_1\ a_2\ a_3 \dots\ a_l\ x_1\ x_2 \dots x_{n-l}| = 0.$$

un setze man voraus, daß die Matrix (3) von einem Rang niedriger als $-l+2$ sei, während die Matrix

$$\left\| \begin{array}{cccc} d_1 & d_2 & d_3 & \dots d_n \\ x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n-l,1} & x_{n-l,2} & x_{n-l,3} & \dots x_{n-l,n} \end{array} \right\|$$

ch der Voraussetzung vom Rang $n-l+1$ ist. Dann ist der Vektor a_l rch die Vektoren $d, x_1, x_2, \dots, x_{n-l}$ linear darstellbar. Daraus ergibt sich

$$\begin{array}{l} |a_1 a_2 a_3 \dots a_l x_1 x_2 \dots x_{n-l} \\ = \text{Konst.} |a_1 a_2 a_3 \dots a_{l-1} d x_1 x_2 \dots x_{n-l}| = 0. \end{array}$$

Damit ist unser Satz für den Fall $k = l$ und also auch durch vollständige Induktion für den allgemeinen Fall bewiesen.

2. In meiner vorigen Note habe ich den folgenden Satz[1]) bewiesen:

Konstruiert man drei Schmiegtetraeder einer Raumkurve dritter Ordnung, so liegen ihre zwölf Eckpunkte auf einer Fläche zweiter Ordnung (*Pasch*). *Konstruiert man vier Schmiegtetraeder einer Raumkurve dritter Ordnung, so gehen die vier Flächen zweiter Ordnung, welche je dreien der Schmiegtetraeder nach dem Paschschen Satze umschrieben sind, durch ein und dieselbe Gerade hindurch.*

Unter Verwendung unseres Hilfssatzes möchte ich hier den folgenden Satz beweisen:

Satz 1. *Konstruiert man drei Schmiegpentaeder einer Raumkurve dritter Ordnung, so liegen ihre dreißig Eckpunkte auf einer kubischen Fläche* (*Pasch*)[2]). *Konstruiert man vier Schmiegpentaeder einer Raumkurve dritter Ordnung, so gehen die vier kubischen Flächen, welche je dreien der Schmiegpentaeder umschrieben sind, durch ein und dieselbe Raumkurve dritter Ordnung.*

Beweis. Die Schmiegebene der Raumkurve dritter Ordnung im Punkte λ sei durch

$$x\lambda^3 + y\lambda^2 + z\lambda + w = 0$$

dargestellt. Die Berührungspunkte der vier Schmiegpentaeder seien gegeben durch

$$\begin{aligned}
a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 &= 0,\\
b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 &= 0,\\
c_0\lambda^5 + c_1\lambda^4 + c_2\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_4\lambda + c_5 &= 0,\\
d_0\lambda^5 + d_1\lambda^4 + d_2\lambda^3 + d_3\lambda^2 + d_4\lambda + d_5 &= 0.
\end{aligned}$$

Die vier kubischen Flächen, welche je dreien der Schmiegpentaeder umschrieben sind, sind

$$(1)\qquad \begin{vmatrix} x & y & z & w & 0 & 0\\ 0 & x & y & z & w & 0\\ 0 & 0 & x & y & z & w\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0, \quad \text{u. s. w.}$$

[1]) The Science Reports of the Tôhoku Imp. Univ. **15**, pp. 39—44.
[2]) A. a. O. in meiner vorigen Note.

ir wollen nun beweisen, daß diese vier kubischen Flächen durch ein und eselbe Raumkurve dritter Ordnung hindurchgehen.

Zu diesem Zwecke betrachte man zwei Flächen zweiter Ordnung

$$\begin{vmatrix} x & y & z & w & 0 & 0 \\ 0 & x & y & z & w & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y & z & w \\ 0 & x & y & z & w & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0$$

Nun kann man beweisen, daß diese beiden Flächen zweiter Ordnung ch in einer Geraden und einer Raumkurve dritter Ordnung schneiden.

Wenn nämlich die Determinante

$$|a_0 b_1 c_2 d_3| \neq 0$$

t, folgt aus

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & w \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} = 0, \qquad (6) \qquad \begin{vmatrix} 0 & x & y & z & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_5 \end{vmatrix} = 0,$$

ach dem Hilfssatze die Relation

$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & w & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0.$$

Folglich gehen die Ebenen (5), (6), (7) durch ein und dieselbe Gede g. Man kann durch Stetigkeitsbetrachtung ersehen, daß dasselbe

auch dann gilt, wenn die Determinante (4) verschwindet. Folglich ist die Matrix

$$(8) \qquad \begin{Vmatrix} 0 & x & y & z & w & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{Vmatrix}$$

für die Punkte der Geraden g vom niedrigeren Rang als 5. Infolgedessen gelten die Relationen (2) und (3) für die Punkte der Geraden g, und deshalb müssen sich die Flächen zweiter Ordnung (2) und (3) in der Geraden g und in einer Raumkurve dritter Ordnung C_3 schneiden. Für die Punkte dieser Raumkurve C_3 ist die Matrix (8) im allgemeinen vom Rang 5. Daraus ergibt sich nach dem Hilfssatz, daß die Beziehung

$$(9) \qquad \begin{vmatrix} x & y & z & w & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y & z & w \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{vmatrix} = 0$$

eine Folge von (2) und (3) ist, vorausgesetzt, daß der Punkt nicht auf der Geraden g liegt. Also ist die Raumkurve C_3 durch (2), (3), (9) als gemeinsame Schnittkurve bestimmbar. Daraus folgt, daß alle vier Flächen dritter Ordnung in (1) durch die C_3 hindurchgehen. Denn der sechsdimensionale Vektor $(x, y, z, w, 0, 0)$ ist nach (2) aus den Vektoren $(0, x, y, z, w, 0)$, $(a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$, $(b_0, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5)$, $(c_0, c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$, $(d_0, d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ linear ausdrückbar, wenn der Punkt (x, y, z, w) auf C_3 liegt. Daraus folgt, daß dieser Punkt auf der Fläche (1) liegen muß. In gleicher Weise kann man beweisen, daß alle Flächen dritter Ordnung durch die C_3 hindurchgehen.

Daß die Kurve C_3 im allgemeinen nicht zerfällt, kann man durch Betrachtung des Spezialfalles erkennen:

$$\begin{Vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

ann bestimmen nämlich die zwei Flächen zweiter Ordnung

$$z^2 - yw = 0, \quad zy - xw = 0$$

cher eine Raumkurve C_3.

Drei kubische Flächen, welche durch dieselbe Raumkurve C_3 gehen, hneiden sich im allgemeinen in zehn Punkten.

Deshalb schneiden sich irgend drei von den kubischen Flächen (1) zehn Eckpunkten eines Schmiegpentaeders. Somit ergibt sich

Satz 2. *Konstruiert man zwei Schmiegpentaeder einer Raumkurve itter Ordnung, so liegen ihre* 20 *Eckpunkte auf einer Raumkurve sechs- r Ordnung, welche eine partielle Schnittkurve zweier kubischer Flächen ist.*

Nachdem ich diese beiden Sätze in einer mathematischen Sitzung richtet hatte, hat Herr Fukasawa mir freundlichst mitgeteilt, daß man as folgende Ergebnis aus dem Hilfssatze herleiten kann.

Satz 3. *Konstruiert man fünf Schmiegpentaeder einer Raumkurve itter Ordnung, dann gehen fünf Raumkurven dritter Ordnung, welche nach em Satz* 1 *bestimmbar sind, durch ein und denselben Punkt hindurch.*

Die Berührungspunkte von fünf Schmiegpentaeder seien durch

$$\begin{aligned}
a_0\lambda^5 + a_1\lambda^4 + a_2\lambda^3 + a_3\lambda^2 + a_4\lambda + a_5 &= 0,\\
b_0\lambda^5 + b_1\lambda^4 + b_2\lambda^3 + b_3\lambda^2 + b_4\lambda + b_5 &= 0,\\
c_0\lambda^5 + c_1\lambda^4 + c_2\lambda^3 + c_3\lambda^2 + c_4\lambda + c_5 &= 0,\\
d_0\lambda^5 + d_1\lambda^4 + d_2\lambda^3 + d_3\lambda^2 + d_4\lambda + d_5 &= 0,\\
e_0\lambda^5 + e_1\lambda^4 + e_2\lambda^3 + e_3\lambda^2 + e_4\lambda + e_5 &= 0
\end{aligned}$$

egeben. Dann betrachte man die drei Ebenen

0)
$$\begin{vmatrix} x & y & z & w & 0 & 0\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5\\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = 0,$$

1)
$$\begin{vmatrix} 0 & x & y & z & w & 0\\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5\\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5\\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5\\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5\\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(12) \qquad \begin{vmatrix} 0 & 0 & x & y & z & w \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & d_5 \\ e_0 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{vmatrix} = 0 .$$

Nach dem Hilfssatze kann man beweisen: Wenn die Relationen (10), (11), (12) alle erfüllt sind, so gelten auch die Relationen (2), (3), (9), d. h. die durch die vier ersten Schmiegpentaeder bestimmte Raumkurve C_3 geht durch den Schnittpunkt von (10), (11), (12) hindurch. In gleicher Weise kann man beweisen, daß andere Raumkurven C_3 auch durch denselben Punkt hindurchgehen, w. z. b. w.

(Eingegangen am 11. Juni 1926.)

Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern.

(Zweite Abhandlung.)

Von

G. Szegö in Königsberg und A. Walfisz in Wiesbaden.

Wir erinnern zunächst an die Bezeichnungen unserer ersten gleichmigen Abhandlung (Math. Zeitschr. 26, zitiert mit I), soweit sie im genden benutzt werden.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein algebraischer Zahlkörper k-ten Grades, r_1 die Anzahl zu $\mathfrak{K}$ konjugierten reellen Körper, m eine natürliche Zahl, $mk = \varkappa$, $r_1 = \varrho_1$; $\mathfrak{k}_1, \mathfrak{k}_2, \ldots$ seien geeignete positive, nur von $\mathfrak{K}$ und m abhängige onstanten[1]); $\zeta_{\mathfrak{K}}(s)$ bezeichne die zu $\mathfrak{K}$ gehörige Dedekindsche Zetaktion, $Z(s) = (\zeta_{\mathfrak{K}}(s))^m$,

$$Z(s) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{F(\nu)}{\nu^s} \qquad (\Re s > 1),$$

$$H(x) = \sum_{\nu \leqq x} F(\nu) \qquad (x > 0),$$

x) die Residuensumme von

$$Z(s)\frac{x^s}{s}$$

$s = 0$ und $s = 1$; schließlich sei

$$P(x) = H(x) - R(x).$$

In dieser Bezeichnung lautet der Hauptsatz von I:

Für $\varrho_1 \equiv 2$ *oder* 3 *oder* 4 (mod 8) *ist*

$$P(x) = \Omega_R\left((x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log \log x)^{m-1}\right);$$

---

[1]) In I durften wir, ohne die Deutlichkeit unserer Ausführungen zu beeinträchen, kurz $\mathfrak{k}$ schreiben. Hier treten jedoch unter den $\mathfrak{k}$'s so mannigfaltige Wechselziehungen auf, daß eine Numerierung wünschenswert erscheint.

für $\varrho_1 \equiv 6$ *oder* 7 *oder* 8 (mod 8) *ist*

$$P(x) = \Omega_L\left((x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}\right).$$

Wir sind heute in der Lage, dieses Ergebnis beträchtlich zu erweitern. Es gelten die beiden folgenden Sätze, von denen der zweite offensichtlich den ersten enthält.

Hauptsatz 1. *Es ist für* $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 1$ *oder für* $\varkappa \geqq 4$

$$P(x) = \Omega_R\left((x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}\right)$$

und

$$P(x) = \Omega_L\left((x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}\right).$$

Hauptsatz 2. *Für* $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 1$ *oder für* $\varkappa \geqq 4$ *gibt es ein* $\mathfrak{k}_1$, *ein* $\mathfrak{k}_2$, *ferner eine monoton ins Unendliche wachsende* y*-Folge*

$$1 < y_1 < y_2 < \ldots; \quad \lim_{\nu\to\infty} y_\nu = \infty,$$

so daß die beiden Ungleichungen

$$\pm P(x) > \mathfrak{k}_1 (x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}$$

in jedem Intervalle

$$y_\nu \leqq x \leqq y_\nu + \mathfrak{k}_2 y_\nu^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-2}{2\varkappa}} y_\nu$$

je eine Lösung besitzen.

Für $\varkappa = 1$ sind wegen

$$P(x) = [x] - x + \frac{1}{2}$$

die beiden obigen Sätze trivial. In den drei übrigen ausgeschlossenen Fällen:

1. $\varkappa = 2$, $\varrho_1 = 0$ (Idealfunktion eines imaginären quadratischen Zahlkörpers),
2. $\varkappa = 2$, $\varrho_1 = 2$ (Dirichletsches Teilerproblem, Idealfunktion eines reellen quadratischen Zahlkörpers),
3. $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 3$ (Piltzsches Teilerproblem im dreidimensionalen Falle, Idealfunktion eines total reellen kubischen Zahlkörpers)

vermögen wir unserem in I bewiesenen Resultat nichts hinzuzufügen.

Wie erwähnt, ist Satz 1 in Satz 2 enthalten. Wir trennen jedoch in § 3 der vorliegenden Abhandlung die Beweise, um die zu 1 führenden Kernüberlegungen deutlicher hervortreten zu lassen. § 2 enthält Hilfssätze, die von vornherein auf Satz 2 zugeschnitten sind. Organisch müßte auch der Inhalt unseres § 1 unter diese Hilfssätze aufgenommen werden. Da es sich aber hierbei um eine räumlich ausgedehntere Überlegung han-

lt, so haben wir es vorgezogen, diese an die Spitze zu stellen. Das oblem lautet hier: *Besitzt die ganze Funktion von a*

$$\varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a) = \varphi(a) = \int_0^\infty e^{-u^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} \cos\left(a u + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) du$$

f der reellen a-Achse einen Vorzeichenwechsel? Wir zeigen, daß diese age für $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 1$ und für $\varkappa \geqq 4$ zu bejahen, dagegen für die igen drei „Ausnahmefälle" zu verneinen ist[2]).

Aus I benutzen wir eine in § 3 mit I, (29) bezeichnete asymptotische oschätzung, die in I mittels einer auf Szegö (Literaturangaben daselbst, nmerkung [9])) zurückgehenden Methode abgeleitet ist. Im übrigen basiert sere vorliegende Abhandlung vorzugsweise auf einem Verfahren von E. Littlewood, das zum Nachweis von

$$\pi(x) = Li(x) + \frac{\Omega_R}{\Omega_L}\left(\frac{\sqrt{x}\log\log\log x}{\log x}\right)$$

r die bekannte Primzahlfunktion $\pi(x)$ führt[3]).

Wir bemerken noch, daß ein „Ω_R-Ω_L-Intervallsatz" (in dem Sinne seres Satzes 2) für $\mathsf{P}(x)$ in der Literatur bereits vorliegt. In der I, nmerkung [5]) genannten Abhandlung zeigt nämlich E. Landau (im allmeineren Rahmen): Mit geeigneten $\mathfrak{k}_3$, $\mathfrak{k}_4$ sind für $\varkappa \geqq 2$ die beiden Unichungen

$$\pm \mathsf{P}(x) > \mathfrak{k}_3 x^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}$$

jedem Intervalle

$$y \leqq x \leqq y + \mathfrak{k}_4 y^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \qquad (y > 1 \text{ beliebig})$$

sbar.

§ 1.

Diskussion von $\varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a)$.

Nach Definition (1) ist für reelle a

$$\varphi(a) = \Re\, e^{-i\frac{\varrho_1+1}{4}\pi} \int_0^\infty e^{-u^2 - iau} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} du,$$

---

[2]) Die Diskussion von 1. bis 3. ist für unseren Zweck entbehrlich; wir führen se nur aus, um den Leser über die Tragweite unserer Methode zu orientieren.

[3]) Sur la distribution des nombres premiers, Comptes Rendus 158 (1914), 1869—1872. Eine genauere Ausführung findet sich bei G. H. Hardy und E. Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function d the theory of the distribution of primes, Acta Mathematica 41 (1917), S. 119 196; § 5, S. 184—196. Dem in dieser Abhandlung behandelten Problem entricht eine *ungerade* φ-Funktion, so daß keine Betrachtungen von der Art unseres notwendig sind.

d. h.

$$(2) \qquad e^{\frac{a^2}{4}}\varphi(a) = \Re e^{-i\frac{\varrho_1+1}{4}\pi}\int_0^\infty e^{-\left(u+\frac{ia}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du.$$

Es sei jetzt $u^s = e^{s\log u}$, wobei $\log u$ den Hauptzweig bedeutet. Für $a>0$ kann man dann in (2) nach dem Cauchyschen Satze den Integrationsweg auf den gebrochenen Linienzug

$$1)\quad \Re u = 0,\quad 0 \geqq \Im u \geqq -\frac{a}{2};\qquad 2)\quad \Re u \geqq 0,\quad \Im u = -\frac{a}{2}$$

verlegen[4]) und erhält so

$$\int_0^\infty e^{-\left(u+\frac{ia}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du = e^{-\frac{i\pi}{2}\frac{\varkappa-1}{2}}\int_0^{\frac{a}{2}} e^{\left(u-\frac{a}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du$$

$$+\int_0^\infty e^{-u^2}\left(u-\frac{ia}{2}\right)^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du \qquad (a>0).$$

Ersetzt man hierin a durch $-a$ und i durch $-i$, so folgt

$$\int_0^\infty e^{-\left(u+\frac{ia}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du = e^{\frac{i\pi}{2}\frac{\varkappa-1}{2}}\int_0^{-\frac{a}{2}} e^{\left(u+\frac{a}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du$$

$$+\int_0^\infty e^{-u^2}\left(u-\frac{ia}{2}\right)^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du \qquad (a<0).$$

In Verbindung mit (2) ergibt sich jetzt für reelle a

$$(3) \qquad e^{\frac{a^2}{4}}\varphi(a) = \Re e^{-i\frac{\varrho_1+1}{4}\pi}\int_0^\infty e^{-u^2}\left(u-\frac{ia}{2}\right)^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du$$

$$+\cos\left(\frac{\varrho_1+1}{4}\pi \pm \frac{\varkappa-1}{4}\pi\right)\int_0^{\frac{|a|}{2}} e^{\left(u-\frac{|a|}{2}\right)^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}}\,du,$$

wobei die Zeichen $\pm$ dem Vorzeichen von a entsprechen. Natürlich gilt diese Formel auch für $a=0$, wenn das zweite Glied Null bedeutet; sie ist dann eine unmittelbare Folge von (1).

Wir erledigen zunächst die in der Einleitung genannten drei Fälle, bei denen, wie gesagt, nachzuweisen bleibt, daß $\varphi(a)$ auf der reellen a-Achse von konstantem Vorzeichen ist.

---

[4]) Diesen Kunstgriff verdanken wir (für $\varkappa=2$, $\varrho_1=0$) einer mündlichen Mitteilung von Herrn Ch. H. Müntz. Vgl. übrigens auch I, § 1, 3.

$\boxed{\varkappa = 2,\ \varrho_1 = 0.}$ Hier ist das zweite Glied rechts in (3) nicht negativ, also

$$e^{\frac{a^2}{4}} \varphi_{2,0}(a) \geqq \Re e^{-\frac{i\pi}{4}} \int_0^\infty e^{-u^2} \left(u - \frac{i a}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} du > 0,$$

da für $u > 0$

$$\left| \arc \left(u - \frac{i a}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right| < \frac{\pi}{4}$$

ausfällt.

$\boxed{\varkappa = 2,\ \varrho_1 = 2.}$ Nach Definition (1) ergibt sich, in Verbindung mit dem vorigen Falle,

$$\varphi_{2,2}(a) = -\varphi_{2,0}(-a) < 0.$$

$\boxed{\varkappa = 3,\ \varrho_1 = 3.}$ (3) ergibt

$$e^{\frac{a^2}{4}} \varphi_{3,3}(a) = -\int_0^\infty e^{-u^2} du < 0.$$

Sodann betrachten wir den Fall

$\boxed{\varkappa \geqq 3,\ \varrho_1 = 1.}$ Nach Definition (1) ist

$$\varphi_{\varkappa,1}(a) = -\int_0^\infty e^{-u^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} \sin a u \, du$$

eine ganze ungerade Funktion, die überdies nicht identisch verschwindet, da z. B.

$$2 i \varphi_{\varkappa,1}(i) = \int_0^\infty e^{-u^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} (e^u - e^{-u}) \, du > 0$$

wird. Also weist $\varphi_{\varkappa,1}(a)$ einen Vorzeichenwechsel auf.

Da die Anzahl der zu $\mathfrak{R}$ konjugiert imaginären Zahlkörper gerade ist, wird $r_1 \equiv k \pmod 2$, d. h. $\varrho_1 \equiv \varkappa \pmod 2$. Aus (1) folgt ferner, daß für gerades $\varkappa$

$$\varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a) = \varphi_{\varkappa,0}(a), \quad -\varphi_{\varkappa,0}(-a), \quad -\varphi_{\varkappa,0}(a), \quad \varphi_{\varkappa,0}(-a)$$

ist, je nachdem $\varrho_1 \equiv 0, 2, 4$ bzw. $6 \pmod 8$; für ungerades $\varkappa$ ist dagegen

$$\varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a) = \varphi_{\varkappa,1}(a), \quad \varphi_{\varkappa,3}(a), \quad -\varphi_{\varkappa,1}(a), \quad -\varphi_{\varkappa,3}(a),$$

je nachdem $\varrho_1 \equiv 1, 3, 5$ bzw. $7 \pmod 8$ ausfällt. Da $\varphi_{\varkappa,1}(a)$ bereits erledigt ist, so dürfen wir in der Folge ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\varrho_1 = 0 \text{ für gerades } \varkappa, \quad \varrho_1 = 3 \text{ für ungerades } \varkappa$$

festsetzen, was fortan stillschweigend geschehen soll. Außerdem kann nunmehr $\varkappa \geqq 4$ angenommen werden.

(1) ergibt

$$\operatorname{sg} \varphi(0) = \operatorname{sg} \cos \frac{\varrho_1 + 1}{4} \pi = (-1)^{\varkappa}. \tag{4}$$

Anderseits folgt aus (3) für große reelle a

$$\operatorname{sg} \varphi(a) = \operatorname{sg} \cos\left(\frac{\varrho_1 + 1}{4} \pi \pm \frac{\varkappa - 1}{4} \pi\right) = \varepsilon,$$

wenn $\varepsilon \neq 0$ ist ($\pm$ entspricht hierbei, wie oben, dem Vorzeichen von a).

Wir zeigen jetzt, daß $\varphi(a)$ für

$$\boxed{\varkappa \equiv 4, 5, 6, 7, 8 \pmod 8}$$

Vorzeichenwechsel aufweist. Dann ist nämlich ε der Reihe nach gleich

$$\begin{array}{rrrrrl} -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & (a > 0) \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & (a < 0). \end{array}$$

Damit sind zunächst einmal die Unterfälle $\varkappa \equiv 4, 5, 6 \pmod 8$ ausgesondert.

Das Vorzeichen des ersten Gliedes auf der rechten Seite von (3) ist für große reelle a gleich

$$\operatorname{sg} \cos\left(\frac{\varrho_1 + 1}{4} \pi \pm \frac{\varkappa - 3}{4} \pi\right) = \varepsilon',$$

je nachdem ob $a > 0$ oder $a < 0$ ist — vorausgesetzt, daß $\varepsilon' \neq 0$ wird. Für $\varkappa \equiv 7, 8 \pmod 8$ ist ε' der Reihe nach gleich

$$\begin{array}{rr} 1 & 0 \quad (a > 0) \\ 1 & -1 \quad (a < 0), \end{array}$$

womit auch diese Fälle erledigt sind.

Wir wollen ferner zeigen, daß $\varphi(a)$ für

$$\boxed{\varkappa \geqq 17}$$

Vorzeichenwechsel aufweist.

Nach Definition (1) wird

$$\varphi(a) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\frac{\varkappa - 5}{4}} \cos\left(a \sqrt{u} + \frac{\varrho_1 + 1}{4} \pi\right) du.$$

n Hinblick auf die Formel (4) genügt es also zu beweisen, daß bei kon-
nuierlichem $\alpha \geqq 3$ $\left(\text{für } \varkappa \geqq 17 \text{ ist } \alpha = \frac{\varkappa - 5}{4} \geqq 3\right)$

)
$$\int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \cos \pi \sqrt{\frac{u}{\alpha}}\, du < 0,$$

')
$$\int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \cos\left(\frac{3\pi}{4} \sqrt{\frac{u}{\alpha}} + \frac{\pi}{4}\right) du < 0$$

t.

Wegen

$$\cos \pi \sqrt{\frac{u}{\alpha}} + 1 = 2 \sin^2 \frac{\pi}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{u}{\alpha}}\right) \leqq \frac{\pi^2}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{u}{\alpha}}\right)^2$$

rd

$$\int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \cos \pi \sqrt{\frac{u}{\alpha}}\, du + \Gamma(\alpha+1) \leqq \frac{\pi^2}{2} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha \left(1 - \sqrt{\frac{u}{\alpha}}\right)^2 du.$$

genügt also für (5),

$$\frac{\pi^2}{2}\left(\Gamma(\alpha+1) - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{\alpha} \Gamma(\alpha+2)\right) < \Gamma(\alpha+1),$$

h.

)
$$\frac{\pi^2}{2}\left(2 + \frac{1}{\alpha} - \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}\right) < 1$$

chzuweisen $(\alpha \geqq 3)$.

Diese Ungleichung nimmt, nachdem man π^2 durch 10 ersetzt hat,
e Form

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)} > \frac{9}{10} + \frac{1}{2\alpha}$$

, d. h.

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} > \frac{9\alpha + 5}{10\alpha + 5}.$$

erin ist die rechte Seite

$$\leqq \frac{9 \cdot 3 + 5}{10 \cdot 3 + 5} = \frac{32}{35}.$$

mit ist (6) eine Folge von

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\Gamma\left(\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} > \frac{32}{35} \qquad (\alpha \geqq 3).$$

Nach der Stirlingschen Reihe ist nun

$$\begin{aligned}\log\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)} &> -\frac{1}{2}\log\alpha+\alpha\log\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)-\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\\ &\quad-\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)\log\alpha+\alpha-\frac{1}{12\alpha}\\ &=\alpha\log\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{12\alpha}\\ &>\alpha\left(\frac{1}{2\alpha}-\frac{1}{8\alpha^2}\right)-\frac{1}{2}-\frac{1}{12\alpha}\\ &=-\frac{5}{24\alpha}\geqq-\frac{5}{72}>-\frac{3}{35},\end{aligned}$$

und mithin wunschgemäß

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(\alpha)}>e^{-\frac{3}{35}}>\frac{32}{35}.$$

Ganz analog wird auch (5′) begründet. Von

$$\cos\left(\frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{u}{\alpha}}+\frac{\pi}{4}\right)+1=2\sin^2\frac{3\pi}{8}\left(1-\sqrt{\frac{u}{\alpha}}\right)\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\left(1-\sqrt{\frac{u}{\alpha}}\right)^2$$

ausgehend, kommt man wie oben auf die Ungleichung

$$(6')\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\left(2+\frac{1}{\alpha}-\frac{2}{\sqrt{\alpha}}\frac{\Gamma\left(\alpha+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(\alpha+1)}\right)<1,$$

welche offenbar in (6) enthalten ist.

Es verbleiben noch die Fälle

$$\boxed{\varkappa=9,\,10,\,11},$$

von denen wir zunächst $\varkappa=10$ vornehmen. Es genügt hierbei nachzuweisen, daß (5′) besteht, d. h. daß (6′) mit $\alpha=\frac{5}{4}$ richtig ist. Diese Ungleichung lautet alsdann

$$(6'')\qquad \frac{1}{2}\left(\frac{3\pi}{4}\right)^2\left(2{,}8-\frac{4}{\sqrt{5}}\frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}\right)<1.$$

Wegen $\pi^2<10$ genügt es,

$$\frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{9}{4}\right)}>\frac{11\sqrt{5}}{18}$$

achzuweisen. Schreibt man hierin $\Gamma\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{9}\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)$, quadriert und bechtet, daß

$$\left(\frac{22\sqrt{5}}{81}\right)^2 = \frac{2420}{6561} < \frac{3}{8}$$

t, so folgt, daß (6″) mit

$$\left(\frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}\right)^2 > \frac{3}{8}$$

ewiesen ist.

Nun hat man (Stirlingsche Reihe)

$$2\log\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) > \frac{9}{2}\log\frac{11}{4} - \frac{11}{2} + \log 2\pi + \frac{1}{6}\frac{4}{11} - \frac{1}{180}\left(\frac{4}{11}\right)^3,$$

$$2\log\Gamma\left(\frac{13}{4}\right) < \frac{11}{2}\log\frac{13}{4} - \frac{13}{2} + \log 2\pi + \frac{1}{6}\frac{4}{13},$$

. h.

$$\begin{aligned} 2\log\frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)} &> \frac{9}{2}\log\frac{11}{4} - \frac{11}{2}\log\frac{13}{4} + 1 \\ &= -\log 3 - \frac{9}{2}\log\left(1+\frac{2}{11}\right) - \log\left(1+\frac{1}{12}\right) + 1 \\ &> -\log 3 - \frac{9}{2}\left(\frac{2}{11} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{11}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{11}\right)^3\right) - \frac{1}{12} + 1 \\ &> -\log 3 + \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

nd somit wunschgemäß

$$\left(\frac{\Gamma\left(\frac{11}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{13}{4}\right)}\right)^2 > \frac{1}{3}e^{\frac{1}{8}} > \frac{1}{3}\frac{9}{8} = \frac{3}{8}.$$

Sodann sei $\varkappa = 9$. Dann liefert (3)

$$\begin{aligned} e\varphi(2) &= -\Re\int_0^\infty e^{-u^2}(u-i)^3\,du - \int_0^1 e^{(u-1)^2}u^3\,du \\ &= \int_0^\infty e^{-u^2}(3u-u^3)\,du - \int_0^1 e^{u^2}(1-u)^3\,du \\ &= 1 - \int_0^1 e^{u^2}(1-u)^3\,du > 1 - 3\int_0^1 (1-u)^3\,du = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Für $\varkappa = 11$ liefert dieselbe Formel

$$e\varphi(2) = -\Re\int_0^\infty e^{-u^2}(u-i)^4\,du = -\int_0^\infty e^{-u^2}(u^4-6u^2+1)\,du$$
$$= -\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)+3\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}\sqrt{\pi}.$$

In beiden Fällen beachte man (4).

Das Ergebnis unserer bisherigen Betrachtungen formulieren wir als

Hilfssatz 1. *Für* $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 1$ *und für* $\varkappa \geqq 4$ *kann man die reellen Zahlen* a_1, a_2 *so wählen, daß*

$$|a_1| = \mathfrak{k}_5, \quad |a_2| = \mathfrak{k}_6, \quad \varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a_1) = \mathfrak{k}_7, \quad \varphi_{\varkappa,\varrho_1}(a_2) = -\mathfrak{k}_8$$

wird.

§ 2.
Hilfssätze.

In der Folge bezeichne a eine reelle Variable, die die beiden in Hilfssatz 1 festgesetzten Werte a_1 und a_2 annehmen darf. Es werde $\varkappa = 3$, $\varrho_1 = 1$ oder $\varkappa \geqq 4$ vorausgesetzt. Wir schreiben ferner für eine beliebige zahlentheoretische Funktion $\psi(\nu)$

$$\psi(\nu+1) - \psi(\nu) = \Delta\psi(\nu).$$

Hilfssatz 2. *Es sei* $\xi > 0$ *und*

$$(7) \qquad f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}a+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right).$$

Dann wird für $\xi \to 0$

$$(8) \qquad f(\xi) \sim \mathfrak{k}_9\,\varphi(a)\,\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}.$$

Beweis. Bei festem ξ folgt aus (7) durch partielle Summation, wenn $H(0) = 0$ bedeutet,

$$f(\xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty}(H(\nu)-H(\nu-1))\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}a+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$
$$= -\sum_{\nu=1}^{\infty}H(\nu)\,\Delta\left(\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}a+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right)$$
$$= -\int_1^{\infty}H(u)\frac{d}{du}\left(\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi u)^{\frac{1}{\varkappa}}a+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right)du$$
$$(9) \qquad = -\int_1^{\infty}R(u)\frac{d}{du}\Big(\quad\Big)\,du - \int_1^{\infty}\mathsf{P}(u)\frac{d}{du}\Big(\quad\Big)\,du$$
$$(10) \qquad = f_1(\xi)+f_2(\xi),$$

zur Abkürzung.

$R'(u)$ hat bekanntlich die Gestalt

$$R'(u) = \mathfrak{k}_{10} \log^{m-1} u + c_1 \log^{m-2} u + \ldots + c_{m-1},$$

it gewissen reellen, nur von $\mathfrak{K}$ und m abhängigen $c_1, \ldots, c_{m-1}$ (für $= 1$ bedeute dies: $R'(u) = \mathfrak{k}_{10}$). Es folgt somit aus (9) und (10) urch einmalige partielle Integration

$$\begin{aligned}
(\xi) &= \int_1^\infty R'(u) \exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left((\xi u)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \tfrac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) du \\
&\quad + R(1) \exp\left\{-\xi^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \cos\left(\xi^{\frac{1}{\varkappa}} a + \tfrac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) \\
&= \int_0^\infty R'(u) \exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left((\xi u)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \tfrac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) du + O(1) \\
&= \varkappa \xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \int_0^\infty R'\left(\frac{u^\varkappa}{\xi}\right) e^{-u^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} \cos\left(au + \tfrac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) du + O(1) \\
&= \varkappa \mathfrak{k}_{10} \xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1} \frac{1}{\xi} \int_0^\infty e^{-u^2} u^{\frac{\varkappa-3}{2}} \cos\left(au + \tfrac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) du \\
&\quad + o\left(\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1} \frac{1}{\xi}\right),
\end{aligned}$$

h. nach (1) und Hilfssatz 1, wenn noch $\varkappa \mathfrak{k}_{10} = \mathfrak{k}_9$ gesetzt wird,

11) $$f_1(\xi) \sim \mathfrak{k}_9 \varphi(a) \xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1} \frac{1}{\xi}.$$

Zur Behandlung von $f_2(\xi)$ bedienen wir uns der primitiven Abschätzung

$$\mathsf{P}(u) = o(u) \qquad (u \to \infty).$$

Es ergibt sich dann aus (9) und (10) (wir übergehen die einfache ε-Rechnung“)

$$\begin{aligned}
f_2(\xi) &= o \int_1^\infty \exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \left((\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}} + 1 + (\xi u)^{\frac{1}{\varkappa}}\right) du \\
&= o \xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \int_0^\infty \exp\left\{-u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \left(u^{\frac{2}{\varkappa}} + 1 + u^{\frac{1}{\varkappa}}\right) du,
\end{aligned}$$

lso a fortiori

12) $$f_2(\xi) = o\left(\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1} \frac{1}{\xi}\right).$$

Und nunmehr folgt (8) aus (9), (10), (11) und (12).

Hilfssatz 3. *Es sei* $0 < \xi \leqq \frac{1}{3}$; $5\mathfrak{k}_{11} = \mathrm{Min}(\mathfrak{k}_7\mathfrak{k}_9;\ \mathfrak{k}_8\mathfrak{k}_9)$. *Dann wird für ein geeignetes* $\mathfrak{k}_{12} \geqq 3$

$$(13)\qquad \sum_{\nu > \frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \leqq \mathfrak{k}_{11}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}.$$

Beweis. Die Reihe (13) ist, Verfügung über $\mathfrak{k}_{12} \geqq 3$ vorbehalten,

$$= \sum_{\nu > \frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}} (H(\nu) - H(\nu-1))\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}$$

$$\leqq -\sum_{\nu > \frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}} H(\nu)\,\Delta\left(\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\right)$$

$$\leqq \mathfrak{k}_{13}\int_{\frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}}^{\infty} u\log^{m-1}u\left|\frac{d}{du}\left(\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\right)\right| du \ ^{5})$$

$$\leqq \mathfrak{k}_{13}\int_{\frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}}^{\infty} \log^{m-1}u\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left((\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}+1\right)du$$

$$= \mathfrak{k}_{13}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\int_{\mathfrak{k}_{12}}^{\infty} \log^{m-1}\left(\frac{u}{\xi}\right)\exp\left\{-u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left(u^{\frac{2}{\varkappa}}+1\right)du$$

$$\leqq \mathfrak{k}_{14}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}\int_{\mathfrak{k}_{12}}^{\infty} \log^{m-1}u\exp\left\{-u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left(u^{\frac{2}{\varkappa}}+1\right)du.$$

Jetzt sei $\mathfrak{k}_{12}$ durch

$$\mathfrak{k}_{12} \geqq 3; \qquad \mathfrak{k}_{14}\int_{\mathfrak{k}_{12}}^{\infty} \log^{m-1}u\exp\left\{-u^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left(u^{\frac{2}{\varkappa}}+1\right)du \leqq \mathfrak{k}_{11}$$

bestimmt.

Hilfssatz 4. *Für* $0 < \xi \leqq \frac{1}{3}$ *ist*

$$(14)\qquad \sum_{\nu \leqq \frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \leqq \mathfrak{k}_{15}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}.$$

Wir dürfen den Beweis, unter Hinweis auf den von Hilfssatz 2, in aller Kürze führen:

---

[5]) Vgl. I, (16).

$$\sum_{\nu \leqq \frac{t_{12}}{\xi}} < \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) \exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}$$

$$= -\int_1^{\infty} H(u) \frac{d}{du}\left(\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\right) du$$

$$= R(1)\exp\left\{-\xi^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} + \int_1^{\infty} R'(u)\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} du$$

$$- \int_1^{\infty} \mathsf{P}(u) \frac{d}{du}\left(\exp\left\{-(\xi u)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} u^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\right) du$$

$$= O(1) + O\left(\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi}\right) + o\left(\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi}\right)$$

$$= O\left(\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} \log^{m-1}\frac{1}{\xi}\right),$$

oraus die Behauptung (14) unmittelbar folgt.

Hilfssatz 5. *$z_0 \geqq 3$ sei vorgegeben. Dann lassen sich $z_1 \geqq z_0$ und $\geqq z_0$ so wählen, daß die beiden Ungleichungen*

5′) $$\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi_1\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left((\xi_1\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} z_1 + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$
$$> \mathfrak{k}_{11} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} z_1 (\log\log z_1)^{m-1},$$

5″) $$-\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi_2\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left((\xi_2\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} z_2 + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$
$$> \mathfrak{k}_{11} \log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} z_2 (\log\log z_2)^{m-1}$$

it

6) $$\xi_1 = \frac{1}{\log z_1}, \qquad \xi_2 = \frac{1}{\log z_2}$$

füllt sind, und überdies

7) $$z_1 - z_2 = a_1 - a_2$$

rd. (Hierbei haben a_1 und a_2 dieselbe Bedeutung wie in Hilfssatz 1.)

Beweis. Wir gehen vom folgenden Dirichletschen Approximationsze aus (der auch in I — wiewohl auf eine andere Weise — benutzt rden ist):

Es seien $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_l$ reell, $q > 0$ ganzzahlig, $\mu > 0$. Dann gibt es Intervall

$$\mu \leqq v \leqq q^l \mu \quad [6])$$

[6]) In der Folge benutzen wir nur $v \geqq \mu$.

ein v, so daß mit gewissen ganzzahligen w_ν für $\nu = 1, 2, \ldots, l$

$$|\beta_\nu v - w_\nu| < \frac{1}{q}$$

ist.

Diesen Satz wenden wir auf

$$l = \left[\frac{\mathfrak{k}_{12}}{\xi}\right], \qquad \beta_\nu = \frac{1}{2\pi}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}, \qquad q = \left[2\pi\frac{\mathfrak{k}_{15}}{\mathfrak{k}_{11}}\right] + 1$$

an, $\xi > 0$, Verfügung über μ vorbehalten. Es gibt dann für $1 \leqq \nu \leqq l$ gewisse ganzzahlige w_ν und ein $v \geqq \mu$, so daß

$$\left|(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} v - 2\pi w_\nu\right| < \frac{2\pi}{q} < \frac{\mathfrak{k}_{11}}{\mathfrak{k}_{15}}$$

wird. Somit ist ($a = a_1$ oder a_2)

$$\left|\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}(a+v) + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) - \cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right|$$

$$= \left|\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi + (\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} v - 2\pi w_\nu\right) - \cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right|$$

$$\leqq \left|(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} v - 2\pi w_\nu\right| < \frac{\mathfrak{k}_{11}}{\mathfrak{k}_{15}},$$

und hieraus folgt für $0 < \xi \leqq \frac{1}{3}$, in Verbindung mit (7), (14) und (13),

$$\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}(a+v) + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right) - f(\xi)\right|$$

$$\leqq \sum_{\nu=1}^{l} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\left|\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}(a+v) + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right.$$

$$\left. - \cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} a + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)\right| + 2\sum_{\nu=l+1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}$$

$$< 3\mathfrak{k}_{11}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}. \tag{18}$$

Anderseits ist nach (8), sowie der Definition von $\mathfrak{k}_7$, $\mathfrak{k}_8$ und $\mathfrak{k}_{11}$, für $0 < \xi \leqq \mathfrak{k}_{16} \leqq \frac{1}{3}$

$$\pm f(\xi) > 4\mathfrak{k}_{11}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi},$$

wobei das $\pm$-Zeichen dem Vorzeichen von $\varphi(a)$ entspricht. Ein Vergleich mit (18) ergibt jetzt für $0 < \xi \leqq \mathfrak{k}_{16}$, mit derselben Interpretation von $\pm$,

$$\pm\sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu)\exp\left\{-(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}(a+v) + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$

$$> \mathfrak{k}_{11}\xi^{-\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{m-1}\frac{1}{\xi}.$$

Wir setzen nun

$$\mu = \mathfrak{k}_5 + \mathfrak{k}_6 + z_0 + e^{\frac{1}{\mathfrak{k}_{15}}}, \quad a_1 + v = z_1, \quad a_2 + v = z_2.$$

ın ist zunächst einmal (17) erfüllt; wegen $v \geqq \mu$ wird ferner

$$z_1 \geqq z_0, \quad z_2 \geqq z_0, \quad \frac{1}{\log z_1} \leqq \mathfrak{k}_{16}, \quad \frac{1}{\log z_2} \leqq \mathfrak{k}_{16}.$$

ı darf daher für ξ die Werte (16) wählen und erhält so die beiden h ausstehenden Behauptungen (15′) und (15″).

§ 3.

Beweis der Hauptsätze.

1. Wir nehmen an, daß für ein geeignetes $K > 0$ und alle großen x e bestimmte der Ungleichungen

$$) \qquad \pm \mathsf{P}(x) < K(x \log x)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x)^{m-1}$$

s erfüllt bleibt. Hauptsatz 1 ist dann bewiesen, wenn es gelingt, ein so zu fixieren, daß

$$) \qquad K > \mathfrak{k}_{17}$$

d.

Als Grundlage für das folgende dient uns die in I abgeleitete asymtische Formel

$$29) \qquad \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u} u^n \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du$$

$$= \mathfrak{k}_{18}\, \xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} n^{\frac{\varkappa-1}{4}} \sum_{\nu=1}^{\infty} F(\nu) \exp\left\{-\mathfrak{k}_{19}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\} \nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}} \cos\left(\mathfrak{k}_{20}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}} n^{\frac{1}{2}} + \frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$
$$+ O\left(n^{\frac{\varkappa-2}{4}}\right)$$

rbei läuft $n \to \infty$ über die natürlichen Zahlen; ξ darf auch von n ängen, jedoch so, daß

$$c n^{-\gamma} < \xi < \xi_0 \qquad (0 < \gamma < 1,\ c > 0,\ \xi_0 > 0 \text{ fest})$$

bt.

Um uns kürzer ausdrücken zu können, verabreden wir (vgl. I, § 4), die folgenden Abschätzungen implizite von $\mathfrak{R}$, m und K abhängen fen; insbesondere brauchen alle Ungleichungen in n und später in z dann erfüllt zu sein, wenn n und z oberhalb geeigneter, nur von en Parametern abhängiger Schranken liegen.

I, (29) ist insbesondere gültig, wenn wir darin

$$) \qquad \xi = \frac{\mathfrak{k}_{21}}{\log(\mathfrak{k}_{22} n)} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{k}_{21} = 2\mathfrak{k}_{19}^{-\frac{\varkappa}{2}}, \quad \mathfrak{k}_{22} = \frac{\mathfrak{k}_{20}^2}{\mathfrak{k}_{19}}$$

setzen. Für diesen Wert von ξ gilt bei wachsendem n (vgl. die analoge Überlegung in I, § 4)

$$I_n = \frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^n\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)\left(\log\left|\log\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)\right|\right)^{m-1}du$$

$$\sim \mathfrak{k}_{23}\,\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n^{\frac{\varkappa-1}{4}}\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n\,(\log\log n)^{m-1}.$$

Aus (19) folgt daher

$$\pm\frac{1}{n!}\int_0^\infty e^{-u}u^n\,\mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du < O(1) + K I_n$$

$$\sim \mathfrak{k}_{23}K\,\xi^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n^{\frac{\varkappa-1}{4}}\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n\,(\log\log n)^{m-1}.$$

Ein Vergleich mit I, (29) ergibt jetzt (man beachte dort das Minuszeichen rechts)

$$\mp\sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}_{19}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left(\mathfrak{k}_{20}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}n^{\frac{1}{2}}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$

$$< \mathfrak{k}_{24}K\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n\,(\log\log n)^{m-1}.$$

Hieraus folgt für $\mathfrak{k}_{25} = 2\,\mathfrak{k}_{24}$, wörtlich wie in I,

$$(22)\quad \mp\sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\exp\left\{-\mathfrak{k}_{19}(\xi\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left(\mathfrak{k}_{20}(\xi\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}n^{\frac{1}{2}}+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$

$$< \mathfrak{k}_{25}K\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}n\,(\log\log n)^{m-1},$$

wobei diesmal n *kontinuierlich* wachsen darf. Bezeichnet man nämlich die links in (22) auftretende Summe bei stetigem n mit $S(n)$, so wird sogar

$$(23)\qquad S(n) - S([n]) = o(1).$$

Wir setzen jetzt

$$n = \mathfrak{k}_{22}^{-1}z^2, \qquad \frac{1}{\log z} = \bar{\xi};$$

aus (21) und (22) folgt dann

$$(24)\qquad \mp\sum_{\nu=1}^{\infty}F(\nu)\exp\left\{-(\bar{\xi}\nu)^{\frac{2}{\varkappa}}\right\}\nu^{-\frac{\varkappa+1}{2\varkappa}}\cos\left((\bar{\xi}\nu)^{\frac{1}{\varkappa}}z+\frac{\varrho_1+1}{4}\pi\right)$$

$$< \mathfrak{k}_{26}K\log^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}z\,(\log\log z)^{m-1}.$$

Die Annahme

$$K \leqq \frac{\mathfrak{k}_{11}}{\mathfrak{k}_{26}}$$

weist sich, unter Berücksichtigung von (24) und (16), entweder mit (15′) ler mit (15″) als unvereinbar. Daher ist (20) mit

$$\mathfrak{k}_{17} = \frac{\mathfrak{k}_{11}}{\mathfrak{k}_{26}}$$

chtig und Hauptsatz 1 bewiesen.

2. Es seien z_1 und z_2 die beiden Werte von Hilfssatz 5. Wir bestimmen

5) $$n_1' = \mathfrak{k}_{22}^{-1} z_1^2, \quad n_1 = [n_1']; \quad n_2' = \mathfrak{k}_{22}^{-1} z_2^2, \quad n_2 = [n_2'].$$

ann folgt aus (17) und (25) mit $\mathfrak{k}_{27} = 2\,\mathfrak{k}_{22}^{-\frac{1}{2}}$

$$n_1' - n_2' = \mathfrak{k}_{27}(a_1 - a_2)(n_1')^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\mathfrak{k}_{22}}(a_1 - a_2)^2.$$

Hilfssatz 5 liefert daher mit Hilfe einer ähnlichen Rechnung wie bei m Beweis von Hauptsatz 1 (man beachte insbesondere (23) sowie das inuszeichen rechts in I, (29)): Es gibt unendlich viele Paare natürlicher hlen n_1, n_2, so daß die beiden Ungleichungen

6′) $$-\frac{1}{n_1!}\int_0^\infty e^{-u} u^{n_1} \mathsf{P}\left(\xi_1 u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du > \mathfrak{k}_{28}\, n_1^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_1)^{m-1},$$

6″) $$\frac{1}{n_2!}\int_0^\infty e^{-u} u^{n_2} \mathsf{P}\left(\xi_2 u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du > \mathfrak{k}_{28}\, n_2^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_2)^{m-1}$$

t

7) $$\xi_1 = \frac{\mathfrak{k}_{21}}{\log(\mathfrak{k}_{22} n_1)}, \quad \xi_2 = \frac{\mathfrak{k}_{21}}{\log(\mathfrak{k}_{22} n_2)}$$

üllt sind; hierbei wachsen n_1 und n_2 ins Unendliche, und es ist überdies

8) $$n_1 - n_2 \sim \mathfrak{k}_{27}(a_1 - a_2)\sqrt{n_1}.$$

Wir setzen nun für ein natürliches n

9) $$N_1(n) = N_1 = n - \varkappa\sqrt{n\log n}, \quad N_2(n) = N_2 = n + \varkappa\sqrt{n\log n}$$

d bestimmen

9′) $$N_1(n_1) = N_1', \quad N_2(n_1) = N_2', \quad N_1(n_2) = N_1'', \quad N_2(n_2) = N_2''.$$

Alle folgenden Ungleichungen in n, n_1, n_2 sowie auch später in x_1, x_2 brauchen nur dann erfüllt zu sein, wenn diese Größen oberhalb eigneter, nur von $\mathfrak{R}$ und m abhängiger Schranken liegen.

Ist ξ durch (21) gegeben, so sieht man leicht ein, daß für $n \to \infty$

9′) $$\frac{1}{n!}\int_0^{N_1} e^{-u} u^n \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du = o\left(n^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n)^{m-1}\right)$$

und

$$\frac{1}{n!}\int_{N_2}^{\infty} e^{-u}u^n \mathsf{P}\left(\xi u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du = o\left(n^{\frac{\varkappa-1}{4}}(\log\log n)^{m-1}\right) \tag{30''}$$

ist. Denn bereits die primitive Abschätzung

$$P(u) = O(u) \qquad (u \to \infty)$$

liefert für das Integral (30′)

$$O\left(\frac{1}{n!}e^{-N_1}N_1^n\int_0^{N_1} u^{\frac{\varkappa}{2}}du\right) = O\left(\frac{1}{n!}e^{-N_1}N_1^{n+\frac{\varkappa}{2}+1}\right)$$

und für das Integral (30″)

$$O\left(\frac{1}{n!}e^{-N_2}N_2^{n+\frac{\varkappa}{2}+2}\int_{N_2}^{\infty}\frac{du}{u^2}\right) = O\left(\frac{1}{n!}e^{-N_2}N_2^{n+\frac{\varkappa}{2}+1}\right).$$

Logarithmiert man hier die rechts in den O-Klammern stehenden Ausdrücke, so ergibt sich

$$\begin{aligned}&-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n + O(1) - n \pm \varkappa\sqrt{n\log n}\\ &\qquad + \left(n+\frac{\varkappa}{2}+1\right)\log\left(n \mp \varkappa\sqrt{n\log n}\right)\\ &= -\frac{\varkappa^2-\varkappa-1}{2}\log n + O(1).\end{aligned}$$

Die Integrale (30′) und (30″) sind mithin sogar $o(1)$.

Die gleiche einfache Abschätzung liefert uns

$$\frac{1}{n!}\int_{N_1}^{N_2} e^{-u}u^n du = 1 + o(1). \tag{31}$$

Aus (26′), (26″), (27), (29), (29′), (30′) und (30″) folgen mit $\mathfrak{k}_{29} = \frac{1}{2}\mathfrak{k}_{28}$ die beiden Ungleichungen

$$-\frac{1}{n_1!}\int_{N_1'}^{N_2'} e^{-u}u^{n_1}\mathsf{P}\left(\xi_1 u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du > \mathfrak{k}_{29}\,n_1^{\frac{\varkappa-1}{4}}(\log\log n_1)^{m-1},$$

$$\frac{1}{n_2!}\int_{N_1''}^{N_2''} e^{-u}u^{n_2}\mathsf{P}\left(\xi_2 u^{\frac{\varkappa}{2}}\right)du > \mathfrak{k}_{29}\,n_2^{\frac{\varkappa-1}{4}}(\log\log n_2)^{m-1}.$$

Hieraus schließt man in Verbindung mit (31), daß es ein Paar reeller Zahlen u_1, u_2 gibt, die in den Intervallen

$$N_1' \leqq u_1 \leqq N_2', \qquad N_1'' \leqq u_2 \leqq N_2'' \tag{32}$$

legen sind und mit $\mathfrak{k}_{30} = \frac{1}{2}\mathfrak{k}_{29}$ die beiden Ungleichungen

$$-\mathsf{P}\left(\xi_1 u_1^{\frac{\varkappa}{2}}\right) > \mathfrak{k}_{30} n_1^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_1)^{m-1}, \tag{3'}$$

$$\mathsf{P}\left(\xi_2 u_2^{\frac{\varkappa}{2}}\right) > \mathfrak{k}_{30} n_2^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_2)^{m-1} \tag{3''}$$

füllen. Denn andernfalls wäre z. B.

$$-\frac{1}{n_1!}\int_{N_1'}^{N_2'} e^{-u} u^{n_1} \mathsf{P}\left(\xi_1 u^{\frac{\varkappa}{2}}\right) du \leqq \mathfrak{k}_{30} n_1^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_1)^{m-1} \frac{1}{n_1!}\int_{N_1'}^{N_2'} e^{-u} u^{n_1} du$$

$$\sim \mathfrak{k}_{30} n_1^{\frac{\varkappa-1}{4}} (\log\log n_1)^{m-1}.$$

Wir setzen nunmehr

$$x_1 = \xi_1 u_1^{\frac{\varkappa}{2}}, \qquad x_2 = \xi_2 u_2^{\frac{\varkappa}{2}}. \tag{4}$$

us (27), (28), (29), (29′), (32) und (34) folgt dann, daß x_1 und x_2 ide mit n_1, n_2 ins Unendliche wachsen, daß ferner die asymptotischen eichungen

$$x_1 \sim \frac{\mathfrak{k}_{31}}{\log n_1} n_1^{\frac{\varkappa}{2}}, \qquad \log x_1 \sim \frac{\varkappa}{2}\log n_1, \qquad \log\log x_1 \sim \log\log n_1, \tag{4'}$$

wie drei analoge für x_2 gelten. Wir benutzen in der Folge die eben nannten sechs Formeln, wie auch (34′), ohne es besonders zu erwähnen.

Wir können jetzt (33′) und (33″) in die Form

$$-\mathsf{P}(x_1) > \mathfrak{k}_1 (x_1 \log x_1)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x_1)^{m-1}, \tag{5'}$$

$$\mathsf{P}(x_2) > \mathfrak{k}_1 (x_2 \log x_2)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}} (\log\log x_2)^{m-1} \tag{5''}$$

zen, wobei für $\mathfrak{k}_1$ z. B. der Wert

$$\mathfrak{k}_1 = \frac{1}{2}\mathfrak{k}_{30}\left(\frac{2}{\varkappa \mathfrak{k}_{21}}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2\varkappa}}$$

ässig ist.

Man hat nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\xi_1 - \xi_2 = O\left(\frac{|n_1 - n_2|}{n_1 \log^2 n_1}\right) = O\left(n_1^{-\frac{1}{2}} \log^{-2} n_1\right),$$

ner

$$u_1^{\frac{\varkappa}{2}} - u_2^{\frac{\varkappa}{2}} = O\left(|u_1 - u_2| u_1^{\frac{\varkappa}{2}-1}\right) = O\left(\sqrt{n_1 \log n_1}\, n_1^{\frac{\varkappa}{2}-1}\right) = O\left(n_1^{\frac{\varkappa-1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} n_1\right),$$

d. h.

$$x_1 - x_2 = \xi_1\left(u_1^{\frac{\varkappa}{2}} - u_2^{\frac{\varkappa}{2}}\right) + (\xi_1 - \xi_2)\,u_2^{\frac{\varkappa}{2}}$$

$$= O\left(\frac{1}{\log n_1}\, n_1^{\frac{\varkappa-1}{2}} \log^{\frac{1}{2}} n_1\right) + O\left(n_1^{-\frac{1}{2}} \log^{-2} n_1 \cdot n_1^{\frac{\varkappa}{2}}\right) = O\left(n_1^{\frac{\varkappa-1}{2}} \log^{-\frac{1}{2}} n_1\right)$$

$$= O\left(x_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-2}{2\varkappa}} x_1\right) = O\left(x_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-2}{2\varkappa}} x_2\right).$$

Beschränkt man sich nun auf solche Wertsysteme x_1, x_2, für welche $x_1 \geqq 3$, $x_2 \geqq 3$ gilt, dann wird

$$|x_1 - x_2| \leqq t_2\, x_1^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-2}{2\varkappa}} x_1,$$

$$|x_1 - x_2| \leqq t_2\, x_2^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}} \log^{\frac{\varkappa-2}{2\varkappa}} x_2.$$

Damit ist aber Hauptsatz 2 bewiesen. Man hat nur

$$y = \mathrm{Min}(x_1, x_2)$$

zu setzen, diejenigen endlich vielen y auszuschließen, für die entweder $x_1 < 3$ oder $x_2 < 3$ oder eine der beiden Ungleichungen (35′), (35″) nicht zutrifft, und sodann aus der Restmenge eine beliebige Teilfolge

$$y_1 < y_2 < \ldots; \qquad \lim_{\nu \to \infty} y_\nu = \infty$$

herauszugreifen.

Berlin und Wiesbaden, Juni 1926.

(Eingegangen am 15. Juni 1926.)

Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern II.

Von

Arnold Walfisz in Wiesbaden.

In der ersten gleichnamigen Abhandlung (diese Zeitschrift 22 (1925), 153—188) habe ich folgenden Satz bewiesen:

Es seien: $\mathfrak{K}$ *ein algebraischer Zahlkörper k-ten Grades mit der* ...*undzahl* Δ; r_1 *die Anzahl der zu* $\mathfrak{K}$ *konjugierten reellen Körper,* r_2 *die* ...*lbe Anzahl der imaginären*; m *eine ganze positive Zahl*; $mk = \varkappa$,

$r_1 = \varrho_1$, $mr_2 = \varrho_2$; $|\Delta|^m = D$; $\tau = \varkappa 2^{\frac{\varrho_1}{\varkappa}}$;

.1) [1] $$A = 2^{-r_2}\pi^{-\frac{k}{2}}\sqrt{|\Delta|}; \qquad \mathsf{A} = A^m;$$

(s) *die zu* $\mathfrak{K}$ *gehörige Dedekindsche Zetafunktion*; $Z(s) = \zeta_{\mathfrak{K}}^m(s)$; [2]
$= \sigma + it$

.2) $$(\sigma > 1) \qquad Z(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^s};$$

> 0; $F(x) = 0$ *für nichtganzes* x;

$$\sum_{n \leqq x} F(n) = H(x);$$

.3) $R(x)$ *das Residuum von* $Z(s)\frac{x^s}{s}$ *für* $s = 1$;

.4) $$G(s) = \frac{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(1-s)}{\Gamma^{\varrho_1}\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma^{\varrho_2}(s)};$$

---

[1]) Die Formeln (1.1), (1.2) usw. sind der ersten Abhandlung, die ich kurz t I bezeichnen will, entnommen; sie werden w. u. auch ohne Wiedergabe des xtes zitiert. In der vorliegenden Abhandlung numeriere ich (1), (2), ... Alle in r Folge genannten Hilfssätze beziehen sich auf I.

[2]) $\zeta_{\mathfrak{K}}^m(s) = (\zeta_{\mathfrak{K}}(s))^m$, und ebenso in allen analogen Fällen.

$$(1.5)\quad (w>0)\qquad J_{\varrho_1,\varrho_2}(w)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\left(\frac{w}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}.$$

Dann ist

$$(1.6)\qquad H(x)-\frac{1}{2}F(x)$$

$$=R(x)+Z(0)+A\sqrt[\varkappa]{\frac{x}{A^2}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{\varkappa}}}J_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right),\ ^{3})$$

wobei die unendliche Reihe folgendes Verhalten zeigt:

1. *Für* $1\leqq\varkappa\leqq 2$ *konvergiert sie, und zwar gleichmäßig in jedem Intervall* $0<x_0\leqq x\leqq x_1$ *mit* $F(x)=0$.

2. *Für* $\varkappa\geqq 3$ *ist sie für jedes* $\varepsilon>0$ *nach arithmetischen Mitteln*[4] *von der Ordnung* $\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon$ *summabel, kurz* $\left(n,\frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$ *summabel, und zwar bei festem* ε *gleichmäßig in jedem Intervall* $0<x_0\leqq x\leqq x_1$ *mit* $F(x)=0$.

3. *Für* $\varkappa\geqq 3$ *ist sie nicht summabel* $\left(n,\frac{\varkappa-3}{2}\right)$, *und zwar durchweg für jedes* x.[5]

Ich bezeichne mit q irgendeine Sprungstelle von $H(x)$; es ist also $q\geqq 1$ ganz und $F(q)\neq 0$. Für jedes feste Intervall der Form

$$0<x_0\leqq x\leqq x_1 \text{ mit } F(x)=0,\quad \text{also } x\neq q$$

werde ich kurz Stetigkeitsintervall sagen.

In einem Stetigkeitsintervall ist die linke Seite von (1.6) differentiierbar, die Ableitung identisch Null. Die rechte Seite kann man, wenigstens formal, gliedweise differentiieren. Man bekommt so

$$(1)\qquad -R'(x)=A^{1-\frac{2}{\varkappa}}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{\varkappa}}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt[\varkappa]{x}\,J_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)\right).$$

Ich will im folgenden die Reihe (1) mit der Methode von I näher betrachten und dabei folgendes zeigen:

---

[3]) In I sind hier die beiden folgenden Druckfehler

$$1-\frac{1}{\varkappa},\quad \sqrt{\frac{nx}{D}}\quad \text{für}\quad n^{1-\frac{1}{\varkappa}},\quad \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}$$

richtigzustellen.

[4]) Über diesen Begriff vgl. I, § 5.

[5]) E. Landau, „Bemerkungen zu der Arbeit des Herrn Walfisz: Über das Piltzsche Teilerproblem in algebraischen Zahlkörpern“ [Mathematische Zeitschrift 23 (1925), S. 189—205] gab einen einfacheren Beweis dieses Satzes.

1′. *Für $x \neq q$ ist die Reihe $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon\right)$ summabel, und zwar bei tem ε gleichmäßig in einem Stetigkeitsintervall. Beidemal gilt die eichung* (1).

2′. *Für kein x ist die Reihe $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}\right)$ summabel.*

3′. *Für kein q ist sie nach arithmetischen Mitteln (einer noch so hen Ordnung) summabel.*

Den Beweis führe ich, bis auf augenscheinliche Übertragungen der lfssätze 1, 6 und 7, genau durch.

Die vorliegende Untersuchung wurde durch eine Note von Oppenheim[6]) veranlaßt, in der neben zwei zu (1.6) verwandten Entcklungen auch die beiden abgeleiteten Reihen betrachtet werden. penheim gibt nur die mit 1, 2 und 1′ gleichwertigen Behauptungen; n kann indessen seine Sätze im Sinne von 3, 2′ und 3′ abschließend gänzen.

Für $\varkappa = 1$ ist $F(x) = 1$ für ganze x und sonst $F(x) = 0$. Ferner luziert sich (1.6) auf

$$x - [x] - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} F(x) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2n\pi x}{n}$$

gl. I, S. 175), d. h. (1) auf

$$1 = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2n\pi x.$$

e Behauptungen 1′, 2′ und 3′ sind hier wohlbekannt; ich darf daher, beim Beweise des Hauptsatzes von I, $\varkappa \geqq 2$ annehmen.

Ist die Reihe (1) in einem Stetigkeitsintervall gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon\right)$ nmabel, so muß sie dort ohne weiteres $-R'(x)$ darstellen[7]). Ferner ist Reihe natürlich für alle $x \neq q$ von der genannten Ordnung summabel, man jedes solche x in einem Stetigkeitsintervall unterbringen kann. mit ist Behauptung 1′ auf die folgende zurückgeführt:

1″. *Bei festem $\varepsilon > 0$ ist die Reihe* (1) *in einem Stetigkeitsintervall ichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon\right)$ summabel.*

---

[6]) „Some Identities in the Theory of Numbers“ [Proceedings of the London thematical Society, Ser. 2, 24 (1925), S. V—VII].

[7]) Vgl. das Kriterium für gliedweise Differentiierbarkeit summabler Reihen in I, 75—176; ich verweise auch gleich für das Folgende auf die Bemerkungen I, 66 und S. 177.

Führe ich jetzt die Differentiationen in (1) aus, so folgt

$$-R'(x)=\frac{1}{\varkappa x}\mathsf{A}\sqrt[\varkappa]{\frac{x}{\mathsf{A}^2}}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{F(n)}{n^{1-\frac{1}{\varkappa}}}J_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)$$

$$+\frac{2\pi}{x}\mathsf{A}\sqrt[\varkappa]{\frac{x^2}{\mathsf{A}^3 D}}\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{F(n)}{n^{1-\frac{2}{\varkappa}}}J'_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right).$$

Hier ist die erste Reihe rechts, bis auf einen trivialen Faktor, mit der Reihe (1.6) identisch; sie erfüllt insbesondere die Behauptungen 1 und 2, braucht uns daher nicht weiter zu beschäftigen. Es genügt also, die Behauptungen 1″, 2′ und 3′ für

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}{}'\frac{F(n)}{n^{1-\frac{2}{\varkappa}}}J'_{\varrho_1,\varrho_2}\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) \tag{2}$$

nachzuweisen.

Für $w>0$ folgt aus (1.5) [8])

$$J'_{\varrho_1,\varrho_2}(w)=\frac{1}{w}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty}G(s)(\varkappa s-1)\left(\frac{w}{\iota}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s} \tag{3}$$

In der Folge setze ich $g=\left[\frac{\varkappa+1}{2}\right]$ und verstehe unter

$$\mathfrak{k}_1,\ldots,\mathfrak{k}_4,a^{(1)},\ldots,a^{(g)},b^{(1)},\ldots,b^{(g)},a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$$

geeignete reelle, nur von $\mathfrak{K}$ und m abhängige Konstanten, von denen die $\mathfrak{k}\neq 0$ sind. Ich lege ferner $1>\varepsilon>0$ fest.

Für $w\to\infty$ hat man

$$J'_{\varrho_1,\varrho_2}(w)=\mathfrak{k}_1\sin\left\{w+\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}w^{\frac{\varkappa-3}{2}} \tag{4}$$

$$+w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\cos w\cdot\left(\frac{a^{(1)}}{w}+\ldots+\frac{a^{(g)}}{w^g}\right)+w^{\frac{\varkappa-3}{2}}\sin w\cdot\left(\frac{b^{(1)}}{w}+\ldots+\frac{b^{(g)}}{w^g}\right)$$

$$+O\left(w^{\frac{\varkappa-3}{2}-g-1}\right).$$

---

[8]) Nach (2.2) und (2.21) ist $G(s)$ in jedem Streifen $\sigma_1\leqq\sigma\leqq\sigma_2$ gleichmäßig in σ

$$O\left(|t|^{\varkappa\left(\frac{1}{2}-\sigma\right)}\right).$$

Man darf also ohne weiteres für $\varkappa\geqq 5$ die rechte Seite von (1.5) unter dem Integralzeichen differentiieren. Wenn aber $\varkappa=2,3,4$ ist, so verschiebe man in (1.5), unter Berücksichtigung des Residuums für $s=1$, den Integrationsweg auf $\sigma=\frac{3}{2}$, differentiiere und kehre dann nach $\sigma=\frac{3}{4}$ zurück.

s wird, von (3) ausgehend, genau wie die entsprechende Abschätzung 1) für $J_{\varrho_1,\varrho_2}(w)$ bewiesen.[9])

Wendet man auf jedes einzelne Glied der Reihe (2) die Abschätzung (4) und beachtet (9.2), so folgt

$$S = t_2 x^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left\{2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$+ a_1 x^{\frac{\varkappa-5}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) + \dots$$

$$+ a_g x^{\frac{\varkappa-3-2g}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{2g-1}{2\varkappa}}} \cos\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right)$$

$$+ b_1 x^{\frac{\varkappa-5}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) + \dots$$

$$+ b_g x^{\frac{\varkappa-3-2g}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{2g-1}{2\varkappa}}} \sin\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} O\left(\frac{1}{n^{1+\frac{1}{3\varkappa}}}\right).$$

rin ist die O-Reihe für alle $x > 0$ absolut und in jedem Stetigkeits-rvall gleichmäßig konvergent, kann also bei den weiteren Betrach-gen vernachlässigt werden.

Beweis von 1″. Ich lasse bei der Definition der Ψ-Funktionen in 1) auch noch den Wert $l = -1$ zu, d. h. setze für $\sigma > 0$

$$\Psi_{-1}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} e^{-\sqrt[\varkappa]{n}s}.$$

ist dann nach (4.1)

$$\Psi_{-1}(s) = -\Psi'(s).$$

---

[9]) Um hierbei die Rechnungen auf ein Mindestmaß zurückzuführen, empfiehlt ich, das Integral (3) — unter Berücksichtigung von (1.5) — in die Form

$$J'_{\varrho_1,\varrho_2}(w) = -\frac{1+\mathfrak{e}}{w} J_{\varrho_1,\varrho_2}(w) + \frac{2}{w}\frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{3}{4}-i\infty}^{\frac{3}{4}+i\infty} G(s)\,\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}\left(\frac{w}{\tau}\right)^{\varkappa s-1}\frac{ds}{s}$$

ringen, wobei $\mathfrak{e}$ die Bedeutung I, S. 155 besitzt. Man kann dann (2.1) mit venden und hat für

$$\frac{G(s)}{s}\,\frac{\varkappa s+\mathfrak{e}}{2}$$

Γ-Zerlegung, die sich unmittelbar aus (2.4) ablesen läßt.

Nach Hilfssatz 3 ist also $\Psi_{-1}(s)$ auf der oberen imaginären Achse ($\sigma = 0, t > 0$), mit Ausnahme der Punkte

$$t = \gamma = \gamma_q = 2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{q}{D}} \tag{4.11}$$

regulär.

Nehme ich

$$t = 2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{x}{D}}, \tag{9.41}$$

so gehört t einem abgeschlossenen Intervall von der Form

$$\gamma_{q_0} < t_0 \leqq t \leqq t_1 < \gamma_{q_1} \tag{9.42}$$

an. In diesem ist, $s = ti$ gesetzt, die Funktion

$$e^{-\frac{1}{4}(q_1+1)\pi i}\,\Psi_{-1}(s)$$

regulär. Da ferner nach (9.2)

$$\frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} = O\left(n^{\frac{\varepsilon}{2\varkappa}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}\right) = o\left(n^{\frac{\frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon+1-\varkappa}{\varkappa}}\right)$$

wird, so ergibt eine Anwendung von Hilfssatz 4, Bedingung (5.2), Fall II, daß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}}\, e^{-(\sqrt[\varkappa]{n}\,t+\frac{1}{4}(q_1+1)\pi)i},$$

also auch ihr Imaginärteil, im Intervall (9.42) gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon\right)$ summabel ist. Somit ist die erste Reihe rechts in (5) in einem Stetigkeitsintervall $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}+\varepsilon\right)$ summabel. Jede der folgenden $2g$ Reihen ist aber, wie in I, S. 178—179 gezeigt, ebenda für $\varkappa = 2$ gleichmäßig konvergent, für $\varkappa \geqq 3$ gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}+\varepsilon\right)$ summabel, jedenfalls also gleichmäßig $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}\right)$ summabel.

Beweis von 2′. Ich darf mich auf die erste Reihe in (5) beschränken, da alle anderen, wie gesagt, $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}\right)$ summabel sind.

Ich verstehe, wie in I, S. 173, unter $P(y)$ dasjenige reelle Polynom genau $(m-1)$-ten Grades, welches für jedes $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n \leqq x} P(\log n) = R(x) + O(x^{\varepsilon})$$

illt, und setze

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)-P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left\{2\varkappa\pi \sqrt[\varkappa]{\frac{nx}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\} = S_1 + S_2 .$$

Es sei $x \neq q$, also das durch (9.41) gegebene t in einem Intervall
42). Nach Hilfssatz 5 mit

$$a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\varkappa}; \qquad b = 0, 1, \ldots, m-1$$

die Funktion

$$e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\left(\Psi_{-1}(s) - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} e^{-\sqrt[\varkappa]{n}\,s}\right)$$

Punkte $s = ti$ regulär. Auf den Imaginärteil der zugehörigen Dirichlet-
ien Reihe, und somit auf die Reihe S_1, ist daher Hilfssatz 4, Fall II
wendbar; die Bedingung (5.3) ist hier wegen

$$\sum_{n<w^{\varkappa}} \frac{F(n)-P(\log n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} e^{\sqrt[\varkappa]{n}\,(1+it)} \left(w - \sqrt[\varkappa]{n}\right)^{\frac{\varkappa-1}{2}} = o\left(e^w w^{\frac{\varkappa-1}{2}}\right)$$

achweis genau wie der von (8.2)) mit $\alpha = \frac{\varkappa-1}{2}$ erfüllt. Für jedes
$\neq q$ ist also die mit S_1 bezeichnete Reihe $\left(n, \frac{\varkappa-1}{2}\right)$ summabel, während
n wörtlich nach dem Vorbilde von I, S. 169—173 zeigen kann, daß
für kein $x > 0$ diese Eigenschaft besitzt.

Beweis von 3′. Differentiiert man (4.7), unter Berücksichtigung
n (4.71) und (4.72), so folgt: Für $s \to 0^+$ ist

$$\Psi_{-1}(s+i\gamma) \sim e^{-\frac{1}{4}(1-\varrho_1)\pi i}\, \mathfrak{k}_3 \frac{F(q)}{q^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \frac{1}{s},$$

bei γ jeden Wert (4.11) annehmen darf.

Ich setze jetzt

$$\Omega(s) = -e^{-\frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi i}\, \mathfrak{k}_2 q^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \Psi_{-1}(s+i\gamma) + (ia_1 - b_1) q^{\frac{\varkappa-5}{2\varkappa}} \Psi(s+i\gamma),$$

wobei $\mathfrak{k}_2$, a_1 und b_1 die in (5) gegebenen Werte besitzen. Aus (6) und (4.12) folgt dann: Für $s \to 0^+$ ist

$$\Omega(s) \sim i\mathfrak{k}_4 \frac{F(q)}{\sqrt[\varkappa]{q}} \frac{1}{s}. \tag{8}$$

Also ist der Ausdruck

$$\mathfrak{k}_2 q^{\frac{\varkappa-3}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left\{2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}} + \frac{1}{4}(\varrho_1+1)\pi\right\}$$

$$+ a_1 q^{\frac{\varkappa-5}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \cos\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}}\right) + b_1 q^{\frac{\varkappa-5}{2\varkappa}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(n)}{n^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2\varkappa}}} \sin\left(2\varkappa\pi\sqrt[\varkappa]{\frac{nq}{D}}\right)$$

nicht nach arithmetischen Mitteln summabel. Dies ergibt sich sofort, wenn man für $s > 0$ den Imaginärteil von (7) als Dirichletsche Reihe schreibt und beachtet, daß alsdann, zufolge (8), für $s \to 0^+$ kein Grenzwert existiert (vgl. die Bemerkung in I zur Fußnote [28]) ebenda).

Alle sonst noch auf der rechten Seite von (5) vorkommenden Reihen sind für $x = q$ nach I, S. 181 summabel $\left(n, \frac{\varkappa-3}{2}\right)$. Damit ist auch 3' erledigt.

Wiesbaden, den 26. Juni 1926.

(Eingegangen am 28. Juni 1926.)

emerkungen zu meiner Arbeit „Über Körper der Charakteristik p“ in Band 24 (1925) dieser Zeitschrift, S. 1—39.

Von

P. Sengenhorst in Charlottenburg.

In der oben genannten Arbeit habe ich, angeregt durch eine Be-erkung von Herrn Kürschák[1]), unter Benutzung der Methoden von Herrn ensel, u. a. bewiesen, daß jede endliche algebraische Erweiterung des örpers Ω' (vgl. S. 7 meiner Arbeit) eine Bewertung im Sinne von Herrn irschák zuläßt. Wie mir Herr Rychlík mitteilt, ergibt sich dies als ezialfall des folgenden von ihm erhaltenen allgemeineren Resultats: sei ein nichtarchimedisch bewerteter perfekter Körper, L eine algebraische weiterung von K; dann läßt sich L so bewerten, daß die Bewertung n K erhalten bleibt. Herr Rychlík hat dieses Resultat bereits 1919 in hechischer Sprache[2]) und dann 1923, ebenfalls vor Erscheinen meiner beit, in deutscher Sprache[3]) veröffentlicht. Zur Zeit der Abfassung einer Arbeit lag diese deutsche Fassung noch nicht vor; zu meinem oßen Bedauern ist sie meiner Aufmerksamkeit auch während der Druck-gung meiner Arbeit entgangen.

Ich bemerke noch, daß sich die in meiner Arbeit vornehmlich be-ndelte *Arithmetik* der Körper $\Omega(\vartheta)$ (vgl. S. 1 meiner Arbeit) bei Herrn chlík nicht findet; der Ausdruck „ganze“ Elemente hat bei ihm eine dere Bedeutung als bei mir.

[1]) Journal für die r. u. a. Mathematik **142** (1913), S. 218.

[2]) Časopis **48**, S. 145—165.

[3]) Journal für die r. u. a. Mathematik **153**, S. 94—107.

(Eingegangen am 15. Oktober 1926.)

Correction.

Von

E. C. Titchmarsh.

I. In paragraph 4 of my paper on 'Reciprocal formulae involving series and integrals' (Math. Zeitschr. **25** (1926), pp. 321—347), the proof that $N_p \leqq N_p'$ is incorrect, and should be deleted. This does not affect anything else in the paper.

II. In obtaining the inequality which follows formula (2.32), we have assumed that (4a) as well as (3a) holds for the particular value of p taken. This merely involves a slight rearrangement of the proof.

III. The following references to the work of M. Riesz should have been given:

Comptes Rendus **178** (Apr. 28, 1924), pp. 1464—1467 and Proc. London Math. Soc. (2) **23** (1925), pp. XXIV—XXVI (Records for Jan. 17, 1924). I should have said that I was already familiar with Riesz's methods, and not merely his results, when I wrote my paper.

(Eingegangen am 10. November 1926.)

Über die Cayleysche Eliminationsmethode.

Von

E. Fischer in Köln.

Für die Resultante $R(a)$ von n Formen von n Variablen mit unbe-
nmten Koeffizienten a hat Cayley eine Konstruktion angegeben[1]),
che den großen Vorzug besitzt, nicht von $n-1$ auf n zu operieren.
yley geht von dem „dialytischen" Ansatze Sylvesters aus, durch
chen im Falle $n=2$ die Resultante in Gestalt einer Determinante
efert wird, und macht ihn dadurch auch für $n>2$ verwendbar, daß
denjenigen Prozeß einleitet, welchen wir heute als die Bildung der
lbertschen Kette abgeleiteter Gleichungssysteme für das aus den n
rmen bestehende Modulsystem bezeichnen. Er gelangt zu Darstellungen

$$R(a)=\frac{\Delta^{(0)}(a)}{\Delta^{(1)}(a)} \text{ im Falle } n=3,$$

$$R(a)=\frac{\Delta^{(0)}(a)\cdot\Delta^{(2)}(a)}{\Delta^{(1)}(a)} \text{ im Falle } n=4, \text{ usw.,}$$

in die $\Delta^{(\varkappa)}(a)$ Determinanten von ähnlicher Art wie die Sylvester-
e des Falles $n=2$ sind. Und zwar ergibt sich nicht nur eine solche
stellung, sondern mehrere, je nachdem, welche Determinanten $\Delta^{(\varkappa)}(a)$
n aus gewissen Matrizen auswählt.

Die Cayleysche Konstruktion ist jedoch bisher unbewiesen. Die
wierigkeit besteht in dem Nachweise, daß die angegebenen Quotienten
den a ganz sind. Cayley stützt sich dazu auf ein allgemeines Prinzip
der Theorie der Matrizen, welches so dunkel formuliert ist, daß man
r seine Richtigkeit nicht urteilen kann[2]). Um ein einfaches Beispiel
nehmen, seien die vier bilinearen Gleichungen

[1]) Cayley, Math. Papers I Nr. 59, on the theory of elimination (1848).

[2]) Das von Netto, Algebra II § 450, angegebene Gegenbeispiel dürfte freilich
Meinung Cayleys kaum treffen.

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0 \qquad u_1 y_1 + u_2 y_2 + u_3 y_3 + u_4 y_4 = 0$$
$$v_1 x_1 + v_2 x_2 + v_3 x_3 + v_4 x_4 = 0 \qquad v_1 y_1 + v_2 y_2 + v_3 y_3 + v_4 y_4 = 0$$

zwischen 16 Größen $u_1, \ldots, y_4$ vorgelegt. Setzt man

$$q_{ij} = u_i v_j - u_j v_i \qquad p_{ij} = x_i y_j - x_j y_i,$$

und sind etwa die $p_{ij} \neq 0$, so ist bekanntlich

$$\frac{q_{34}}{p_{12}} = \frac{q_{42}}{p_{13}} = \frac{q_{23}}{p_{14}} = \frac{q_{12}}{p_{34}} = \frac{q_{13}}{p_{42}} = \frac{q_{14}}{p_{23}}.$$

Nun sagt Cayley ohne Erläuterung, es sei in jedem dieser Quotienten der Zähler durch den Nenner „teilbar". Jedenfalls kann das nicht dahin interpretiert werden, daß man für $u_1, \ldots, y_4$ irgendwie solche ganze rationale Funktionen von Parametern setzt, daß die vier bilinearen Gleichungen identisch in den Parametern erfüllt sind, und nun die Teilbarkeit in bezug auf die Parameter behauptet; denn die bilinearen Gleichungen werden nicht gestört, wenn man y_1, y_2, y_3, y_4 mit einer und derselben ganzen rationalen Funktion der Parameter multipliziert, während die Teilbarkeit dadurch im Allgemeinen gestört wird.

Um das dunkle Cayleysche Prinzip durch einen klaren Satz zu ersetzen, verfahre ich folgendermaßen. Es seien $u_1, \ldots, y_4$ solche ganze rationale Funktionen von Parametern, daß die vier bilinearen Relationen identisch in den Parametern erfüllt sind und die p_{ij} nicht identisch in den Parametern verschwinden, und es sei, in bezug auf die Parameter, p der größte gemeinsame Teiler der p_{ij} und q der größte gemeinsame Teiler der q_{ij}; dann ist, bei geeigneter Normierung der konstanten Faktoren, $\frac{q}{p}$ der gemeinsame Wert unserer sechs Quotienten.

Mit Hilfe dieses unmittelbar einleuchtenden Satzes werde ich nun den Beweis für die Cayleysche Konstruktion der Resultante wirklich erbringen. Ich setze dabei die Grundtatsachen der Resultantentheorie als bereits auf anderem Wege bewiesen voraus[3]). Ferner mache ich davon Gebrauch, daß man für solche Formensysteme mit speziellen Koeffizienten, für welche $R(a) \neq 0$ ist, die Hilbertsche Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme explizit kennt; das erste abgeleitete Gleichungssystem wird durch einen Satz von Lasker[4]) gegeben; die weiteren finden sich bei Ostrowski[4]) als Beispiel zu einem tiefer liegenden Satze, können jedoch auch leicht durch wiederholte Anwendung des Laskerschen Satzes gewonnen werden.

---

[3]) Mertens, Zur Theorie der Elimination, Wiener Sitzungsber. 1899.

[4]) Lasker, Zur Theorie der Moduln und Ideale, Math. Ann. 60 Satz 1. Ostrowski, Über ein algebraisches Übertragungsprinzip, Abh. a. d. Math. Seminar Hamburg 1, S. 319.

Nachdem bewiesen ist, daß die Cayleyschen Quotienten mit $R(a)$ auf einen Zahlenfaktor übereinstimmen, hat man noch zu zeigen, daß er ± 1 ist. Dazu ist eigentlich eine zahlentheoretische Verfeinerung Laskerschen Satzes erforderlich; man kann sich aber hier eines spe-len Formensystems bedienen, für welches der Laskersche Satz ial wird.

Die Cayleyschen $\Delta^{(\varkappa)}(a)$ sind keine Invarianten des Formensystems. rt man aber ein zweites Formensystem von bzw. denselben Gradzahlen, unbestimmten Koeffizienten b und mit zu denen des ersten kontra-dienten Variablen ein, so kann man aus den sämtlichen Cayleyschen stellungen für $R(a)$ und für $R(b)$ eine Darstellung des Produktes

$$R(a)\cdot R(b) = \frac{\Delta^{(0)}(a;\, b)\cdot\Delta^{(2)}(a;\, b)\ldots}{\Delta^{(1)}(a;\, b)\,\Delta^{(3)}(a;\, b)\ldots}$$

binieren, worin die $\Delta^{(\varkappa)}(a;\, b)$ Invarianten des vereinigten Formen-ems sind; durch Spezialisierung der b würden daraus auch Darstellungen $R(a)$ entstehen, dabei aber die Invarianteneigenschaft natürlich wieder oren gehen.

Diese Invarianten $\Delta^{(\varkappa)}(a;\, b)$ gehören nun dem Gedankenkreise an, r welchen ich z. B. in meinem Leipziger Vortrage[5]) „Modulsysteme Differentialgleichungen" berichtet habe; wenn nämlich für Formen-eme mit speziellen Koeffizienten $\Delta^{(\varkappa)}(a;\, b) + 0$ ist, so treten Erschei-gen auf, die den dort auseinandergesetzten analog sind (§ 33). In Tat hatte ich aus diesem Gedankenkreise heraus die angegebene Dar-lung für das Produkt $R(a)\cdot R(b)$ bereits vermutet, bevor ich mich der Cayleyschen Methode beschäftigt hatte, doch ist mir der Beweis durch Zurückführung auf die Cayleyschen Darstellungen gelungen.

Den Anstoß zu der vorliegenden Arbeit gab eine Note von Perron[6]). handelt sich da darum, nach einem aus n Formen von $n+1$ Variablen unbestimmten Koeffizienten a bestehenden Modulsystem eine beliebig gegebene Form vom Grade s in einer gewissen Weise zu reduzieren. nscht man nun für die Möglichkeit der Reduktion einen Beweisansatz, auch für spezielle Koeffizienten a in Kraft bleibt, wenn dieselben nur Beschränkung unterworfen werden, daß die Reduktion für alle Formen Grade s und von niedrigerem Grade möglich ist, so ist der Perrron-Ansatz unübertrefflich. Begnügt man sich dagegen mit einem Be-sansatze, der für spezielle Koeffizienten nur dann in Kraft bleibt, n dieselben gewissen anderen Beschränkungen unterworfen werden, so

[5]) Jahresber. d. D. Math. Verein. 32; vgl. auch Math. Zeitschr. 18 und die da-t zitierten älteren Abhandlungen.

[6]) Perron, Beweis eines Satzes von Bézout, Math. Zeitschr. 21.

stehen einfachere Ansätze zur Verfügung, und man gelangt so für den auf unbestimmte Koeffizienten a bezüglichen Satz zu Ansätzen, bei denen die dem Perronschen eigentümlichen hohen Gradzahlen in den a vermieden werden, die Beweismethode aber anwendbar bleibt. Einer dieser Ansätze gehört nun dem hier zu entwickelnden Gedankenkreise an (§ 34).

Inhaltsübersicht.

Kapitel I. Ketten korrespondierender Matrizen.
Kapitel II. Der Lasker-Ostrowskische Satz.
Kapitel III. Die Cayleysche Konstruktion der Resultante. (Satz I, Satz II.)
Kapitel IV. Referat über einige Gegenstände der linearen Algebra.
Kapitel V. Die zu den Cayleyschen dualen Funktionenscharen.
Kapitel VI. Die invariante Konstruktion des Resultantenproduktes $R(a)\cdot R(b)$. (Satz III.)

Kapitel I.

Ketten korrespondierender Matrizen.

§ 1. Die in der Einleitung benutzten Determinantenrelationen sind in einem Satze enthalten, der nach Brill der Satz von den korrespondierenden Matrizen heißt, der aber schon von Cayley verwendet wird.

Es seien, um vorerst eine Bezeichnung zu erklären, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Matrizen, deren Elemente Unbestimmte sind, und $\mathfrak{B}'$ die zu $\mathfrak{B}$ transponierte Matrix. $\mathfrak{A}$ habe ϱ Zeilen und $r > \varrho$ Spalten, $\mathfrak{B}$ habe r Zeilen und $r - \varrho$ Spalten. Die ϱ-reihigen Determinanten von $\mathfrak{A}$, jede in der natürlichen Anordnung ihrer Spalten gebildet, mögen in irgendeiner Reihenfolge $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ genannt werden. Setzt man dann, durch Vertikalstriche die Bildung der Determinante andeutend,

$$\left|\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ \mathfrak{B}'\end{matrix}\right| = \mathfrak{a}_1\mathfrak{b}_1 + \mathfrak{a}_2\mathfrak{b}_2 + \ldots$$

mit der Bestimmung, daß $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ von den Elementen von $\mathfrak{A}$ unabhängig sein sollen, so heißen $\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \ldots$ die zu $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots$ *komplementär numerierten* und mit den *Laplaceschen Vorzeichen* versehenen $r - \varrho$-reihigen Determinanten von $\mathfrak{B}$.

Es seien nun A und B Matrizen von derselben Gestalt wie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, und es mögen $a_1, a_2, \ldots$ und $b_1, b_2, \ldots$ die analoge Bedeutung haben. *Wenn nun die Matrizengleichung*

$$A\cdot B = 0$$

besteht, worin 0 *eine Nullmatrix bedeutet, so ist*

$$a_i b_j = a_j b_i.$$

Denn es ist

$$\begin{pmatrix} A \\ \mathfrak{B}' \end{pmatrix} \cdot (\mathfrak{A}', B) = \begin{pmatrix} A \cdot \mathfrak{A}', & 0 \\ \mathfrak{B}' \cdot \mathfrak{A}', & \mathfrak{B}' B \end{pmatrix}, \quad \left| \begin{matrix} A \\ \mathfrak{B}' \end{matrix} \right| \cdot |\mathfrak{A}', B| = |A \cdot \mathfrak{A}'| \cdot |\mathfrak{B}' \cdot B|,$$

$$(a_1 \mathfrak{b}_1 + a_2 \mathfrak{b}_2 + \ldots) \cdot (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots)$$
$$= (a_1 \mathfrak{a}_1 + a_2 \mathfrak{a}_2 + \ldots) \cdot (\mathfrak{b}_1 b_1 + \mathfrak{b}_2 b_2 + \ldots),$$
$$\sum a_i \mathfrak{b}_i a_j b_j = \sum a_j \mathfrak{a}_j \mathfrak{b}_i b_i,$$

woraus wegen der Unbestimmtheit der Elemente von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ die Behauptung folgt.

§ 2. Cayley verwendet eine Verallgemeinerung dieses Satzes, die sich aus ihm durch wiederholte Anwendung ergibt.

Es seien $k \geqq 2$ ganze Zahlen $\varrho_0, \varrho_1, \ldots, \varrho_{k-1}$ gegeben, die sämtlich > 0 sind, ferner eine ganze Zahl $\sigma_0 \geqq \varrho_0$. Wir setzen $\sigma_1 = \varrho_0 + \varrho_1$, $\sigma_2 = \varrho_1 + \varrho_2, \ldots, \sigma_{k-1} = \varrho_{k-2} + \varrho_{k-1}$ und $\sigma_k = \varrho_{k-1}$. Es seien nun Matrizen $\mathsf{A}^{(0)}, \mathsf{A}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(k-1)}$ gegeben, und zwar sei $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ eine Matrix von $\sigma_\varkappa$ Zeilen und $\sigma_{\varkappa+1}$ Spalten, $\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1$. Wenn nun die Matrizengleichungen

$$\mathsf{A}^{(0)} \cdot \mathsf{A}^{(1)} = 0, \ \mathsf{A}^{(1)} \cdot \mathsf{A}^{(2)} = 0, \ \ldots, \ \mathsf{A}^{(k-2)} \cdot \mathsf{A}^{(k-1)} = 0$$

bestehen, so nennen wir $\mathsf{A}^{(0)}, \mathsf{A}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(k-1)}$ eine *Kette korrespondierender Matrizen.*

Wir betrachten nun aus $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ die $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten. Um für sie eine bequeme Bezeichnung zu gewinnen, numerieren wir, wenn zunächst $0 \leqq \varkappa < k-1$ ist, die $\varrho_\varkappa$-gliedrigen Spaltenkombinationen aus $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ irgendwie durch einen laufenden Index $p_{\varkappa+1}$ und die $\varrho_{\varkappa+1}$-gliedrigen Zeilenkombinationen von $\mathsf{A}^{(\varkappa+1)}$ in komplementärer Reihenfolge durch denselben laufenden Index $p_{\varkappa+1}$; ferner numerieren wir durch einen laufenden Index p_0 die ϱ_0-gliedrigen Zeilenkombinationen von $\mathsf{A}^{(0)}$ und setzen $p_k = 1$ entsprechend dem Umstande, daß $\mathsf{A}^{(k-1)}$ nur eine einzige ϱ_{k-1}-gliedrige Spaltenkombination besitzt. Mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .}$ wird die aus der $p_\varkappa$-ten Zeilenkombination bestehende Teilmatrix von $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ bezeichnet, mit $A^{(\varkappa)}_{., p_{\varkappa+1}}$ die aus der $p_{\varkappa+1}$-ten Spaltenkombination bestehende, mit $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$ die den beiden vorigen gemeinsame. Und nun bezeichnen wir mit $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$ die mit einem gewissen Vorzeichen versehene Determinante von $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$, und zwar bei $\varkappa = 0$ mit dem positiven, bei $\varkappa > 0$ aber derart, daß $\Delta^{(\varkappa)}_{1, p_{\varkappa+1}}$, $\Delta^{(\varkappa)}_{2, p_{\varkappa+1}}, \ldots$, die mit den Laplaceschen Vorzeichen versehenen Determinanten von $A^{(\varkappa)}_{., p_{\varkappa+1}}$ sind. Das Vorzeichen hängt also nur von $p_\varkappa$ ab, nicht von $p_{\varkappa+1}$, so daß $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, 1}, \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, 2}, \ldots$ die mit einem gemeinsamen Vorzeichen versehenen Determinanten von $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .}$ sind.

Mit dieser Bezeichnung $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$ lautet nun der von Cayley verwendete Determinantensatz folgendermaßen:

In einer Kette korrespondierender Matrizen gilt für je zwei Indexsysteme mit gemeinsamem Anfangselement $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$ *und* $p_0, p_1', \ldots, p_{k-1}'$ *die Gleichung*:

$$(1) \qquad \Delta^{(0)}_{p_0, p_1} \cdot \Delta^{(1)}_{p_1', p_2'} \cdot \Delta^{(2)}_{p_2, p_3} \cdot \Delta^{(3)}_{p_3', p_4'} \cdots = \Delta^{(0)}_{p_0, p_1'} \cdot \Delta^{(1)}_{p_1, p_2} \cdot \Delta^{(2)}_{p_2', p_3'} \cdot \Delta^{(3)}_{p_3, p_4} \cdots .$$

Dabei läuft beiderseits der obere Index bis $k-1$.

Für $k=2$ ist das der Satz des § 1, angewendet auf $\mathsf{A}^{(0)}_{p_0,\,}$. und $\mathsf{A}^{(1)}$. Um es für $k>2$ zu beweisen, nehmen wir es für kleinere k schon als bekannt an, wenden es auf die Kette $\mathsf{A}^{(1)}, \mathsf{A}^{(2)}, \ldots, \mathsf{A}^{(k-1)}$ und den Anfangsindex p_1 an, multiplizieren beiderseits mit $\Delta^{(0)}_{p_0, p_1'}$ und berücksichtigen den Satz des § 1 für die Matrizen $\mathsf{A}^{(0)}_{p_0,\,}$. und $\mathsf{A}^{(1)}_{\,, p_2'}$.

Durch Anwendung des Satzes auf die Kette $\mathsf{A}^{(\varkappa)}, \mathsf{A}^{(\varkappa+1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(k-1)}$ entsteht noch:

$$(1') \qquad \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \Delta^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}', p_{\varkappa+2}} \Delta^{(\varkappa+2)}_{p_{\varkappa+2}, p_{\varkappa+3}} \cdots = \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}'} \Delta^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}} \Delta^{(\varkappa+2)}_{p_{\varkappa+2}', p_{\varkappa+3}'} \cdots .$$

§ 3. Die Ränge der Matrizen sind wegen $\mathsf{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa+1)} = 0$ an die Bedingung $\text{Rang}\cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)} + \text{Rang}\ \mathsf{A}^{(\varkappa+1)} \leqq \sigma_{\varkappa+1} = \varrho_\varkappa + \varrho_{\varkappa+1}$ gebunden. Wir machen jetzt die *Voraussetzung*:

$$\text{Rang}\ \mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa \quad \text{für} \quad \varkappa > 0,$$

woraus noch $\text{Rang}\ \mathsf{A}^{(0)} \leqq \varrho_0$ folgt.

Ist $\varkappa > 0$ fixiert, so gibt es ein System $p_\varkappa, p_{\varkappa+1}, \ldots, p_{k-1}$, für welches

$$\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \neq 0, \ \Delta^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}} \neq 0, \ \ldots, \ \Delta^{(k-1)}_{p_{k-1}, 1} \neq 0$$

ist; denn man kann $p_\varkappa, p_{\varkappa+1}, \ldots$ und $p_{\varkappa+1}', \ldots$ so wählen, daß in $(1')$ die linke Seite $\neq 0$ ist, und es muß dann auch die rechte Seite $\neq 0$ sein. Wir wollen solche $p_\varkappa, p_{\varkappa+1}, \ldots, p_{k-1}$ ein *für* $\varkappa$ *zulässiges* Indexsystem nennen. Wie man sieht, reicht dazu hin, daß $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \neq 0$, $\Delta^{(\varkappa+2)}_{p_{\varkappa+2}, p_{\varkappa+3}} \neq 0, \ldots$ ist.

Sind nun $\varkappa \geqq 0$ und $p_\varkappa$ fixiert, so hat nach $(1')$ der Quotient

$$(2) \qquad R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} = \frac{\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \cdot \Delta^{(\varkappa+2)}_{p_{\varkappa+2}, p_{\varkappa+3}} \cdots}{\Delta^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}} \cdot \Delta^{(\varkappa+3)}_{p_{\varkappa+3}, p_{\varkappa+4}} \cdots}$$

für alle für $\varkappa+1$ zulässigen Indexsysteme $p_{\varkappa+1}, p_{\varkappa+2}, \ldots$ einen und denselben Wert.

Sind ferner $\varkappa \geqq 0$, $p_\varkappa$ und $p_{\varkappa+1}$ fixiert, so ergibt $(1')$, wenn man unter $p_{\varkappa+2}, p_{\varkappa+3}, \ldots$ ein für $\varkappa+2$ zulässiges und unter $p_{\varkappa+1}', p_{\varkappa+2}', \ldots$ ein für $\varkappa+1$ zulässiges Indexsystem versteht und (2) für $\varkappa$ mit den p und für $\varkappa+1$ mit den p benützt, die Gleichung

$$(3) \qquad \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} = R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} \cdot R^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}}.$$

Hierbei ist zunächst $\varkappa < k-1$ gedacht; für $\varkappa = k-1$ ist die Definition (2) als

$$R_{p_{k-1}}^{(k-1)} = \Delta_{p_{k-1},1}^{(k-1)} \tag{2'}$$

zu verstehen.

Ist $\varkappa > 0$, so sind der Voraussetzung Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ zufolge die Größen $R_1^{(\varkappa)}, R_2^{(\varkappa)}, \ldots$ nicht sämtlich 0, und die für $\varkappa$ zulässigen Indexsysteme $p_\varkappa, p_{\varkappa+1}, \ldots$ sind durch $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)} \neq 0, R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)} \neq 0, \ldots, R_{p_{k-1}}^{(k-1)} \neq 0$ charakterisiert.

Da endlich aus (3) und (2') die Gleichungen (2) zurückfolgen, erhalten wir den Satz:

Wenn unsere Kette von korrespondierenden Matrizen die Voraussetzung Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ *für* $\varkappa > 0$ *erfüllt, so gibt es ein und nur ein System von Größen* $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$, *so daß*

$$\Delta_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} = R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)} \cdot R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)} \tag{3}$$

für $0 \leqq \varkappa < k-1$ *und* $\Delta_{p_{k-1},1}^{(k-1)} = R_{p_{k-1}}^{(k-1)}$ *ist. Und zwar ist dieses System von Größen durch* (2') *und für* $\varkappa < k-1$ *durch* (2) *für irgendein für* $\varkappa+1$ *zulässiges Indexsystem gegeben.*

Durch (3) werden die Gleichungen (1) und (1') in Evidenz gesetzt. $R_1^{(0)}, R_2^{(0)}, \ldots$ sind dann und nur dann sämtlich $= 0$, wenn Rang $\mathsf{A}^{(0)} < \varrho_0$ ist.

Bildet man mit Unbestimmten $\xi_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$, $0 \leqq \varkappa < k$, und $\xi_1^{(k)} = 1$ die Ausdrücke

$$R^{(\varkappa)}(\xi) = \sum_{p_\varkappa} R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)} \cdot \xi_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$$

$$\Delta^{(\varkappa)}(\xi) = \sum_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \Delta_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \cdot \xi_{p_\varkappa}^{(\varkappa)} \xi_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)},$$

so ist

$$\Delta^{(\varkappa)}(\xi) = R^{(\varkappa)}(\xi) \cdot R^{(\varkappa+1)}(\xi), \qquad R^{(\varkappa)}(\xi) = \frac{\Delta^{(\varkappa)}(\xi)\,\Delta^{(\varkappa+2)}(\xi)\ldots}{\Delta^{(\varkappa+1)}(\xi)\,\Delta^{(\varkappa+3)}(\xi)\ldots} \tag{4}$$

für $\varkappa < k-1$ und $\Delta^{(k-1)}(\xi) = R^{(k-1)}(\xi)$.

§ 4. Nunmehr seien die Elemente unserer Matrizen *ganze rationale Funktionen von Parametern* und die Voraussetzungen, daß $\mathsf{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa+1)} = 0$ und für $\varkappa > 0$ Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ ist, für unbestimmte Parameter gemeint.

Es sei $T^{(\varkappa)}$ der größte gemeinsame Teiler der ganzen rationalen Funktionen $\Delta_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}$ der Parameter ($\varkappa$ fest, $p_\varkappa$ und $p_{\varkappa+1}$ laufend); im Falle $\mathrm{Rang}\ \mathsf{A}^{(0)} < \varrho_0$ sei $T^{(0)} = 0$. Es sei ferner $R^{(\varkappa)}$ der größte gemeinsame Teiler der rationalen Funktionen $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ der Parameter ($\varkappa$ fest, $p_\varkappa$ laufend), d. h.

eine solche rationale Funktion, daß die Quotienten $\frac{R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}}{R^{(\varkappa)}}$ ganze rationale Funktionen vom größten gemeinsamen Teiler 1 sind; dabei ist im Falle $\varkappa = 0$ zunächst Rang $\mathsf{A}^{(0)} = \varrho_0$ angenommen, andernfalls sei $R^{(0)} = 0$.

Dann bestehen wegen (3), bei geeigneter Verfügung über die an den größten gemeinsamen Teilern noch willkürlichen konstanten Faktoren, die Gleichungen:

$$T^{(\varkappa)} = R^{(\varkappa)} \cdot R^{(\varkappa+1)} \tag{5}$$

für $\varkappa < k-1$ und $T^{(k-1)} = R^{(k-1)}$; es sind also $R^{(k-1)}$ und die Produkte $R^{(\varkappa)} \cdot R^{(\varkappa+1)}$ für $\varkappa < k-1$ in den Parametern ganz.

Aus diesen Gleichungen folgt nun:

$$R^{(\varkappa)} = \frac{T^{(\varkappa)} \cdot T^{(\varkappa+2)} \dots}{T^{(\varkappa+1)} \cdot T^{(\varkappa+3)} \dots}. \tag{6}$$

Wenn nun speziell unsere Matrizen so beschaffen sind, daß $T^{(1)}, T^{(2)}, \dots, T^{(k-1)}$ sämtlich vom Grade 0 sind, so folgt aus (6), daß $R^{(1)}, R^{(2)}, \dots, R^{(k-1)}$ von 0 verschiedene Konstanten und $R^{(0)}$ eine ganze rationale Funktion der Parameter ist; also sind in diesem Falle auch alle $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ ganze rationale Funktionen der Parameter.

Kapitel II.

Der Lasker-Ostrowskische Satz.

§ 5. Es seien $f_1(x), \dots, f_n(x)$ Formen der Variablen $x_1, \dots, x_m$ von den Graden $s_1, \dots, s_n$, welche wir als > 0 voraussetzen. Die Koeffizienten seien zunächst Unbestimmte, die wir allgemein mit a bezeichnen.

Erteilt man den a bestimmte Werte, so werden $f_1, \dots, f_n$ gegebene Formen, und man kann nach denjenigen Formen von einem vorgeschriebenen Grade s fragen, welche nach dem Modulsystem $f_1, \dots, f_n$ der 0 kongruent sind. Die Anzahl der linearunabhängigen unter ihnen als Funktion von s zu studieren, ist ein schwieriges Problem, welches Hilbert prinzipiell durch seine Kette der abgeleiteten Gleichungssysteme gelöst hat.

Ist aber $n \leqq m$, und werden die a der Beschränkung unterworfen, ein gewisses System von algebraischen Gleichungen nicht zu befriedigen, so kann man nach Lasker und Ostrowski die Hilbertsche Kette explizit angeben. Man kann für diesen Fall den Gegenstand auch unabhängig von der allgemeinen Hilbertschen Theorie darstellen. Dazu entwickeln wir erst einen formalen Apparat.

§ 6. Wir machen zunächst noch keine Voraussetzung über n und m und denken uns den a irgendwelche bestimmte Werte erteilt. Ferner fixieren wir eine Gradzahl s.

Wir bezeichnen mit $L^{(0)}$ jede Form der x vom Grade s und mit $L^{(\varkappa)}$, wo $\varkappa > 0$, jeden Ausdruck von der Gestalt

$$(7) \qquad L^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa}^{1,n} L_{\nu_1,\ldots,\nu_\varkappa} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix},$$

worin die τ neue Unbestimmte bedeuten, $L_{\nu_1,\ldots,\nu_\varkappa}$ aber eine Form der x vom Grade $s - s_{\nu_1} - \cdots - s_{\nu_\varkappa}$. Die $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$ durchlaufen darin alle Systeme ganzer Zahlen, welche den Bedingungen $1 \leqq \nu_1 \leqq n, \ldots, 1 \leqq \nu_\varkappa \leqq n$, $\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa$, $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_\varkappa} \geqq 0$ genügen. Daß es mindestens ein solches Wertsystem $\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa$ geben soll, bedeutet eine Beschränkung für $\varkappa$; wir bezeichnen die zulässigen Werte mit

$$\varkappa = 0,\ 1, \ldots, k$$

und nehmen s so groß an, daß $k \geqq 1$ ist; natürlich ist $k \leqq n$.

Setzt man nun in einem $L^{(\varkappa+1)}$, wo $\varkappa < k$ angenommen, für die letzte Reihe der τ die Formen f ein:

$$\tau_1^{(\varkappa+1)} = f_1(x), \ldots, \tau_n^{(\varkappa+1)} = f_n(x),$$

so wird der entstehende Ausdruck $(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ ein $L^{(\varkappa)}$, und wir bezeichnen die so entstehenden $L^{(\varkappa)}$ mit $F^{(\varkappa)}$; unter $F^{(\varkappa)}$ wird also jeder Ausdruck von der Gestalt $L^{(\varkappa)}$ verstanden, für welchen die Gleichung

$$(8) \qquad F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$$

durch mindestens ein $L^{(\varkappa+1)}$ befriedigt werden kann. Die $F^{(0)}$ sind daher diejenigen Formen der x vom Grade s, welche der Kongruenz

$$(8') \qquad F^{(0)} \equiv 0 \text{ modd. } f_1, \ldots, f_n$$

genügen.

Anderseits bezeichnen wir mit $\Phi^{(\varkappa)}$, wo $\varkappa > 0$ angenommen, alle diejenigen Ausdrücke von der Gestalt $L^{(\varkappa)}$, welche der Gleichung

$$(9) \qquad 0 = (\Phi^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)}=f}$$

genügen. Ist nun, falls $k > 1$ ist, $0 < \varkappa < k$, so kann man gewisse $\Phi^{(\varkappa)}$ sofort angeben: jedes $F^{(\varkappa)}$ nämlich ist zugleich ein $\Phi^{(\varkappa)}$, da

$$(10) \qquad (F^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)}=f} = (L^{(\varkappa+1)})_{\substack{\tau^{(\varkappa)}=f \\ \tau^{(\varkappa+1)}=f}} = 0$$

ist, weil alle Determinanten zwei gleiche Zeilen erhalten. Man kann aber nicht behaupten, daß durch die $F^{(\varkappa)}$ die $\Phi^{(\varkappa)}$ erschöpft werden.

§ 7. Nach (8) sind die Koeffizienten von $F^{(\varkappa)}$ Linearformen der Koeffizienten von $L^{(\varkappa+1)}$. Um das formelmäßig darzustellen, führen wir zu-

nächst für die Koeffizienten der $L^{(\varkappa)}$ Bezeichnungen ein. Wir setzen zunächst für $\varkappa > 0$ in (7) jedes $L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ mit unbestimmten Koeffizienten an und bezeichnen die in allen $L_{\nu_1 \ldots \nu_\varkappa}$ zusammengenommen auftretenden unbestimmten Koeffizienten in irgendeiner festen Numerierung mit

$$l_1^{(\varkappa)}, l_2^{(\varkappa)}, \ldots, l_{\sigma_\varkappa}^{(\varkappa)},$$

für $\varkappa = 0$ ebenso die Koeffizienten von $L^{(0)}$. Hierauf setzen wir

$$L^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda_\varkappa=1}^{\lambda_\varkappa=\sigma_\varkappa} l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \tag{11}$$

mit der Bestimmung, daß die $\mathfrak{p}$ von den Unbestimmten l unabhängig sein sollen; es sind also $\mathfrak{p}_1^{(0)}, \ldots, \mathfrak{p}_{\sigma_0}^{(0)}$ alle Potenzprodukte der x vom Grade s, während für $\varkappa > 0$ jedes $\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ ein Produkt aus einem Potenzprodukt der x und einer Determinante der τ ist. Nun setzen wir, während wir die Koeffizienten a der f als Unbestimmte denken, für $\varkappa < k$:

$$(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f} = \sum_{\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}} \alpha_{\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}(a)\, \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} l_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)} \tag{12}$$

mit der Bestimmung, daß die α von den x, τ und l unabhängig sein sollen, oder anders ausgedrückt:

$$(\mathfrak{p}_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f} = \sum_{\lambda_\varkappa} \alpha_{\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}(a)\, \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}; \tag{12'}$$

es ist also jedes α entweder ein a oder ein $-a$ oder 0. Die Matrix der $\alpha^{(\varkappa)}$ bezeichnen wir mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ oder ausführlicher $\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a)$:

$$\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}^{(\varkappa)}, & \ldots, & \alpha_{1\sigma_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ \cdots & & \\ \alpha_{\sigma_\varkappa 1}^{(\varkappa)}, & \ldots, & \alpha_{\sigma_\varkappa \sigma_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \end{pmatrix} \qquad \varkappa = 0, 1, \ldots, k-1.$$

Erteilen wir nun den a wieder die speziellen Werte, so sind in (8) die Koeffizienten $l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ von $F^{(\varkappa)}$ durch

$$l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} = \sum_{\lambda_{\varkappa+1}} \alpha_{\lambda_\varkappa, \lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} l_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)} \qquad \lambda_\varkappa = 1, \ldots, \sigma_\varkappa$$

gegeben, wenn $l_{\lambda_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}$ die von $L^{(\varkappa+1)}$ sind. Ferner sind die Koeffizienten $l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ der $\Phi^{(\varkappa)}$ durch

$$0 = \sum_{\lambda_\varkappa} \alpha_{\lambda_{\varkappa-1}, \lambda_\varkappa}^{(\varkappa-1)} l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} \qquad \lambda_{\varkappa-1} = 1, \ldots, \sigma_{\varkappa-1}$$

charakterisiert. Der Rang von $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ ist der Rang der aus allen $F^{(\varkappa)}$ bestehenden Formenschar (§§ 18, 27). Der Rang der aus den $F^{(\varkappa)}$ bestehenden Formenschar und der Rang der aus den $\Phi^{(\varkappa+1)}$ bestehenden Formenschar geben die Summe $\sigma_{\varkappa+1}$.

Die Gleichung (10), die auch für unbestimmte a und $l^{(\varkappa+1)}$ gilt, liefert bei Benutzung der Gleichung (12) und der für $\varkappa - 1$ statt $\varkappa$ zu

bildenden Gleichung (12′) die Relationen $\sum_{\lambda_\varkappa} \alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa \lambda_{\varkappa+1}} \alpha^{(\varkappa-1)}_{\lambda_{\varkappa-1} \lambda_\varkappa} = 0$; die Matrizen $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, gebildet bei unbestimmten a, genügen also den Matrizengleichungen:

$$\mathsf{A}^{(\varkappa-1)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)} = 0. \tag{13}$$

Die Anzahlen $\sigma_\varkappa$, d. i. der Rang $\sigma_\varkappa$ der aus allen $L^{(\varkappa)}$ bestehenden Schar, werden in bekannter Weise bestimmt. Aus der Entwicklung

$$\frac{1}{(1-tx_1)\dots(1-tx_m)} = \sum_0^{+\infty} x_1^{\mu_1} \dots x_m^{\mu_m} t^{\mu_1+\dots+\mu_m}$$

ist ersichtlich, daß σ_0 der Koeffizient von t^s bei Entwicklung von $\frac{1}{(1-t)^m}$ nach steigenden Potenzen der Variablen t ist:

$$\sigma_0 = \left[\frac{1}{(1-t)^m}\right]_{t^s} = \binom{s+m-1}{m-1}. \tag{14}$$

Um $\sigma_\varkappa$ für $\varkappa > 0$ zu bestimmen, hat man dies nur für jedes einzelne Glied der Summe (7) anzuwenden und erhält:

$$\sigma_\varkappa = \left[\frac{\Theta_\varkappa}{(1-t)^m}\right]_{t^s}, \tag{14′}$$

wenn $\Theta_1, \dots, \Theta_n$ die elementaren symmetrischen Verbindungen von $t^{s_1}, \dots, t^{s_n}$ bedeuten, so daß identisch in einer Unbestimmten λ

$$1 - \lambda\Theta_1 + \dots + (-1)^n \Theta_n = (1 - \lambda t^{s_1}) \dots (1 - \lambda t^{s_n})$$

wird. Für hinreichend große s wird also $\sigma_\varkappa$, worin $\varkappa \geqq 0$, eine ganze rationale Funktion von s.

§ 8. Das Formensystem $f_1, \dots, f_n$, in welchem den Koeffizienten a bestimmte Werte erteilt sind, wird nach einem Vorschlage von Ostrowski dann als ein *Formensystem von nichtverschwindender Resultante* bezeichnet, wenn *entweder* $n = m$ ist und die in bezug auf $x_1, \dots, x_m$ gebildete Resultante von $f_1, \dots, f_m$ nicht verschwindet *oder* $n < m$ ist und die in bezug auf $x_1, \dots, x_m$ gebildete Resultante von $f_1, \dots, f_n$ und $m - n$ mit unbestimmten Koeffizienten angesetzten Linearformen nicht identisch in diesen Unbestimmten verschwindet[8]). Es ist dann nach Mertens auch jedes Teilsystem von nichtverschwindender Resultante.

Der Lasker-Ostrowskische Satz nun kann mit Hilfe des entwickelten formalen Apparats folgendermaßen formuliert werden:

Bilden $f_1, \dots, f_n$ ein Formensystem von nichtverschwindender Resul-

[8]) Das bedeutet eine Festlegung der Dimension des durch $f_1 = 0, \dots, f_n = 0$ definierten algebraischen Gebildes; doch ist diese Deutung für das Folgende nicht nötig.

tante, so werden für $0 < \varkappa < k$ die $\Phi^{(\varkappa)}$ erschöpfend durch die $F^{(\varkappa)}$ gegeben, und es gibt keine $\Phi^{(k)}$ außer 0.

Von Lasker wurde der auf $\varkappa = 1$ bezügliche Teil des Satzes gegeben: aus

$$0 = L_1 f_1 + \ldots + L_n f_n$$

folgt, wenn $f_1, \ldots, f_n$ von nichtverschwindender Resultante sind,

$$L_1 \tau_1^{(1)} + \ldots + L_n \tau_n^{(1)} = \sum_{\nu_1 < \nu_2}^{1,n} L_{\nu_1 \nu_2} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \tau_{\nu_2}^{(1)} \\ f_{\nu_1} & f_{\nu_2} \end{vmatrix},$$

falls $k \geqq 2$, sonst $L_1 \tau_1^{(1)} + \ldots + L_n \tau_n^{(1)} = 0$; darin liegt insbesondere:

$$L_{\nu_1} \equiv 0 \ (\text{modd } f_1, \ldots, f_n \text{ exklusive } f_{\nu_1}).$$

Wir verweisen auf den von Lasker gegebenen Beweis. Den von Ostrowski herrührenden auf $\varkappa > 1$ bezüglichen Teil des Satzes wollen wir nun auf den Laskerschen Satz zurückführen.

Unter dem auf das Wertepaar $\varkappa$, n bezüglichen Teile des Satzes, wobei $1 \leqq \varkappa \leqq n \leqq m$ angenommen ist, verstehen wir den Satz für diesen Wert $\varkappa$, alle Systeme von n Formen von nichtverschwindender Resultante und je alle diejenigen Gradzahlen s, für welche $k \geqq \varkappa$ ausfällt. Es genügt nun, den Beweis für den auf $\varkappa, n$ bezüglichen Teil, wobei $1 < \varkappa \leqq n \leqq m$ angenommen ist, unter der Voraussetzung zu führen, daß erstens der auf $\varkappa - 1, n - 1$ bezügliche Teil schon bekannt ist, und daß zweitens entweder $n = \varkappa$ ist oder zwar $n > \varkappa$ ist, dann aber der auf $\varkappa, n - 1$ bezügliche Teil schon bekannt ist; denn der Fall $\varkappa = 1$ wird ja jetzt als bekannt angesehen. Nun folgt aus der Annahme

$$0 = (L^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)} = f}$$

durch Aufsuchung von $\tau_1^{(1)}$, falls in (7) überhaupt Glieder mit $\nu_1 = 1$ vorkommen,

$$0 = \sum_{\nu_2 < \ldots < \nu_\varkappa}^{2,n} L_{1 \nu_2 \ldots \nu_\varkappa} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(2)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(2)} \\ \ldots & & \\ f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_\varkappa} \end{vmatrix},$$

worin also nur $f_2, \ldots, f_n$ auftreten. Daraus können wir nach dem auf $\varkappa - 1, n - 1$ bezüglichen Teile des Satzes schließen:

$$\sum_{\nu_2 < \ldots < \nu_\varkappa}^{2,n} L_{1 \nu_2 \ldots \nu_\varkappa} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(2)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(2)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix} = \sum_{\nu_2 < \ldots < \nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L_{1 \nu_2 \ldots \nu_{\varkappa+1}} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(2)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(2)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix},$$

bzw. $= 0$, falls $\varkappa - 1$ hier schon den Maximalwert k' bildet; der letztere

Fall tritt insbesondere immer dann ein, wenn $\varkappa = k$ ist. Als einfache Zusammenfassung mehrerer Gleichungen dieser Art folgt:

$$(15)\quad \sum_{\nu_2<\ldots<\nu_\varkappa}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_\varkappa}\cdot\begin{vmatrix}\tau_1^{(1)} & \tau_{\nu_2}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)}\\ \ldots & & & \\ \tau_1^{(\varkappa)} & \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}\end{vmatrix} = \sum_{\nu_2<\ldots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}}\cdot\begin{vmatrix}\tau_1^{(1)} & \tau_{\nu_2}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)}\\ \ldots & & & \\ \tau_1^{(\varkappa)} & \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}\\ 0 & f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}}\end{vmatrix},$$

bzw. 0. Nun setzen wir [9]):

$$(16)\quad L'^{(\varkappa)} = L^{(\varkappa)} - \sum_{\nu_2<\ldots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}}\cdot\begin{vmatrix}\tau_1^{(1)} & \tau_{\nu_2}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)}\\ \ldots & & & \\ \tau_1^{(\varkappa)} & \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}\\ f_1 & f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}}\end{vmatrix},$$

bzw. $= L^{(\varkappa)}$. Es ist dann einerseits

$$(17)\quad 0 = (L'^{(\varkappa)})_{\tau^{(\varkappa)}=f},$$

anderseits $L'^{(\varkappa)}$ wegen (15) von $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa)}$ unabhängig. Es ist also

$$L'^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_\varkappa}^{2,n} L'_{\nu_1\ldots\nu_\varkappa}\cdot\begin{vmatrix}\tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)}\\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}\end{vmatrix},$$

mithin (17) nur auf $f_2, \ldots, f_n$ bezüglich, vorausgesetzt, daß der Wert $\varkappa$ hier nicht den Maximalwert k'' überschreitet. Andernfalls ist $L'^{(\varkappa)} = 0$ und daher wegen (16) der Beweis erbracht; dies tritt insbesondere immer dann ein, wenn $n = \varkappa$ ist. Ist nun $L'^{(\varkappa)} \neq 0$ und also $n > \varkappa$, so können wir nach dem auf $\varkappa, n-1$ bezüglichen Teile des Satzes schließen:

$$(16')\quad L'^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L_{\nu_1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}}\cdot\begin{vmatrix}\tau_{\nu_1}^{(1)} & \tau_{\nu_2}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)}\\ \ldots & & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}\\ f_{\nu_1} & f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}}\end{vmatrix},$$

und durch Zusammenfassung von (16) und (16'):

$$L^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f},$$

bzw. $= 0$ im Falle $\varkappa = k$, womit der Beweis beendet ist.

§ 9. Nach § 7 geben der Rang der aus den $F^{(\varkappa)}$ bestehenden Formenschar und der Rang der aus den $\Phi^{(\varkappa+1)}$ bestehenden Formenschar die

[9]) Vgl. Lasker, S. 9.

Summe $\sigma_{\varkappa+1}$; dabei ist $0 \leqq \varkappa < k$ angenommen. Bilden nun $f_1, \ldots, f_n$ ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante, so ist nach dem Lasker-Ostrowskischen Satze der Rang der aus den $\Phi^{(\varkappa+1)}$ bestehenden identisch mit dem Range der aus den $F^{(\varkappa+1)}$ bestehenden Schar, wenn $\varkappa+1<k$, hingegen 0, wenn $\varkappa+1=k$. Bezeichnen wir die aus den $F^{(\varkappa)}$ bestehende Schar mit $(F^{(\varkappa)})$, so gilt also für ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante:

$$\text{Rang}\,(F^{(\varkappa)}) + \text{Rang}\,(F^{(\varkappa+1)}) = \sigma_{\varkappa+1} \text{ für } 0 \leqq \varkappa < k-1;\ \text{Rang}\,(F^{(k-1)}) = \sigma_k.$$

Aus diesen Gleichungen folgt aber:

$$\text{Rang}\,(F^{(\varkappa)}) = \sigma_{\varkappa+1} - \sigma_{\varkappa+2} + \ldots + (-1)^{k-1-\varkappa}\sigma_k \quad \text{für} \quad 0 \leqq \varkappa < k.$$

Für alle Wertsysteme der Koeffizienten a also, für welche ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante vorliegt, hat $\text{Rang}\,(F^{(\varkappa)}) = \text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ einen und denselben Wert. Ferner hat der Rang einer Restschar [10] modd $f_1, \ldots, f_n$ von Formen des Grades s den Wert

$$\sigma_0 - \text{Rang}\,(F^{(0)}) = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \ldots + (-1)^k \sigma_k,$$

also auch für alle jene Wertsysteme der a denselben Wert.

Hiernach empfiehlt sich die Einführung folgender *Bezeichnungen*:

$$\varrho_\varkappa = \sigma_{\varkappa+1} - \sigma_{\varkappa+2} + \ldots + (-1)^{k-1-\varkappa}\sigma_k \qquad (0 \leqq \varkappa < k) \tag{18}$$

$$[s] = \sigma_0, \qquad [s; s_1, \ldots, s_n] = \sigma_0 - \sigma_1 + \sigma_2 - \ldots + (-1)^k \sigma_k. \tag{19}$$

Es ist dann:

$$\left\{\begin{array}{rl} [s; s_1, \ldots, s_n] + \varrho_0 & = \sigma_0 \\ \varrho_0 + \varrho_1 & = \sigma_1 \\ \ldots & \\ \varrho_{k-2} + \varrho_{k-1} & = \sigma_{k-1} \\ \varrho_{k-1} & = \sigma_k. \end{array}\right. \tag{20}$$

Bilden nun $f_1, \ldots, f_n$ ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante, so ist $\text{Rang}\,(F^{(\varkappa)}) = \text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$, *und jede Restschar* modd $f_1, \ldots, f_n$ *von Formen des Grades s hat den Rang* $[s; s_1, \ldots, s_n]$.

Es ist $\varrho_\varkappa > 0$; denn für ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante und für $0 \leqq \varkappa < k$ gibt es mindestens ein $F^{(\varkappa)} \not\equiv 0$, da z. B. $(\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}})_{r^{(\varkappa+1)}=f} \not\equiv 0$ ist, weil keine der Formen $f_1, \ldots, f_n$ identisch verschwindet. *Die $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ bilden also, wenn $k>1$, eine Kette korrespondierender Matrizen.* Ferner ist $\varrho_\varkappa$ zugleich der Rang der mit unbestimmten a gebildeten Matrix $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$; denn besäße diese eine nichtverschwindende Determinante

[10] d. h. einer solchen Teilschar $(P^{(0)})$ von $(L^{(0)})$, daß sich jedes $L^{(0)}$ auf eine und nur eine Weise in $L^{(0)} = P^{(0)} + F^{(0)}$ spalten läßt.

$\Delta(a)$ von mehr als $\varrho_\varkappa$ Reihen, so sei $R(a)$ die Resultante von $f_1, \ldots, f_n$ und, falls $n < m$, $m - n$ mit unbestimmten Koeffizienten angesetzten Linearformen, dann wäre das Produkt $\Delta(a) \cdot R(a)$ nicht identisch 0, und man könnte die a so spezialisieren, daß $\Delta(a) \cdot R(a) \neq 0$, und hätte dann ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante mit Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} > \varrho_\varkappa$, was unmöglich ist. *Wir kennen also Rang* $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ *für unbestimmte* a, *wenn, was wir von jetzt an immer annehmen,* $n \leqq m$ *ist.*

Da $\sigma_\varkappa$ durch (14), (14′) gegeben ist, und da $\left[\frac{\Theta_\varkappa}{(1-t)^m}\right]_{t^s}$ für $\varkappa > k$ verschwindet, ist:

$$\varrho_\varkappa = \left[\frac{\Theta_{\varkappa+1} - \Theta_{\varkappa+2} + \ldots + (-1)^{n-1-\varkappa}\Theta_n}{(1-t)^m}\right]_{t^s} \qquad (0 \leqq \varkappa < k) \tag{18′}$$

$$[s] = \left[\frac{1}{(1-t)^m}\right]_{t^s}, \quad [s; s_1, \ldots, s_n] = \left[\frac{(1-t^{s_1})\ldots(1-t^{s_n})}{(1-t)^m}\right]_{t^s}. \tag{19′}$$

Wegen $n \leqq m$ und

$$[s; s_1, \ldots, s_n] = \left[\frac{1-t^{s_1}}{1-t} \cdots \frac{1-t^{s_n}}{1-t} \frac{1}{(1-t)^{m-n}}\right]_{t^s}$$

ist $[s; s_1, \ldots, s_n]$ dann und nur dann $= 0$, wenn

$$n = m \quad \text{und} \quad s > s_1 + \ldots + s_m - m \tag{21}$$

ist. Für ein Modulsystem von nichtverschwindender Resultante sind also dann und nur dann alle Formen des Grades s der 0 kongruent, wenn (21) besteht. In dem sonst von uns ausgeschlossenen Falle $k = 0$ ist nach (19′) $[s; s_1, \ldots, s_n] = [s]$ und behält seine Bedeutung als Rang einer Restschar bei.

§ 10. Wir haben nun eine wichtige Spaltung der Zahl $\varrho_\varkappa$ in positive Summanden vorzunehmen[11]). In (18′) ist der Zähler eine Summe von Gliedern $\pm t^{s_{\nu_1}} \ldots t^{s_{\nu_i}}$, worin $\nu_1 < \ldots < \nu_i$ und $i \geqq \varkappa + 1$; von diesen Gliedern fassen wir je diejenigen zusammen, in denen $\nu_1, \ldots, \nu_{\varkappa+1}$ dieselben Werte haben, und erhalten:

$$\begin{aligned}\varrho_\varkappa = &\sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_{\varkappa+1}}^{1,n-1} \left[t^{s_{\nu_1}} \ldots t^{s_{\nu_{\varkappa+1}}} \frac{(1-t^{s_{\nu_{\varkappa+1}+1}})\ldots(1-t^{s_n})}{(1-t)^m}\right]_{t^s} \\ &+ \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa}^{1,n-1} \left[t^{s_{\nu_1}} \ldots t^{s_{\nu_\varkappa}} t^{s_n} \frac{1}{(1-t)^m}\right]_{t^s} \\ = &\sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_{\varkappa+1}}^{1,n-1} [s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}}; s_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, s_n] \\ &+ \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa}^{1,n-1} [s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_\varkappa} - s_n].\end{aligned} \tag{22}$$

[11]) Die §§ 10 und 11 werden im nächsten Kapitel zum Beweise des Satzes II gebraucht, jedoch nicht zum Beweise des Cayleyschen Satzes I.

Auch hieraus ist die Tatsache $\varrho_\varkappa > 0$ ersichtlich, die wir vorhin aus der Rangbedeutung der $\varrho_\varkappa$ geschlossen hatten.

Aus (22) *folgt nun wegen der Rangbedeutung der einzelnen Glieder eine Normierung des* $L^{(\varkappa+1)}$ *in* (8) *bei vorgeschriebenem* $F^{(\varkappa)}$. Es werde zunächst noch nicht die Voraussetzung gemacht, daß $f_1, \ldots, f_n$ von nichtverschwindender Resultante sind. Wir denken uns für jedes den Bedingungen $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}} \geqq 0$ und $\nu_{\varkappa+1} < n$ genügende System $\nu_1 < \cdots < \nu_{\varkappa+1}$ eine Restschar $\mathfrak{S}_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ modd $f_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, f_n$ von Formen des Grades $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}}$ gewählt. Dann behaupten wir, daß sich jedes $F^{(\varkappa)}$ auf mindestens eine Weise derart in die Gestalt

$$F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{t^{(\varkappa+1)}=f} \tag{8}$$

setzen läßt, daß $L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$, wenn $\nu_{\varkappa+1} < n$, aus $\mathfrak{S}_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ entnommen ist. Es ist nämlich zunächst

$$\begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} & \tau_\nu^{(1)} \\ \ldots & & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} & \tau_\nu^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_1} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}} & f_\nu \\ f_{\nu_1} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}} & f_\nu \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_1} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix} \cdot f_\nu = \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} & \tau_\nu^{(1)} \\ \ldots & & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} & \tau_\nu^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_1} & \ldots & f_{\nu_\varkappa} & f_\nu \end{vmatrix} \cdot f_{\nu_{\varkappa+1}} - \cdots + (-1)^\varkappa \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} & \tau_\nu^{(1)} \\ \ldots & & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} & \tau_\nu^{(\varkappa)} \\ f_{\nu_2} & \ldots & f_{\nu_{\varkappa+1}} & f_\nu \end{vmatrix} \cdot f_{\nu_1}$$

Greifen wir daher ein $L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ mit $\nu_{\varkappa+1} < n$ und einen Index $\nu > \nu_{\varkappa+1}$ heraus und ändern nun $L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ ab durch Addition einer durch f_ν teilbaren Form, so können wir diese Abänderung durch gleichzeitige geeignete Abänderung solcher $L_{\nu_1' \ldots \nu_{\varkappa+1}'}$, in denen $\nu_{\varkappa+1}' = \nu$ ist, so ausgleichen, daß $(L^{(\varkappa+1)})_{t^{(\varkappa+1)}=f}$ ungeändert bleibt; da aber hierbei $\nu_{\varkappa+1}' > \nu_{\varkappa+1}$ ist, so kann man die gestellten Forderungen durch Fortschreiten zu immer größeren $\nu_{\varkappa+1}$ allmählich erfüllen. Das so beschränkte $L^{(\varkappa+1)}$ hängt nun linear von einer gewissen Anzahl von Parametern ab. Machen wir jetzt die Voraussetzung, daß $f_1, \ldots, f_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante ist, so gilt dasselbe von $f_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, f_n$, und wir können den Rang von $\mathfrak{S}_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$ angeben; die Gesamtzahl der Parameter wird dann durch die rechte Seite von (22) gegeben und stimmt daher wegen (22) mit Rang $(F^{(\varkappa)})$ überein, die Normierung ist also eindeutig: *Ist* $f_1, \ldots, f_n$ *von nichtverschwindender Resultante, so läßt sich jedes* $F^{(\varkappa)}$ *auf eine und*

ur eine Weise derart in die Gestalt $(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ *setzen, daß die* $L_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}}$ *nit* $\nu_{\varkappa+1} < n$ *vorgeschriebenen Restscharen* $\mathfrak{S}_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}}$ modd $f_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \dots, f_n$ *ngehören.*

Man kann die Eindeutigkeit der Normierung auch aus dem Laskerschen atze entnehmen und daraus Rang $A^{(\varkappa)} = (22)$ erschließen. Dazu haben wir us dem Laskerschen Satze zu zeigen, daß im Falle eines Formensystems von ichtverschwindender Resultante aus der Annahme, daß $(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f} = 0$ st und jedes $L_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}}$ mit $\nu_{\varkappa+1} < n$ in $\mathfrak{S}_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}}$ liegt, $L^{(\varkappa+1)} = 0$ folgt. Um das Verschwinden eines bestimmten $L_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}}$ zu beweisen, wobei $\varkappa+1 \leqq n$, dürfen wir schon annehmen, daß es kein von 0 verschiedenes $L_{\nu_1' \dots \nu_{\varkappa+1}'}$ mit $\nu_{\varkappa+1}' < \nu_{\varkappa+1}$ gibt. Unter dieser Annahme folgt aus $(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f} = 0$ durch Aufsuchung von $\tau_{\nu_1}^{(1)} \dots \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}$ die Gleichung $\sum_{\nu=\nu_{\varkappa+1}}^{\nu=n} L_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa \nu} f_\nu = 0$ und daraus, da auch $f_{\nu_{\varkappa+1}}, \dots, f_n$ ein System von ichtverschwindender Resultante bildet, nach Lasker $L_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa \nu_{\varkappa+1}} \equiv 0$ modd $f_{\nu_{\varkappa+1}}, \dots, f_n$ exklusive $f_{\nu_{\varkappa+1}}$). Ist nun $\nu_{\varkappa+1} = n$, so besagt das, aß $L_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa \nu_{\varkappa+1}}$ verschwindet. Ist aber $\nu_{\varkappa+1} < n$, so muß $L_{\nu_1 \dots \nu_\varkappa \nu_{\varkappa+1}}$ eshalb verschwinden, weil es nach eben dem Modulsystem, nach welchem iese Kongruenz gilt, auf eine Restschar beschränkt ist.

§ 11. Es ist für unsere Zwecke unerläßlich, diese Überlegungen olgendermaßen zu verallgemeinern.

Es sei eine Zahl h fixiert, $0 \leqq h < n$. In dem Ansatze von $L^{(\varkappa+1)}$ ilge man die Glieder, falls es solche gibt, in denen $\nu_{\varkappa+1} \leqq h$ ist; der ntstehende Ausdruck heiße $L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1} > h}$:

$$L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1} > h} = \sum_{\substack{\nu_1 < \dots < \nu_{\varkappa+1} \\ \nu_{\varkappa+1} > h}}^{1, n} L_{\nu_1 \dots \nu_{\varkappa+1}} \cdot \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \dots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \dots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa+1)} & \dots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)} \end{vmatrix}.$$

etzt man $L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1} > h} = \sum_{\lambda_{\varkappa+1}} l^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}} \mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$, so durchläuft hier $\lambda_{\varkappa+1}$ nur eine ewisse Auswahl aus den Zahlen $1, \dots, \sigma_{\varkappa+1}$; die mit den betreffenden palten gebildete Teilmatrix von $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ heiße $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$. *Waren keine zu tilgenden lieder vorhanden, so ist* $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$ *nicht von* $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ *verschieden; das tritt insbeondere im Falle* $h \leqq \varkappa$ *ein*; z. B. ist $\mathsf{A}_0^{(\varkappa)} = \mathsf{A}^{(\varkappa)}$. Der Rang von $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$ ist er Rang der aus allen $\left(L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1} > h} \right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ bestehenden Schar. Es kann uch sein, daß $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$ keine einzige Spalte enthält, dann verstehen wir unter ang $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$ die Zahl 0.

Wir wollen nun Rang $\mathsf{A}_h^{(\varkappa)}$ *unter der Voraussetzung bestimmen, daß* $_{+1}, \dots, f_n$ *ein Formensystem von nichtverschwindender Resultante bilden,*

während, falls $h > 0$ ist, $f_1, \ldots, f_h$ beliebig gewählt sind. Zunächst kann man, noch ohne die Voraussetzung über die Resultante, dieselbe Reduktion wie im § 10 vornehmen: jeden Ausdruck, der sich überhaupt in die Gestalt $\left(L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1}>h}\right)_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ setzen läßt, kann man auch auf mindestens eine Weise derart in diese Gestalt setzen, daß jedes $L_{\nu_1 \ldots \nu_{\varkappa+1}}$, in welchem $h < \nu_{\varkappa+1} < n$ ist, wofern es solche gibt, einer vorgeschriebenen Restschar mod$d$ $f_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, f_n$ von Formen des Grades $s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}}$ angehört. Macht man jetzt die Voraussetzung, daß $f_{h+1}, \ldots, f_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante bilden, so schließt man aus dem Laskerschen Satze, genau so wie im letzten Absatze des § 10, daß diese Normierung eindeutig ist. *Man hat daher, falls $f_{h+1}, \ldots, f_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante bilden:*

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_h = \sum_{\substack{\nu_1<\ldots<\nu_{\varkappa+1} \\ \nu_{\varkappa+1}>h}}^{1,\,n-1} [s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}};\ s_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, s_n]$$

$$+ \sum_{\nu_1<\ldots<\nu_\varkappa}^{1,\,n-1} [s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_\varkappa} - s_n].$$

Das ist zugleich der Wert von Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_h$ für unbestimmte Koeffizienten a.

Nun ist jedes Glied $[s - s_{\nu_1} - \ldots - s_{\nu_{\varkappa+1}};\ s_{\nu_{\varkappa+1}+1}, \ldots, s_n]$ der ersten Summe, wofern sie überhaupt Glieder besitzt, > 0, weil die Anzahl der Zahlen $\nu_{\varkappa+1}+1, \ldots, n$ kleiner als n, also kleiner als m ist (vgl. § 9 bei (21)). Wenn daher $f_{h+1}, \ldots, f_n$ von nichtverschwindender Resultante sind, so haben wir:

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_h = \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_{h+1} \text{ oder } > \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_{h+1},$$

je nachdem $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_h$ mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{h+1}$ identisch oder nicht ($h < n-1$), und (für $h < n$)

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_h = \varrho_\varkappa \text{ oder } < \varrho_\varkappa,$$

je nachdem $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_h$ mit $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ identisch oder nicht.

Von dem letzteren Falle, daß $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_h$ weniger Spalten als $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ hat, betrachten wir nur den Spezialfall, daß $f_1, \ldots, f_h$ identisch verschwinden. Ist $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$ in $L^{(\varkappa+1)}_{\nu_{\varkappa+1}>h}$ fehlend, also in der τ-Determinante des $\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$ die $\nu_1, \ldots, \nu_{\varkappa+1}$ alle $\leqq h$, so ist $(\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f} = 0$, so daß sich $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ von $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_h$

nur um Spalten unterscheidet, die aus Nullen bestehen, und Rang $A^{(\varkappa)} =$ Rang $A_h^{(\varkappa)}$ ist. Folglich gilt in unserem Spezialfalle: Rang $A^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$.

In dem Falle dagegen, daß $A_h^{(\varkappa)}$ und $A^{(\varkappa)}$ nicht verschieden sind, folgt:

$$\text{Rang } A^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa.$$

Im Falle $h \leqq \varkappa$ sind $A_h^{(\varkappa)}$ und $A^{(\varkappa)}$ nicht verschieden; es gilt also der Satz:

Es sei $n \leqq m$ und $0 \leqq h < k$; man erteile den Koeffizienten a solche Werte, daß $f_{h+1}, \ldots, f_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante bilden; dann ist:

$$\text{Rang } A^{(h)} = \varrho_h, \quad \text{Rang } A^{(h+1)} = \varrho_{h+1}, \quad \ldots, \quad \text{Rang } A^{(k-1)} = \varrho_{k-1}.$$

§ 12. Mit $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$ oder ausführlicher $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}(a)$ bezeichnen wir in der in § 2 auseinandergesetzten Weise die mit gewissen Vorzeichen versehenen $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten aus den in § 7 eingeführten Matrizen $A^{(\varkappa)}$.

Sowohl für unbestimmte a als auch für Wertsysteme a besteht folgende Tatsache. *Für ein Indexpaar $p_\varkappa, p_{\varkappa+1}$ ist die Eigenschaft:*

$$\text{Rang } A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .} = \varrho_\varkappa \quad \textit{und} \quad \text{Rang } A^{(\varkappa)}_{., p_{\varkappa+1}} = \varrho_\varkappa$$

gleichbedeutend mit der Eigenschaft:

$$\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \neq 0.$$

Es handelt sich dabei um eine Tatsache, die überhaupt für die $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten jeder Matrix vom Range $\varrho_\varkappa$ besteht. Wenn nämlich Rang $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .} = \varrho_\varkappa$ ist, so sind die Zeilen von $A^{(\varkappa)}$ von den Zeilen von $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .}$ linearabhängig, und es müßte daher jede Linearabhängigkeit, die zwischen den Spalten von $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$ bestände, auch zwischen den Spalten von $A^{(\varkappa)}_{., p_{\varkappa+1}}$ bestehen.

Sind die a Unbestimmte, so ist für einen Index $p_\varkappa$, wobei $\varkappa > 0$ angenommen ist, die Eigenschaft

$$\text{Rang } A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .} = \varrho_\varkappa$$

gleichbedeutend mit der Eigenschaft

$$\text{Rang } A^{(\varkappa-1)}_{., p_\varkappa} = \varrho_{\varkappa-1}.$$

Für ein Wertsystem der a und einen Index $p_\varkappa$, wobei $\varkappa > 0$ angenommen ist, ist die Eigenschaft:

$f_1, \ldots, f_n$ von nichtverschwindender Resultante und Rang $A^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, .} = \varrho_\varkappa$

gleichbedeutend mit der Eigenschaft:

$f_1, \ldots, f_n$ *von nichtverschwindender Resultante und* Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}_{\ldots p_\varkappa} = \varrho_{\varkappa-1}$.

Denn es gibt solche $p_{\varkappa-1}$ und $p_{\varkappa+1}$, daß Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}_{p_{\varkappa-1}\ldots} = \varrho_{\varkappa-1}$ und Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{\ldots p_{\varkappa+1}} = \varrho_\varkappa$ ist; da nun $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}_{p_{\varkappa-1}\ldots}$ und $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{\ldots p_{\varkappa+1}}$ korrespondierende Matrizen (§ 1) sind, so sind für einen Index $p_\varkappa$ die beiden Eigenschaften $\Delta^{(\varkappa-1)}_{p_{\varkappa-1}, p_\varkappa} \neq 0$ und $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \neq 0$ gleichbedeutend; von diesen ist aber, wie oben gezeigt worden, die erste mit Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}_{\ldots p_\varkappa} = \varrho_{\varkappa-1}$, die zweite mit Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{p_\varkappa \ldots} = \varrho_\varkappa$ gleichbedeutend. — Man könnte übrigens bei dem Beweise den Satz von den korrespondierenden Matrizen vermeiden und statt dessen den Lasker-Ostrowskischen Satz verwenden, was zwar umständlicher ist, aber einen deutlicheren Einblick gewährt.

Kapitel III.

Die Cayleysche Konstruktion der Resultante.

§ 13. *Wir machen jetzt die Voraussetzung*

$$n = m$$

und $n > 1$. Es liegen also n Formen $f_1, \ldots, f_n$ von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ mit unbestimmten Koeffizienten a vor. Die in bezug auf $x_1, \ldots, x_n$ gebildete Resultante von $f_1, \ldots, f_n$ bezeichnen wir mit $R(a)$. Ferner sollen $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$, $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$, $T^{(\varkappa)}$ und $R^{(\varkappa)}$ die durch § 12 und Kapitel I festgelegte Bedeutung haben für die a als die Parameter des § 4.

Für jedes $\varkappa$, $0 \leqq \varkappa < k$, *ist* $T^{(\varkappa)}$, abgesehen von einem willkürlich bleibenden, von den a unabhängigen, von 0 verschiedenen Faktor, *eine Potenz von* $R(a)$. Denn da für jedes der Bedingung $R(a) \neq 0$ genügende Wertsystem der a nach § 9 Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ und daher $T^{(\varkappa)} \neq 0$ ist, muß für jede etwa vorhandene Lösung von $T^{(\varkappa)} = 0$ auch $R(a) = 0$ sein. Folglich ist $T^{(\varkappa)}$ Teiler einer Potenz von $R(a)$ und muß daher, da $R(a)$ in bezug auf den Körper der rationalen Zahlen (übrigens sogar in bezug auf den Körper der komplexen Zahlen) irreduzibel ist, selbst eine Potenz von $R(a)$ sein.

Für $\varkappa > 0$ *ist* $T^{(\varkappa)}$ *vom* 0*-ten Grade.* Wäre nämlich $T^{(\varkappa)}$, abgesehen von einem konstanten Faktor, eine höhere als die 0-te Potenz von $R(a)$, so müßte für jede Lösung von $R(a) = 0$ auch $T^{(\varkappa)} = 0$ und daher Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$ sein. Wählt man aber die a so, daß f_1 identisch verschwindet, dagegen $f_2, \ldots, f_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante bilden, so ist einerseits $R(a) = 0$, anderseits nach dem Satze am Schlusse des § 11 Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$ für $\varkappa > 0$.

Nach (6) sind also *die* $R^{(\varkappa)}$ *und daher auch die* $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ *in den Unbestimmten* a *ganz und für* $\varkappa > 0$ $R^{(\varkappa)}$ *vom Grade* 0.

§ 14. *Wir machen jetzt die weitere Voraussetzung*:

(23) $$s > s_1 + \ldots + s_n - n.$$

Dann ist nach (21) $[s; s_1, \ldots, s_n] = 0$, so daß sich in (20) die erste Gleichung zu $\varrho_0 = \sigma_0$ vereinfacht; der Index p_0 hat also nur den Wert 1, und $R^{(0)}$ ist, von einem konstanten von 0 verschiedenen Faktor abgesehen, mit $R_1^{(0)}$ identisch.

Wir benutzen nun von den Resultaten des § 13 zunächst nur das erste, daß $T^{(\varkappa)}$, abgesehen von einem von 0 verschiedenen konstanten Faktor, eine Potenz von $R(a)$ ist; zum Beweise dafür waren §§ 10 und 11 noch nicht erforderlich. Wir schließen daraus nach (6), daß $R^{(\varkappa)}$, abgesehen von einem konstanten von 0 verschiedenen Faktor, eine Potenz von $R(a)$ mit einem ganzzahligen Exponenten $\gtrless 0$ ist. Das gilt insbesondere für $R^{(0)}$, also auch für die Funktion

(24) $$R_1^{(0)} = \frac{\Delta_{1,p_1}^{(0)} \Delta_{p_2,p_3}^{(2)} \ldots}{\Delta_{p_1,p_2}^{(1)} \Delta_{p_3,p_4}^{(3)} \ldots}.$$

Um in diesem Falle den Exponenten zu bestimmen, brauchen wir nur die Differenz r der Grade von Zähler und Nenner des Quotienten (24) zu berechnen. Nun ist nach (18′)

$$r = \varrho_0 - \varrho_1 + \varrho_2 - \ldots + (-1)^k \varrho_k = \left[\frac{\Theta_1 - 2\Theta_2 + 3\Theta_3 - \ldots + (-1)^{n-1} n \Theta_n}{(1-t)^n}\right]_{t^s},$$

also, wenn man

$$(1 - \lambda t^{s_1}) \ldots (1 - \lambda t^{s_n}) = \vartheta(\lambda) = (1 - \lambda t^{s_\nu}) \vartheta_\nu(\lambda), \quad \frac{d\vartheta(\lambda)}{d\lambda} = \vartheta'(\lambda)$$

setzt,

$$r = \left[\frac{-\vartheta'(1)}{(1-t)^n}\right]_{t^s}.$$

Es ist aber

$$\frac{-\vartheta'(\lambda)}{\vartheta(\lambda)} = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \frac{t^{s_\nu}}{1 - \lambda t^{s_\nu}},$$

und daher

$$r = \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left[\frac{t^{s_\nu} \vartheta_\nu(1)}{(1-t)^n}\right]_{t^s}.$$

Nun ist z. B.

$$t^{s_1} \frac{\vartheta_1(1)}{(1-t)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1-t}$$

$$= \{t^{s_1} \cdot (1 + t + \ldots + t^{s_2 - 1}) \ldots (1 + t + \ldots + t^{s_n - 1})\} \cdot (1 + t + t^2 + \ldots);$$

der Ausdruck $\{\ldots\}$ gibt $s_2 \ldots s_n$ Glieder von der Gestalt t^μ, und da wegen (23) stets $\mu \leqq s$ ist, so gibt jedes dieser Glieder, multipliziert mit $t^{s-\mu}$ aus dem Faktor $1 + t + t^2 \ldots$, einen Beitrag 1 zu dem Koeffizienten von t^s, so daß

$$\left[\frac{t^{s_1}\vartheta_1(1)}{(1-t)^n}\right]_{t^s} = s_2 \ldots s_n$$

ist. Es wird also:

$$r = s_1 \ldots s_n \cdot \left(\frac{1}{s_1} + \ldots + \frac{1}{s_n}\right)$$

und stimmt daher mit dem Grade von $R(a)$ überein. Damit ist bewiesen:

Satz I. *Die Resultante $R(a)$ ist durch*

$$R(a) = c \cdot R_1^{(0)} \tag{25}$$

gegeben, worin c von den Koeffizienten a unabhängig und $R_1^{(0)}$ durch (24) unter Zugrundelegung einer der Bedingung (23) genügenden Gradzahl s definiert ist.

Die Konstante c wird in § 16 bestimmt werden.

Benützen wir aber von den Resultaten des § 13 auch das zweite, daß $T^{(\varkappa)}$ für $\varkappa > 0$ vom Grade 0 ist, dessen Beweis auf den §§ 10 und 11 beruhte, so ist bewiesen:

Satz II. *Genügt die Gradzahl s der Bedingung (23), so ist*

$$\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} = R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} \cdot R^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}} \quad \text{für} \quad \varkappa < k-1, \qquad \Delta^{(k-1)}_{p_{k-1},1} = R^{(k-1)}_{p_{k-1}},$$

worin die $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ Formen der Unbestimmten a sind, und es haben im Falle $\varkappa > 0$ die Formen $R^{(\varkappa)}_1$, $R^{(\varkappa)}_2$, ... den größten gemeinsamen Teiler 1, die Determinanten $\Delta^{(0)}_{1,1}$, $\Delta^{(0)}_{1,2}$, ... haben als größten gemeinsamen Teiler die Resultante $R(a)$.

Daß jede der Determinanten $\Delta^{(0)}_{1,p_1}$ durch $R(a)$ teilbar ist, könnte man auch direkt beweisen: nach (12′) ist

$$\alpha^{(0)}_{1\lambda_1}(a) \cdot \mathfrak{p}^{(0)}_1 + \ldots + \alpha^{(0)}_{\sigma_0\lambda_1}(a) \cdot \mathfrak{p}^{(0)}_{\sigma_0} \equiv 0 \text{ modd. } f_1, \ldots, f_n,$$

die Kongruenz auf die x und die a bezogen; wählt man hierin für λ_1 die ϱ_0 Werte der p_1-ten Spaltenkombination von $\mathrm{A}^{(0)}$ und bedenkt, daß $\sigma_0 = \varrho_0$ ist, so folgt die auf die x und die a bezogene Kongruenz

$$\Delta^{(0)}_{1,p_1} \cdot \mathfrak{p}^{(0)}_{\lambda_0} \equiv 0 \text{ modd. } f_1, \ldots, f_n,$$

und hieraus nach dem Mertensschen Fundamentalsatze der Resultantentheorie die Teilbarkeit von $\Delta^{(0)}_{1,p_1}$ durch $R(a)$.[12])

[12]) Man könnte auch so schließen: Ist für ein Wertsystem der a Rang $\mathrm{A}^{(0)} = \sigma_0$, so ist insbesondere jede der Potenzen $x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}$ nach dem Modulsystem $f_1, \ldots, f_n$

Als Folgerung aus den gewonnenen Resultaten merken wir noch an, daß *unter der Voraussetzung* (23) *für ein Wertsystem der a stets gilt*:

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(0)} = \varrho_0 \text{ oder } < \varrho_0, \text{ je nachdem } R(a) \neq 0 \text{ oder } = 0.$$

Für den kleinsten (23) genügenden Wert $s = s_1 + \ldots + s_n - n + 1$ ist die Zahl k kleiner als n.

§ 15. Um die Bestimmung der Konstanten c in (25) vorzubereiten, beweisen wir den folgenden Satz. *Wir betrachten das spezielle Formensystem*:

$$\varphi_1 = x_1^{s_1}, \ldots, \varphi_n = x_n^{s_n}$$

und eine Gradzahl s, für welche die für dieses Formensystem nach § 6 zu erklärende Zahl $k \geqq 1$ ausfällt. Unter den $F^{(\varkappa)}$ verstehen wir jetzt für $0 \leqq \varkappa < k$ die Ausdrücke von der Gestalt

$$F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=\varphi}. \tag{8''}$$

Wenn $F^{(\varkappa)}$ ganzzahlige Koeffizienten hat, so hat die Gleichung (8″) *eine Lösung $L^{(\varkappa+1)}$ mit ganzzahligen Koeffizienten.*

Der Satz ist zunächst für $\varkappa = 0$ trivial. Denn die

$$F^{(0)} = L_1 \varphi_1 + \ldots + L_n \varphi_n$$

sind diejenigen Formen vom Grade s, in denen jedes Glied durch wenigstens eine der Potenzen $\varphi_\nu = x_\nu^{s_\nu}$ teilbar ist, und man kann die L_ν so wählen, daß ihre Koeffizienten teils Koeffizienten von $F^{(0)}$ selbst, teils Nullen sind.

Unter dem auf das Wertepaar $\varkappa, n$ bezüglichen Teile des Satzes, wobei $0 \leqq \varkappa < n$ angenommen ist, verstehen wir den Satz für diese $\varkappa$ und n, beliebige $s_1, \ldots, s_n$ und alle diejenigen s, für welche $k > \varkappa$ ausfällt. Es genügt nun, den Beweis des auf $\varkappa, n$ bezüglichen Teiles, wobei $0 < \varkappa < n$ angenommen ist, unter der Voraussetzung zu führen, daß erstens der auf $\varkappa - 1, n - 1$ bezügliche Teil schon bekannt ist, und daß weitens entweder $n = \varkappa + 1$ ist oder zwar $n > \varkappa + 1$ ist, dann aber der auf $\varkappa, n - 1$ bezügliche Teil schon bekannt ist; denn der Fall $\varkappa = 0$ ist schon bekannt. Es habe also $L^{(\varkappa)}$ ganzzahlige Koeffizienten und sei in der Gestalt

$$L^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=\varphi}$$

---

der 0 kongruent, das Gleichungssystem $f_1 = 0, \ldots, f_n = 0$ hat also keine Lösung außer $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$, und es ist daher $R(a) \neq 0$; für jede Lösung von $R(a) = 0$ ist daher Rang $\mathsf{A}^{(0)} < \sigma_0$ und also $\Delta_{1,p_1}^{(0)} = 0$; hieraus folgt aber, da $R(a)$ irreduzibel ist, die Teilbarkeit von $\Delta_{1,p_1}^{(0)}$ durch $R(a)$.

dargestellt. Durch Aufsuchung von $\tau_1^{(1)}$ folgt, falls in (7) überhaupt Glieder mit $\nu_1 = 1$ vorkommen:

$$(26)\quad \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_\varkappa}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_\varkappa} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(2)} \ldots \tau_{\nu_\varkappa}^{(2)} \\ \ldots \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix} = \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(2)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(2)} \\ \ldots \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ \varphi_{\nu_2} \ldots \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix}.$$

Durch Aufsuchung der einzelnen Potenzen von x_1 erhält man eine Reihe von Gleichungen, in denen nur $x_2, \ldots, x_n$ und $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$ auftreten; indem wir auf jede von ihnen den auf $\varkappa - 1$, $n - 1$ bezüglichen Teil des zu beweisenden Satzes anwenden, können wir (26) durch eine neue Gleichung ersetzen, in der rechts statt der $L_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}}$ Formen $\hat{L}_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}}$ mit ganzzahligen Koeffizienten auftreten. Als einfache Zusammenfassung mehrerer Gleichungen dieser Art folgt:

$$(27)\quad \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_\varkappa}^{2,n} L_{1\nu_2\ldots\nu_\varkappa} \begin{vmatrix} \tau_1^{(1)} \tau_{\nu_2}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \ldots \\ \tau_1^{(\varkappa)} \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix} = \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} \hat{L}_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_1^{(1)} \tau_{\nu_2}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \ldots \\ \tau_1^{(\varkappa)} \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ 0 \quad \varphi_{\nu_2} \ldots \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix}.$$

Setzen wir nun:

$$(28)\quad L'^{(\varkappa)} = L^{(\varkappa)} - \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} \hat{L}_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_1^{(1)} \tau_{\nu_2}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \ldots \\ \tau_1^{(\varkappa)} \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ \varphi_1 \quad \varphi_{\nu_2} \ldots \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix},$$

bzw., wenn (26) nicht existiert, $L'^{(\varkappa)} = L^{(\varkappa)}$, so hat $L'^{(\varkappa)}$ einerseits ganzzahlige Koeffizienten und ist in der Gestalt $(L'^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=\varphi}$ darstellbar; anderseits ist $L'^{(\varkappa)}$ wegen (27) von $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa)}$ unabhängig. Wir setzen, indem wir in $L'^{(\varkappa+1)}$ die Glieder mit $\nu_1 = 1$ von denen mit $\nu_1 > 1$ trennen:

$$L'^{(\varkappa)} = \Sigma_1 + \Sigma_2,$$

$$\Sigma_1 = \sum_{\nu_2<\cdots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L'_{1\nu_2\ldots\nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_1^{(1)} \tau_{\nu_2}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \ldots \\ \tau_1^{(\varkappa)} \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ \varphi_1 \quad \varphi_{\nu_2} \ldots \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix},$$

$$\Sigma_2 = \sum_{\nu_1<\cdots<\nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L'_{\nu_1\ldots\nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \ldots \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} \ldots \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \\ \varphi_{\nu_1} \ldots \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix},$$

bzw. Σ_1 oder Σ_2 oder beide $= 0$; im Falle $n = \varkappa + 1$ ist gewiß $\Sigma_2 = 0$. Da nun $L'^{(\varkappa)}$ von $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa)}$ unabhängig ist, so ist einerseits

$$(29) \qquad \Sigma_1 = (-1)^{\varkappa} \varphi_1 \sum_{\nu_2 < \cdots < \nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L'_{1\nu_2 \ldots \nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \end{vmatrix},$$

anderseits

$$0 = \sum_{\nu_2 < \cdots < \nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L'_{1\nu_2 \ldots \nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \varphi_{\nu_2} & \cdots & \varphi_{\nu_{\varkappa+1}} \end{vmatrix}.$$

Aus der letzten Gleichung folgt aber nach dem Lasker-Ostrowskischen Satze:

$$\sum_{\nu_2 < \cdots < \nu_{\varkappa+1}}^{2,n} L'_{1\nu_2 \ldots \nu_{\varkappa+1}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+2}}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)} \end{vmatrix} = \sum_{\nu_2 < \cdots < \nu_{\varkappa+2}}^{2,n} L''_{1\nu_2 \ldots \nu_{\varkappa+2}} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_2}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+2}}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \tau_{\nu_2}^{(\varkappa)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+2}}^{(\varkappa)} \\ \varphi_{\nu_2} & \cdots & \varphi_{\nu_{\varkappa+2}} \end{vmatrix},$$

bzw. $= 0$, wobei letzteres gewiß im Falle $n = \varkappa + 1$ eintritt. Indem wir dies in (29) eintragen, sehen wir, daß im Falle $n = \varkappa + 1$ $L'^{(\varkappa)} = 0$, im Falle $n > \varkappa + 1$ aber $L'^{(\varkappa)}$ entweder $= 0$ oder derart als

$$(30) \qquad L'^{(\varkappa)} = (L''^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)} = \varphi}$$

darstellbar ist, daß $L''^{(\varkappa+1)}$ von $\tau_1^{(1)}, \ldots, \tau_1^{(\varkappa)}, \tau_1^{(\varkappa+1)}$ unabhängig und daher in (30) nur von $\tau_2^{(\varkappa+1)} = \varphi_2, \ldots, \tau_n^{(\varkappa+1)} = \varphi_n$ die Rede ist. Vergleicht man im Falle $n > \varkappa + 1$ in (30) die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von x_1 und wendet auf jede der so entstehenden Gleichungen den auf $\varkappa$, $n - 1$ bezüglichen Teil des zu beweisenden Satzes an, so entsteht eine Darstellung

$$L'^{(\varkappa)} = (\hat{L}''^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)} = \varphi},$$

bzw. $= 0$, wobei $\hat{L}''^{(\varkappa+1)}$ ganzzahlige Koeffizienten hat, und durch Eintragung in (28) die gewünschte Darstellung

$$L^{(\varkappa)} = (\hat{L}^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)} = \varphi},$$

worin $\hat{L}^{(\varkappa+1)}$ ganzzahlige Koeffizienten hat.

§ 16. Es gilt nun bekanntlich der folgende zahlentheoretische Hilfssatz: sind in der linearen Substitution

$$z_1 = \alpha_{11} y_1 + \ldots + \alpha_{1\sigma} y_\sigma$$
$$\cdots$$
$$z_\tau = \alpha_{\tau 1} y_1 + \ldots + \alpha_{\tau\sigma} y_\sigma$$

die Koeffizienten α ganze Zahlen, hat ihre Matrix den Rang $\varrho > 0$, und ist δ der größte gemeinsame Teiler der ϱ-reihigen Determinanten, so ist dafür, daß für jedes ganzzahlige Wertsystem $z_1, \ldots, z_\tau$, für welches überhaupt eine Lösung $y_1, \ldots, y_\sigma$ existiert, auch eine ganzzahlige Lösung $y_1, \ldots, y_\sigma$ existiert, notwendig und hinreichend, daß $\delta = 1$ ist. Denn führt man statt $y_1, \ldots, y_\sigma$ durch ganzzahlige unimodulare lineare Transformation $y_1', \ldots, y_\sigma'$ und statt $z_1, \ldots, z_\tau$ durch ganzzahlige unimodulare lineare Transformation $z_1', \ldots, z_\tau'$ ein, so kann man diese Transformationen so wählen, daß unsere lineare Substitution durch

$$z_1' = e_1 y_1', \ldots, z_\varrho' = e_\varrho y_\varrho', \qquad z_{\varrho+1}' = 0, \ldots, z_n' = 0$$

dargestellt wird, worin $e_1, \ldots, e_\varrho$ ganze positive Zahlen bedeuten, und es ist dann $e_1 \ldots e_\varrho = \delta$. Damit nun jedes ganzzahlige System $z_1', \ldots, z_\varrho'$ ganzzahlige $y_1', \ldots, y_\varrho'$ liefert, ist notwendig und hinreichend, daß $e_1 = 1, \ldots, e_\varrho = 1$ ist.

Da nun in (8″) § 15 die Koeffizienten von $F^{(\varkappa)}$ aus denen von $L^{(\varkappa+1)}$ nach § 7 durch eine lineare Substitution mit der Matrix $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ entstehen, gebildet für das spezielle Wertsystem der a, für welches $f_1, \ldots, f_n$ die Formen $\varphi_1 = x_1^{s_1}, \ldots, \varphi_n = x_n^{s_n}$ ergeben, so können wir aus dem Satze des § 15 schließen, daß für dieses Wertsystem der a die $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten aus $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ den zahlentheoretischen größten gemeinsamen Teiler 1 haben.

Nun sind bei unbestimmten a die $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ Formen der a. Man kann daher die in § 3 erklärten $R^{(\varkappa)}(\xi)$ für jedes spezielle Wertsystem der a bilden. Für dasjenige Wertsystem aber, welches den Formen $x_1^{s_1}, \ldots, x_n^{s_n}$ entspricht, ist $\Delta^{(\varkappa)}(\xi)$ nach dem eben Bewiesenen eine primitive Form der ξ, d. h. ihre Koeffizienten sind ganze Zahlen vom größten gemeinsamen Teiler 1. Daraus folgt wegen der zweiten Gleichung (4) nach bekannten Sätzen über primitive Formen, daß für unser spezielles Wertsystem der a auch $R^{(\varkappa)}(\xi)$ eine primitive Form der ξ wird. Unter der Annahme (23) ist für $\varkappa = 0$ $R^{(0)}(\xi) = R_1^{(0)} \cdot \xi_1^{(0)}$, und wir erkennen also, daß $R_1^{(0)}$ für unser spezielles Wertsystem der a einen der Werte 1 und -1 annimmt. Da aber zugleich $R(a)$ den Wert 1 annimmt, *so ist in* (25):

$$c = \pm 1.$$

§ 17. Bilden wir wieder unter den Voraussetzungen $n = m$, $s > s_1 + \ldots + s_n - n$ die Matrizen $\mathsf{A}^{(0)}, \mathsf{A}^{(1)}, \ldots, \mathsf{A}^{(k-1)}$, so sind, sei es für Unbestimmte a, sei es für spezielle Wertsysteme der a, die Determinanten $\Delta_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa)}$ bezüglich ihres Verschwindens in gewisser Weise aneinander und an die Resultante $R(a)$ gebunden. Das erhellt aus den Gleichungen

$$\Delta^{(0)}_{1,\,p_1} = R^{(0)}_1 \cdot R^{(1)}_{p_1}, \qquad \Delta^{(1)}_{p_1,\,p_2} = R^{(1)}_{p_1} \cdot R^{(2)}_{p_2}, \qquad \Delta^{(2)}_{p_2,\,p_3} = R^{(2)}_{p_2} \cdot R^{(3)}_{p_3}, \quad \ldots,$$

$\Delta^{(k-1)}_{p_{k-1},\,1} = R^{(k-1)}_{p_{k-1}}$, worin $R^{(0)}_1 = \pm R(a)$ und $R^{(1)}_{p_1}, R^{(2)}_{p_2}, \ldots$ Formen der a sind.

a) Bildet das Wertsystem a eine Lösung des Gleichungssystems

$$R^{(\varkappa)}_1 = 0, \quad R^{(\varkappa)}_2 = 0, \quad \ldots,$$

wobei $\varkappa > 0$ angenommen ist, so ist

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa \quad \text{und} \quad \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} < \varrho_{\varkappa-1}.$$

Da aber Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$ nur im Falle $R(a) = 0$ möglich ist, so *müssen für Unbestimmte a Kongruenzen*

$$[R(a)]^{e_\varkappa} \equiv 0 \text{ modd. } R^{(\varkappa)}_1, R^{(\varkappa)}_2, \ldots$$

in bezug auf die a bestehen. Im Falle $R(a) \neq 0$ sind $R^{(\varkappa)}_1, R^{(\varkappa)}_2, \ldots$ nicht alle $= 0$.

b) Damit für ein Wertsystem a

$$\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$$

ist, wobei $0 < \varkappa < k-1$ angenommen ist, ist notwendig und hinreichend, daß

$R^{(\varkappa)}_1, R^{(\varkappa)}_2, \ldots$ nicht alle $= 0$ und $R^{(\varkappa+1)}_1, R^{(\varkappa+1)}_2, \ldots$ nicht alle $= 0$ sind.

Daraus ergibt sich aber nach dem unter a) Bemerkten:

Wenn Rang $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)} = \varrho_{\varkappa-1}$ *und Rang* $\mathsf{A}^{(\varkappa+1)} = \varrho_{\varkappa+1}$ *ist, so ist auch Rang* $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$.

Für $\varkappa = 0$ und $\varkappa = k-1$ dagegen hat man: für Rang $\mathsf{A}^{(0)} = \varrho_0$ ist, wie schon am Schlusse des § 14 bemerkt wurde, notwendig und hinreichend, daß $R^{(0)}_1 \neq 0$, d. h. $R(a) \neq 0$, ist (und es sind dann auch $R^{(1)}_1, R^{(1)}_2, \ldots$ nicht alle $= 0$); für Rang $\mathsf{A}^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$ ist notwendig und hinreichend, daß $R^{(k-1)}_1, R^{(k-1)}_2, \ldots$ nicht alle $= 0$ sind; *wenn Rang* $\mathsf{A}^{(k-2)} = \varrho_{k-2}$ *ist, so ist auch Rang* $\mathsf{A}^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$.

c) Die beiden allgemeineren Sätze des § 12 kann man in unserem Spezialfalle $n = m$, $s > s_1 + \ldots + s_n - n$ mittels der Formen $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ verifizieren. Zugleich erkennt man, *daß die dort als gleichbedeutend erkannten Eigenschaften*

$$R(a) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)}_{p_\varkappa,\,\cdot} = \varrho_\varkappa$$

und

$$R(a) \neq 0 \quad \textit{und} \quad \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)}_{\cdot,\,p_\varkappa} = \varrho_{\varkappa-1}$$

weiter gleichbedeutend sind mit der Eigenschaft:

$$R(a) \neq 0 \quad \textit{und} \quad R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa} \neq 0.$$

Will man den Cayleyschen Ansatz heuristisch verstehen, so muß man die Formen $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ vermeiden und an § 12 anknüpfen. Wir verstehen für $\varkappa > 0$ unter $\mathfrak{M}_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}$ die Menge derjenigen Wertsysteme der a, für welche

$$R(a) \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Rang } A_{p_\varkappa,.}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$$

ist. Mit $\mathfrak{M}_1^{(0)}$ bezeichnen wir die Menge der Lösungen von $R(a) = 0$. Dann kann nach § 12 die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}_1^{(0)}$ und $\mathfrak{M}_{p_1}^{(1)}$ durch $\Delta_{1,p_1}^{(0)} = 0$ charakterisiert werden; die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}_{p_1}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}_{p_2}^{(2)}$ durch $R(a) \neq 0$, $\Delta_{p_1,p_2}^{(1)} = 0$; die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}_{p_2}^{(2)}$ und $\mathfrak{M}_{p_3}^{(3)}$ durch $R(a) \neq 0$, $\Delta_{p_2,p_3}^{(2)} = 0$; usw.; die Menge $\mathfrak{M}_{p_{k-1}}^{(k-1)}$ durch $R(a) \neq 0$, $\Delta_{p_{k-1},1}^{(k-1)} = 0$.

Kapitel IV.

Referat über einige Gegenstände der linearen Algebra.

§ 18. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von Wertsystemen (x), d. h. $(x_1, \ldots, x_n)$, von n Variablen heißt eine Schar, wenn jedes von endlich vielen Elementen von $\mathfrak{S}$ linearabhängige Wertsystem ebenfalls zu $\mathfrak{S}$ gehört; unter dem Range ϱ von $\mathfrak{S}$ wird die kleinste nichtnegative Zahl verstanden, für welche je $\varrho + 1$ Elemente von $\mathfrak{S}$ linearabhängig sind. Wenn zur Bezeichnung der Wertsysteme einer bestimmten Schar $\mathfrak{S}$ ein bestimmter Buchstabe $(\mathfrak{x})$ festgelegt ist, werden wir auch $\mathfrak{S}$ selbst als die Schar $(\mathfrak{x})$ bezeichnen.

Ist $S = (s_{\nu i})$ eine Matrix von n Zeilen und m Spalten, so bilden diejenigen Wertsysteme $(\mathfrak{x})$, für welche das Gleichungssystem

$$(\mathfrak{x}) = S(\lambda), \quad \text{d. h.} \quad \mathfrak{x}_\nu = s_{\nu 1}\lambda_1 + \ldots + s_{\nu m}\lambda_m \qquad (\nu = 1, \ldots, n),$$

mindestens eine Lösung $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ besitzt, eine Schar $\mathfrak{S}$; sie heißt die durch S erzeugte Schar, ihre $(\mathfrak{x})$ die durch S erzeugbaren Wertsysteme. Dabei ist Rang $\mathfrak{S}$ = Rang S. Jede Schar $\mathfrak{S}$ läßt sich durch Matrizen S erzeugen. Ist m = Rang $\mathfrak{S}$, so heißen die Spalten von S eine Basis von $\mathfrak{S}$; dabei ist Rang $\mathfrak{S} > 0$ angenommen.

Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Teilscharen der Schar $\mathfrak{S}$, so heißen $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ komplementär in $\mathfrak{S}$, wenn sich jedes Wertsystem $(\mathfrak{x})$ von $\mathfrak{S}$ auf eine und nur eine Weise in die Summe eines Wertsystems $(\mathfrak{x}')$ von $\mathfrak{S}_1$ und eines Wertsystems $(\mathfrak{x}'')$ von $\mathfrak{S}_2$ spalten läßt, $\mathfrak{x}_1 = \mathfrak{x}_1' + \mathfrak{x}_1''$, $\ldots$, $\mathfrak{x}_n = \mathfrak{x}_n' + \mathfrak{x}_n''$. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ nur das Wertsystem (0), d. h. $(0, \ldots, 0)$, gemein haben und ihre Rangsumme gleich dem Range von $\mathfrak{S}$ ist. Komplementär schlechtweg heißt komplementär in der Schar X vom Range n.

§ 19. Zwei Wertsysteme (x) und (u) heißen orthogonal oder dual, $(x) \perp (u)$, wenn $x_1 u_1 + \ldots + x_n u_n = 0$ ist. Damit bei den durch Matrizen erzeugten Scharen $(\mathfrak{x}) = S(\lambda)$, $(\mathfrak{u}) = T(\mu)$ jedes $(\mathfrak{x})$ zu jedem $(\mathfrak{u})$ dual

st, ist notwendig und hinreichend $S' \cdot T = 0$, worin S' die zu S transponierte nd 0 eine Nullmatrix bedeutet.

Sind $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ Scharen, so wird mit

$$\mathfrak{S}_{1 \perp \mathfrak{S}_2}$$

ie Schar derjenigen Wertsysteme bezeichnet, welche zu $\mathfrak{S}_1$ gehören und u allen Wertsystemen von $\mathfrak{S}_2$ dual sind.

Ist $\mathfrak{S}_1$ Teilschar der Schar $\mathfrak{S}$, so heißt $\mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_1}$ die *Orthogonalschar der Dualschar zu* $\mathfrak{S}_1$ *innerhalb* $\mathfrak{S}$; es ist Rang $\mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_1} \geqq$ Rang $\mathfrak{S}$ − Rang $\mathfrak{S}_1$. st $\mathfrak{S}_1$ eine Schar, so heißt $X_{\perp \mathfrak{S}_1}$ ihre Dualschar schlechtweg; es ist Rang $X_{\perp \mathfrak{S}_1} = n$ − Rang $\mathfrak{S}_1$; wird also $X_{\perp \mathfrak{S}_1} = \mathfrak{S}_2$ gesetzt, so ist $X_{\perp \mathfrak{S}_2} = \mathfrak{S}_1$, nd es gilt also das *Dualitätsprinzip*, daß Dualscharen schlechtweg sich egenseitig bestimmen; doch brauchen sie nicht komplementär zu sein, ondern können Wertsysteme außer (0) gemein haben.

Eine Schar $\mathfrak{S}$, deren Rang > 0 ist, heißt eine *Normalschar*, wenn $\mathfrak{S}$ nd $X_{\perp \mathfrak{S}}$ komplementär sind, d. h. kein von (0) verschiedenes Element on $\mathfrak{S}$ zu allen Elementen von $\mathfrak{S}$ orthogonal ist. Für Normalscharen beteht der Satz: *Ist* $\mathfrak{S}$ *Normalschar und* $\mathfrak{S}_1$ *Teilschar von* $\mathfrak{S}$, *so ist*

$$\text{Rang } \mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_1} = \text{Rang } \mathfrak{S} - \text{Rang } \mathfrak{S}_1;$$

enn $\mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_1}$ und $X_{\perp \mathfrak{S}}$ sind komplementär in $X_{\perp \mathfrak{S}_1}$. Ist daher $\mathfrak{S}$ Normalchar, $\mathfrak{S}_1$ Teilschar von $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_1} = \mathfrak{S}_2$, so ist $\mathfrak{S}_{\perp \mathfrak{S}_2} = \mathfrak{S}_1$; *in Normalcharen gilt also das Dualitätsprinzip.* Sind zwei Scharen in einer Normalchar $\mathfrak{S}$ komplementär, so sind ihre innerhalb $\mathfrak{S}$ gebildeten Dualscharen benfalls in $\mathfrak{S}$ komplementär; denn ihre Rangsumme ist dem Range von $\mathfrak{S}$ gleich, und ein ihnen gemeinsames Wertsystem muß zu allen Wertystemen von $\mathfrak{S}$ orthogonal und daher nach dem Begriff der Normalchar (0) sein.

Die Normalscharen sind dadurch charakterisiert, daß sie normierte Orthogonalbasen besitzen, d. h. Basen, welche, als Spalten einer Matrix S enommen, der Gleichung $S' \cdot S = \mathsf{E}$ genügen, unter E die ϱ-reihige Einheitsmatrix verstanden, wenn ϱ der Rang der Schar ist. Denn ist erstens ür die Schar $\mathfrak{S}$ eine normierte Orthogonalbasis vorhanden und $(s_{.1})\lambda_1 + \ldots + (s_{.\varrho})\lambda_\varrho$ ein den Scharen $\mathfrak{S}$ und $X_{\perp \mathfrak{S}}$ gemeinsames Wertsystem, so ist s zu $(s_{.i})$ orthogonal, also $\lambda_i = 0$, d. h. $\mathfrak{S}$ und $X_{\perp \mathfrak{S}}$ haben nur (0) gemein. Ist zweitens $\mathfrak{S}$ Normalschar, so kann jedes Wertsystem (x) auf ine und nur eine Weise in die Summe eines Wertsystems $(\mathfrak{x})$ aus $\mathfrak{S}$ nd eines Wertsystems aus $X_{\perp \mathfrak{S}}$ gespalten werden; setzt man nun

$$(\mathfrak{x}) = K(x),$$

so ist dadurch eine ganz bestimmte Matrix K von n Zeilen und n Spalten definiert. Diese Matrix hat wegen $K(\mathfrak{x}) = (\mathfrak{x})$ die Eigenschaft

$$K^2 = K.$$

Da ferner $(x) - (\mathfrak{x})$ zu $X_{\perp \mathfrak{S}}$ gehört, so ist $K' \cdot (\mathsf{E} - K) = 0$ und $(\mathsf{E} - K') \cdot K = 0$, worin E die n-reihige Einheitsmatrix bedeutet, also $K' = K'K$ und $K = K'K$, die Matrix hat also auch die Eigenschaft

$$K' = K.$$

Aus den beiden Eigenschaften $K' = K$, $K^2 = K$ aber (in Hilbertscher Terminologie, Integralgleichungen IV: K Matrix einer quadratischen Einzelform) folgt die Existenz einer Matrix S von n Zeilen und ϱ Spalten, so daß

$$K = S \cdot S'$$

ist, und für jede solche das Bestehen der Gleichung

$$\mathsf{E} = S' \cdot S,$$

worin E die ϱ-reihige Einheitsmatrix bedeutet. Wählt man zu der durch $\mathfrak{S}$ völlig bestimmten Matrix K diese Matrix S auf alle möglichen Arten, so erhält man in ihren Spalten alle normierten Orthogonalbasen von $\mathfrak{S}$.[13])

§ 20. Wir betrachten Wertsysteme von n Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und Wertsysteme von m Variablen $y_1, \ldots, y_m$. Ist nun A eine Matrix von m Zeilen und n Spalten, so bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a})$ die Schar der durch A erzeugbaren Wertsysteme $(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m)$ und mit (α) die Schar der Nullösungen von A, d. h. der Lösungen $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ des Gleichungssystems $(0) = A(\alpha)$:

$$(\mathfrak{a}) = A(x), \qquad (0) = A(\alpha).$$

Dann ist Rang $(\mathfrak{a})$ + Rang $(\alpha) = n$, da Rang $(\mathfrak{a})$ = Rang A, Rang $(\alpha) = n$ − Rang A ist.

Ist nun eine Schar (x^*) von Wertsystemen $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ gegeben, so bezeichnen wir mit $(\mathfrak{a}^*)$ die durch A aus (x^*) erzeugte Schar, d. h. die Schar derjenigen Wertsysteme $(\mathfrak{a}_1^*, \ldots, \mathfrak{a}_m^*)$, für welche das Gleichungssystem

$$(\mathfrak{a}^*) = A(x^*)$$

mindestens eine Lösung aus der gegebenen Schar (x^*) besitzt, und mit (α^*) die Schar der zu der gegebenen Schar (x^*) gehörigen Nullösungen von A, m. a. W. den Schnitt der Scharen (x^*) und (α). Dann gilt der Satz:

$$\text{Rang } (\mathfrak{a}^*) + \text{Rang } (\alpha^*) = \text{Rang } (x^*);$$

[13]) Bei der üblichen Behandlungsweise dieses Gegenstandes denkt man sich zunächst eine beliebige Basis von $\mathfrak{S}$ gewählt und sucht erst von da aus den Übergang zu einer normierten Orthogonalbasis (vgl. I. Schur, Math. Ann. 66, S. 503).

denn ist $(x^*) = S(\lambda)$, wobei die Spalten von S eine Basis von (x^*) bilden, so ist $(\mathfrak{a}^*)$ die durch $A \cdot S$ erzeugte Schar; und wenn $(\alpha^*) = S(\lambda^*)$ gesetzt wird, so ist Rang $(\alpha^*) =$ Rang (λ^*), und (λ^*) ist die Schar der Nullösungen von $A \cdot S$; man hat also nur die obige Bemerkung auf $A \cdot S$ anzuwenden.

Ist ferner $(\mathfrak{c})$ eine zu (α) komplementäre Schar von Wertsystemen $(\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_n)$, und wird das beliebige Wertsystem (x) in $(x) = (\mathfrak{c}) + (\alpha)$ gespalten, so ist $A(x) = A(\mathfrak{c})$ und $A(\mathfrak{c})$ nur dann $= (0)$, wenn $(\mathfrak{c}) = (0)$ ist, d. h. das Gleichungssystem

$$(\mathfrak{a}) = A(\mathfrak{c})$$

definiert eine ein-ein-deutige Abbildung zwischen den Scharen $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{c})$. Ist umgekehrt $(\mathfrak{c})$ eine solche Schar, daß $(\mathfrak{a}) = A(\mathfrak{c})$ eine ein-ein-deutige Abbildung zwischen den Scharen $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{c})$ gibt, so ist $(\mathfrak{c})$ zu (α) komplementär. Wir nennen eine solche Schar $(\mathfrak{c})$ einen *Grundbereich für A*.

§ 21. Ist A' die zu A transponierte Matrix, und wird

$$(\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_m) = A(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(\mathfrak{a}'_1, \ldots, \mathfrak{a}'_n) = A'(y_1, \ldots, y_m)$$

gesetzt, so ist

$$\mathfrak{a}_1 y_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m y_m = \mathfrak{a}'_1 x_1 + \ldots + \mathfrak{a}'_n x_n, \tag{31}$$

nämlich beide Seiten $= \sum a_{ij} y_i x_j$. Ist umgekehrt C eine Matrix von n Zeilen und m Spalten, für welche aus $(\mathfrak{a}) = A(x)$, $(\mathfrak{c}) = C(y)$ stets $\mathfrak{a}_1 y_1 + \ldots + \mathfrak{a}_m y_m = \mathfrak{c}_1 x_1 + \ldots + \mathfrak{c}_n x_n$ folgt, so ist $C = A'$.

Aus der Gleichung (31) folgt nun, daß *die Dualschar zu der durch* A *erzeugten Schar* $(\mathfrak{a})$ *die Schar* $(\mathfrak{a}')$ *der Nullösungen von* A' ist; denn damit ein Wertsystem (y) der Dualschar von $(\mathfrak{a})$ angehört, ist notwendig und hinreichend, daß die linke und daher auch die rechte Seite von (31) für jedes (x) verschwindet, d. h. daß $(\mathfrak{a}') = (0)$, $A'(y) = (0)$ ist.

§ 22. Sind $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ zwei Scharen von Wertsystemen der Variablen $y_1, \ldots, y_m$, so verstehen wir unter ihrem *Faltungsrang* die Zahl:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{a}) - \text{Rang}\,(\mathfrak{a}_{\perp \mathfrak{b}}).$$

Dann gilt der Satz:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{b}, \mathfrak{a}).$$

Es sei nämlich (β') die Dualschar zu $(\mathfrak{b})$, so daß $(\mathfrak{a}_{\perp \mathfrak{b}})$ der Schnitt der Scharen $(\mathfrak{a})$ und (β') ist. Werden nun die Scharen $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{b})$ durch Matrizen von gleicher Spaltenzahl n erzeugt, $(\mathfrak{a}) = A(x)$, $(\mathfrak{b}) = B(x)$, so ist (β') die Schar der Nullösungen von B' und nach § 20 Rang $B'(\mathfrak{a}) +$ $+$ Rang $(\mathfrak{a}_{\perp \mathfrak{b}}) =$ Rang $(\mathfrak{a})$, daher:

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\, B' \cdot A,$$

also $=$ Rang $A' \cdot B =$ Rang $(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$. Zugleich sieht man umgekehrt, daß Rang $B' \cdot A$ nur von jenen Scharen abhängt.

Wir stellen nun fest, wann die nichtnegative Zahl

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}) - \text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\,A - \text{Rang}\,B' \cdot A = \text{Rang}\,A' - \text{Rang}\,A' \cdot B$$

gleich 0 ist. Das ist dann und nur dann der Fall, wenn $(\mathfrak{a}_{\perp \mathfrak{b}}) = (0)$ ist, d. h. $(\mathfrak{a})$ und (β') nur das Wertsystem (0) gemein haben; zugleich ist es dann und nur dann der Fall, wenn aus $B'A(x) = (0)$ stets $A(x) = (0)$ folgt; endlich ist es dann und nur dann der Fall, wenn jedes $(\mathfrak{a}')$ auf mindestens eine Weise als $(\mathfrak{a}') = A'(\mathfrak{b})$ darstellbar ist. Dabei soll $(\mathfrak{a}')$ die durch A' erzeugte Schar bedeuten, ferner weiterhin (α') die Schar der Nullösungen von A'.

Hiernach ist nun für

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{a}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{b}),$$

m. a. W.

$$\text{Rang}\,B' \cdot A = \text{Rang}\,A = \text{Rang}\,B,$$

notwendig und hinreichend, daß $(\mathfrak{a})$ komplementär zu der Dualschar (β') von $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{b})$ komplementär zu der Dualschar (α') von $(\mathfrak{a})$ ist; zugleich ist dafür auch notwendig und hinreichend, daß $(\mathfrak{a})$ Grundbereich für B' und $(\mathfrak{b})$ Grundbereich für A' ist.

§ 23. Es seien wieder A und B zwei Matrizen von m Zeilen und n Spalten, und es seien im Gebiete von m Variablen: $(\mathfrak{a})$ die durch A erzeugte, $(\mathfrak{b})$ die durch B erzeugte Schar, (α') die Schar der Nullösungen von A', (β') die der Nullösungen von B', im Gebiete von n Variablen: $(\mathfrak{a}')$ die durch A' erzeugte, $(\mathfrak{b}')$ die durch B' erzeugte Schar, (α) die Schar der Nullösungen von A, (β) die der Nullösungen von B. Es haben also $(\mathfrak{a})$ und $(\mathfrak{a}')$ gleichen Rang, ebenso $(\mathfrak{b})$ und $(\mathfrak{b}')$.

Definition[14]): A und B heißen ein *ausgezeichnetes Paar* von Matrizen, wenn die vier Matrizen A, B, $A' \cdot B$, $A \cdot B'$ gleichen Rang haben.

Da übrigens der Rang eines Produktes den Rang keines Faktors übertrifft, so ist von den geforderten drei Gleichungen eine überflüssig, es würden z. B. schon Rang $A =$ Rang $A' \cdot B$ und Rang $B =$ Rang $A \cdot B'$ genügen.

Die Definition eines ausgezeichneten Paares kann auch in die Gestalt

$$\text{Rang}\,(\mathfrak{a}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{b}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) = \text{Rang}\,(\mathfrak{a}', \mathfrak{b}')$$

gesetzt werden, und nach § 22 hat man folgende Kriterien, wobei wir uns

[14]) In der Abhandlung „Über die Differentiationsprozesse der Algebra“ § 2 (Crelle 148) findet man eine Darstellung, in der die Rolle der Endlichkeit der Ränge deutlich hervortritt. Übrigens heißen dort nicht A, B, sondern A, B' ein ausgezeichnetes Paar.

icht scheuen, aus Symmetriegründen überzählige (und sofort als überähnlig erkennbare[15])) Bedingungen mitzuführen.

Damit A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß im Gebiete von m Variablen die Scharen $(\mathfrak{a})$ *und* (β') *komplementär und die Scharen* $(\mathfrak{b})$ und (α') *komplementär, im Gebiete von n Variablen die Scharen* $(\mathfrak{a}')$ *und* (β) *komplementär und die Scharen* $(\mathfrak{b}')$ *und* (α) *komplementär sind.*

Damit A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, ist notwendig und hinreichend, daß $(\mathfrak{a})$ *Grundbereich für B',* $(\mathfrak{b})$ *Grundbereich für A',* $(\mathfrak{a}')$ *Grundbereich für B und* $(\mathfrak{b}')$ *Grundbereich für A ist.*

Bevor wir erörtern, welche Eigenschaften die Matrizen $A' \cdot B$ und $\cdot B'$ haben, wenn A, B ein ausgezeichnetes Paar bilden, schicken wir ine allgemeine Betrachtung voraus, deren Resultate übrigens auch aus der lementarteilertheorie entnommen werden könnten.

§ 24. Es sei K eine Matrix von n Zeilen und n Spalten und vom ange ϱ. Die Matrix K^μ habe den Rang ϱ_μ, so daß $\varrho_0 = n$, $\varrho_1 = \varrho$ ist. n $\varrho_0 \geqq \varrho_1 \geqq \varrho_2 \geqq \ldots$ müssen Gleichheitszeichen auftreten, da diese Zahlen lle $\geqq 0$ sind. Nun besagt $\varrho_\mu = \varrho_{\mu+1}$, daß aus $K^{\mu+1}(x) = (0)$ stets $K^\mu(x) = (0)$ folgt. Ist nun $\varrho_\mu = \varrho_{\mu+1}$, so folgt aus $(0) = K^{\mu+2}(x)$ $= K^{\mu+1} K(x)$ stets $(0) = K^\mu K(x) = K^{\mu+1}(x)$, d. h. es ist auch $\varrho_{\mu+1} = \varrho_{\mu+2}$. ritt also das erste Gleichheitszeichen bei $\varrho_e = \varrho_{e+1}$ auf, so haben $\varrho_{e+1}, \varrho_{e+2}, \ldots$ einen und denselben Wert, den wir ϱ_∞ nennen. Ist $\geqq e$, so folgt aus $K^\mu(x) = (0)$ stets $K^e(x) = (0)$.

Besteht für einen Exponenten $\mu \geqq 0$ eine Matrizengleichung von der estalt $K^\mu \cdot (\mathsf{E} + c_1 K + \ldots + c_h K^h) = 0$, so muß $\mu \geqq e$ sein, da aus $^\mu = K^{\mu+1} \cdot (-c_1 \mathsf{E} - \ldots - c_h K^{h-1})$ folgt, daß $\varrho_\mu = \varrho_{\mu+1}$ ist. Also beeht auch die Gleichung $K^e \cdot (\mathsf{E} + c_1 K + \ldots + c_h K^h) = 0$.

Wir wollen nun zeigen, daß man ϱ_∞ aus der charakteristischen leichung der Matrix K entnehmen kann. Es sei d_ν die Summe der reihigen Hauptdeterminanten von K, $1 \leqq \nu \leqq n$, und $d_0 = 1$. In der eihe $d_0, d_1, \ldots, d_n$ sei d_r das letzte von 0 verschiedene Glied. Es ist ann, wenn wir durch Vertikalstriche die Bildung einer Determinante ndeuten und mit λ einen Parameter bezeichnen,

$$|K + \lambda \mathsf{E}| = d_r \lambda^{n-r} + \ldots + d_0 \lambda^n.$$

ir behaupten nun, daß $\varrho_\infty = r$ ist. Da r die Anzahl der von 0 verhiedenen charakteristischen Wurzeln von K ist, so haben die Matrizen $, K^2, K^3, \ldots$ alle dieselbe Zahl r. Deshalb reicht es zum Beweise nserer Behauptung aus, den folgenden Satz zu beweisen:

[15]) vgl. ebenda (Crelle 148) § 2 III.

Haben K und K^2 denselben Rang ϱ, so ist $d_\varrho \neq 0$.

Hierzu bilden wir eine solche Matrix P von nichtverschwindender Determinante, daß in dem Produkte $K \cdot P$ die letzten $n - \varrho$ Spalten aus Nullen bestehen, und setzen

$$P^{-1} \cdot K \cdot P = \begin{pmatrix} M, & 0 \\ N, & 0 \end{pmatrix},$$

worin M aus ϱ Zeilen und ϱ Spalten besteht. Dann ist

$$P^{-1} \cdot K^2 \cdot P = \begin{pmatrix} M^2, & 0 \\ NM, & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M, & 0 \\ N, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}$$

und, wenn wir auch die ϱ-reihige Einheitsmatrix mit E bezeichnen.

$$|K + \lambda \mathsf{E}| = |M + \lambda \mathsf{E}| \cdot \lambda^{n-\varrho}, \qquad d_\varrho = |M|.$$

Ist also Rang $K^2 =$ Rang $K = \varrho$, so ist $|M| \neq 0$, also $d_\varrho \neq 0$.

Damit K und K^2 denselben Rang ϱ haben, ist notwendig und hinreichend das Bestehen einer Matrizengleichung von der Gestalt $K \cdot (\mathsf{E} + c_1 K + \ldots + c_h K^h) = 0$. *Eine* solche kann man, wenn K und K^2 denselben Rang ϱ haben, folgendermaßen herstellen. Da $d_\varrho \neq 0$, so kann man $\varphi(\lambda)$ durch

$$d_\varrho \cdot \varphi(\lambda) = d_\varrho - d_{\varrho-1}\lambda + \ldots + (-1)^\varrho \lambda^\varrho \tag{32}$$

definieren, und es ist dann

$$K \cdot \varphi(K) = 0.$$

Daß K und K^2 gleichen Rang haben, besagt, daß K und K' ein ausgezeichnetes Paar bilden. Ist das der Fall, so bilden die durch K erzeugbaren Wertsysteme $(\mathfrak{k})$ einen Grundbereich für K, und jedes Wertsystem (x) läßt sich auf eine und nur eine Weise in

$$(x) = (\mathfrak{k}) + (\varkappa)$$

spalten, wobei $(\mathfrak{k})$ durch K erzeugbar und $(\varkappa)$ Nullösung von K ist. Setzt man dabei $(\mathfrak{k}) = K_1(x)$, $(\varkappa) = K_2(x)$, so sind dadurch zwei Matrizen K_1 und K_2 definiert, und wir wollen zeigen, daß sie *als ganze rationale Funktionen von K selbst* darstellbar sind. Hat nämlich $\varphi(\lambda)$ die obige Bedeutung, und wird $\psi(\lambda)$ durch

$$1 = \varphi(\lambda) + \lambda\psi(\lambda) \tag{33}$$

definiert, so daß $\mathsf{E} = \varphi(K) + K\psi(K)$ ist, so hat man für jedes durch K erzeugbare $(\mathfrak{k})$ und jede Nullösung $(\varkappa)$ von K:

$$\varphi(K)(\mathfrak{k}) = (0), \quad K\psi(K)(\mathfrak{k}) = (\mathfrak{k}); \qquad K\psi(K)(\varkappa) = (0), \quad \varphi(K)(\varkappa) = (\varkappa),$$

ıd es ist daher in der Spaltung $(x) = (\mathfrak{k}) + (\varkappa)$:

$$(\mathfrak{k}) = K\psi(K)(x), \quad (\varkappa) = \varphi(K)(x),$$

so $K_1 = K\psi(K)$, $K_2 = \varphi(K)$.

§ 25. Nun seien wieder A und B Matrizen von m Zeilen und Spalten. Es seien $\mathfrak{A}_{\nu 1}, \mathfrak{A}_{\nu 2}, \ldots$ alle ν-reihigen Determinanten aus A und $_{\nu 1}, \mathfrak{B}_{\nu 2}, \ldots$ die in derselben Reihenfolge genommenen aus B, ferner

34) $$d_\nu = \mathfrak{A}_{\nu 1}\mathfrak{B}_{\nu 1} + \mathfrak{A}_{\nu 2}\mathfrak{B}_{\nu 2} + \ldots$$

ır $\nu > 0$ und $d_0 = 1$. In der Reihe $d_0, d_1, d_2, \ldots$ sei d_r das letzte von verschiedene Glied. Dann ist, wenn wir sowohl die n-reihige als die -reihige Einheitsmatrix mit E bezeichnen,

$$|A'B + \lambda\mathsf{E}| = (d_r + \ldots + d_0\lambda^r)\cdot\lambda^{n-r}.$$

$$|AB' + \lambda\mathsf{E}| = (d_r + \ldots + d_0\lambda^r)\cdot\lambda^{m-r}.$$

Wir machen nun die Annahme, daß A, B ein ausgezeichnetes Paar lden. Betrachten wir nun die Matrix $K = A'\cdot B$, so ist Rang $K^2 =$ = Rang K, da aus $A'BA'B(x) = (0)$ zuerst $BA'B(x) = (0)$ und dann $'B(x) = (0)$ folgt. Man kann also jedes Wertsystem (x) in die Summe nes durch K erzeugbaren $(\mathfrak{k})$ und einer Nullösung $(\varkappa)$ von K spalten. ber jedes $(\mathfrak{k})$ ist ein $(\mathfrak{a}')$, jedes $(\varkappa)$ ein (β), und es gibt nur eine einzige paltung $(x) = (\mathfrak{a}') + (\beta)$. Entsprechendes gilt für die Matrix $A\cdot B'$ und e Wertsysteme (y) von m Variablen. Also gilt der Satz:

Haben die vier Matrizen A, B, $A'\cdot B$, $A\cdot B'$ denselben Rang ϱ, so t, wenn die d_ν durch (34) *definiert werden, $d_\varrho \neq 0$; und wenn $\varphi(\lambda)$ und (λ) durch* (32), (33) *definiert werden, so werden die Spaltungen* (§ 23):

$$(x) = (\mathfrak{a}') + (\beta) = (\mathfrak{b}') + (\alpha), \quad (y) = (\mathfrak{a}) + (\beta') = (\mathfrak{b}) + (\alpha'),$$

denen $(\mathfrak{a}')$ durch A' erzeugbar, (β) Nullösung von B usw. ist, durch e Formeln:

$$(\mathfrak{a}') = A'B\psi(A'B)(x), \quad (\beta) = \varphi(A'B)(x),$$
$$(\mathfrak{b}') = B'A\psi(B'A)(x), \quad (\alpha) = \varphi(B'A)(x),$$
$$(\mathfrak{a}) = AB'\psi(AB')(y), \quad (\beta') = \varphi(AB')(y),$$
$$(\mathfrak{b}) = BA'\psi(BA')(y), \quad (\alpha') = \varphi(BA')(y)$$

geben.

Haben umgekehrt A und B denselben Rang ϱ, und ist $d_\varrho \neq 0$, so ist ımittelbar klar, daß A, B, $A'\cdot B$, $A\cdot B'$ denselben Rang haben. *Ist B. $\bar{A}$ die zu A konjugiertkomplexe Matrix, so bilden A und $\bar{A}$ stets n ausgezeichnetes Paar*; denn für $B = \bar{A}$ ist d_ν reell und nichtnegativ ıd nur dann $= 0$, wenn Rang $A < \nu$ ist, also $d_\varrho > 0$ für $\varrho =$ Rang A.

§ 26. Ist $L(x)$ eine ganze rationale Funktion der Variablen $x_1, \ldots, x_m$,

$$L(x) = \sum l_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m} x_1^{\varkappa_1} \ldots x_m^{\varkappa_m},$$

so gebrauchen wir für $L(0) = l_{0 \ldots 0}$ die Bezeichnung $[L(x)]_0$ und verstehen unter $L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ die lineare Differentialoperation

$$L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \sum l_{\varkappa_1 \ldots \varkappa_m} \frac{\partial^{\varkappa_1 + \cdots + \varkappa_m}}{\partial x_1^{\varkappa_1} \ldots \partial x_m^{\varkappa_m}}.$$

Unter einem normierten Potenzprodukt verstehen wir nach Sylvester eine Funktion von der Gestalt

$$\mathfrak{p}(x) = \frac{x_1^{\varkappa_1} \ldots x_m^{\varkappa_m}}{\sqrt{\varkappa_1! \ldots \varkappa_m!}}$$

und nennen in dem Ansatz

$$L(x) = \sum l_i \mathfrak{p}_i(x)$$

die l_i die normierten Koeffizienten von $L(x)$. Es ist

$$\left[\mathfrak{p}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathfrak{p}_j(x)\right]_0 = 1 \text{ oder } 0, \text{ je nachdem } i = \text{ oder } \neq j$$

ist, und wenn h_i die normierten Koeffizienten von $H(x)$ bedeuten,

$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H(x)\right]_0 = \sum l_i h_i.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H(x)\right]_0 = \left[H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L(x)\right]_0.$$

Diese Gleichung hat folgende Verallgemeinerung, in der sie für $p = 0$ enthalten ist:

$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H_1(x) L_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots H_p(x) L_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H(x)\right]_0$$
$$= \left[H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_p(x) H_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots L_1(x) H_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L(x)\right]_0,$$

wobei die Operationen von rechts nach links auszuführen sind, so daß z. B.

$$H_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_1(x) H_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L(x) = H_2\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left\{L_1(x) \cdot \left(H_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L(x)\right)\right\}$$

ist. Zum Beweise sei $p > 0$ und der Satz für kleinere p schon bekannt. Wir wählen q so, daß $1 \leqq q \leqq p$ ist, und setzen

$$H_q(x) L_q\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots H_p(x) L_p\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H(x) = M(x),$$

$$L_{q-1}(x) H_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \ldots L_1(x) H_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L(x) = N(x).$$

ann ist die linke Seite der zu beweisenden Gleichung gleich

$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) H_1(x) \dots L_{q-1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)\right]_0,$$

so nach dem auf $q-1$ angewendeten Satze *gleich*

$$\left[M\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) N(x)\right]_0,$$

nd da sich *die rechte Seite* ebenso *gleich*

$$\left[N\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) M(x)\right]_0$$

gibt, so ist die Gleichheit dargetan.

Durch Addition mehrerer solcher Gleichungen ergibt sich eine weitere erallgemeinerung. Es seien die linearen Differentialoperationen

$$\mathfrak{A}_q = H_{q1}(x) L_{q1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + H_{q2}(x) L_{q2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \dots,$$

$$\mathfrak{A}'_q = L_{q1}(x) H_{q1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + L_{q2}(x) H_{q2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \dots,$$

egeben, $q = 1, \dots, p$. Aus ihnen bilden wir die linearen Differentialperationen

35)
$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \dots \mathfrak{A}_p,$$
$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}'_p \mathfrak{A}'_{p-1} \dots \mathfrak{A}'_1,$$

ei deren Anwendung wieder die Reihenfolge von rechts nach links zu ehmen ist. Dann ist für beliebige $L(x)$ und $H(x)$:

$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathfrak{A} H(x)\right]_0 = \left[H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \mathfrak{A}' L(x)\right]_0,$$

daß für beliebige $L(x)$ und $H(x)$ und für die Funktionen

36)
$$F(x) = \mathfrak{A} H(x),$$
$$F'(x) = \mathfrak{A}' L(x)$$

ie Gleichung

37)
$$\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F(x)\right]_0 = \left[H\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) F'(x)\right]_0$$

lt[16]).

§ 27. Eine Menge von ganzen rationalen Funktionen $\mathfrak{L}(x)$ heißt eine char $(\mathfrak{L})$, wenn jede von endlich vielen Elementen der Menge linearbhängige Funktion ebenfalls der Menge angehört. Gibt es eine nichtegative Zahl ϱ, so daß je $\varrho+1$ Funktionen der Schar linearabhängig nd, so wird die kleinste solche Zahl ϱ der Rang der Schar genannt;

[16]) Vgl. Crelle **148**, S. 47, Satz 23.

andernfalls heißt sie vom Range ∞. Z. B. hat die Schar (L) aller ganzen rationalen Funktionen den Rang ∞.

$L(x)$ und $H(x)$ heißen orthogonal oder dual, wenn $\left[L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)H(x)\right]_0 = 0$ ist, d. h. zwischen den normierten Koeffizienten die Gleichung $\sum l_i h_i = 0$ besteht.

Die am Anfang dieses Kapitels eingeführten Benennungen können nun sinngemäß auf Funktionenscharen übertragen werden.

Ist nun $(\mathfrak{L})$ eine Schar von endlichem Range, so sind ihre Elemente von endlich vielen normierten Potenzprodukten $\mathfrak{p}_1(x), \ldots, \mathfrak{p}_k(x)$ linear-abhängig. Es sei $\mathfrak{K}$ die Schar aller von diesen Potenzprodukten linear-abhängigen Funktionen; sie hat den Rang k; ihre Dualschar $(L_{\perp\mathfrak{K}})$ besteht aus allen nur von anderen Potenzprodukten linearabhängigen Funktionen und hat den Rang ∞. Um nun die Dualschar schlechtweg $(L_{\perp\mathfrak{L}})$ von $(\mathfrak{L})$ zu bestimmen, kommt es nur auf die Bestimmung ihrer Dualschar $(\mathfrak{K}_{\perp\mathfrak{L}})$ innerhalb $\mathfrak{K}$ an, weil $(\mathfrak{K}_{\perp\mathfrak{L}})$ und $(L_{\perp\mathfrak{K}})$ innerhalb der gesuchten Schar $(L_{\perp\mathfrak{L}})$ komplementär sind; daher handelt es sich um eine Untersuchung im Gebiete der Wertsysteme $(l_1, \ldots, l_k)$ von k Variablen, und wir können daher die Ausführungen vom Anfang dieses Kapitels verwenden. Dadurch ergibt sich insbesondere folgendes.

Eine Schar $(\mathfrak{L})$ von endlichem Range $\varrho > 0$ heißt eine *Normalschar*, wenn sie zu ihrer Dualschar komplementär ist. Die Normalscharen sind dadurch charakterisiert, daß sie *normierte Orthogonalbasen* besitzen, d. h. daß es solche $\mathfrak{L}_1(x), \ldots, \mathfrak{L}_\varrho(x)$ aus $(\mathfrak{L})$ gibt, daß $\left[\mathfrak{L}_i\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\mathfrak{L}_j(x)\right]_0 = 1$ oder 0 ist, je nachdem $i =$ oder $\neq j$ ist.

Ist $\mathfrak{L}_1(x), \ldots, \mathfrak{L}_\varrho(x)$ eine normierte Orthogonalbasis und

$$\mathfrak{L}(x) = \lambda_1 \mathfrak{L}_1(x) + \ldots + \lambda_\varrho \mathfrak{L}(x), \qquad \hat{\mathfrak{L}}(x) = \hat{\lambda}_1 \mathfrak{L}_1(x) + \ldots + \hat{\lambda}_\varrho \mathfrak{L}_\varrho(x),$$

so ist

$$\left[\mathfrak{L}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\hat{\mathfrak{L}}(x)\right]_0 = \lambda_1\hat{\lambda}_1 + \ldots + \lambda_\varrho\hat{\lambda}_\varrho,$$

so daß Betrachtungen innerhalb der Normalschar $\mathfrak{L}$ auf die Behandlung von Wertsystemen $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\varrho)$ von ϱ Variablen im Sinne des Anfangs dieses Kapitels hinauslaufen.

§ 28. Es seien nun einerseits die linearen Differentialoperationen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}'$ nach (35) gegeben, anderseits zwei Normalscharen $(\mathfrak{L})$ und $(\mathfrak{H})$, und es werde die *Voraussetzung* gemacht, daß, wenn $L(x)$ aus $(\mathfrak{L})$ und $H(x)$ aus $(\mathfrak{H})$ entnommen und $F(x)$ und $F'(x)$ durch (36) definiert werden, stets $F(x)$ in $(\mathfrak{L})$ und $F'(x)$ in $(\mathfrak{H})$ liegt. Diese Voraussetzung wird unter Benutzung einer normierten Orthogonalbasis $\mathfrak{L}_1(x), \mathfrak{L}_2(x), \ldots$ von $(\mathfrak{L})$ und einer normierten Orthogonalbasis $\mathfrak{H}_1(x), \mathfrak{H}_2(x), \ldots$ von $(\mathfrak{H})$ durch

$$\sum a_i \mathfrak{L}_i(x) = \mathfrak{A} \sum h_j \mathfrak{H}_j(x),$$
$$\sum a'_j \mathfrak{H}_j(x) = \mathfrak{A}' \sum l_i \mathfrak{L}_i(x)$$

usgedrückt. Nach (37) ist nun

$$\sum l_i a_i = \sum h_j a'_j.$$

Wird also

$$(a) = A(h)$$

esetzt, worin A eine Matrix bedeutet, so ist nach § 21

$$(a') = A'(l).$$

ist daher (F) die durch $\mathfrak{A}$ aus $(\mathfrak{H})$ erzeugte Schar, so besteht ihre Dualchar innerhalb $(\mathfrak{L})$ aus denjenigen Funktionen $\Phi'(x)$ aus $(\mathfrak{L})$, welche Nullösungen von $\mathfrak{A}'$ sind.

Neben den linearen Differentialoperationen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$, welche untereinander n dem Zusammenhange (35) stehen und mit den Normalscharen $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{H})$ lie angegebene Voraussetzung erfüllen, betrachten wir noch die linearen Differentialoperationen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$, welche untereinander in analogem Zusammenhange stehen und *mit denselben* $(\mathfrak{L})$, $(\mathfrak{H})$ *jene Voraussetzungen erfüllen* nögen. Bei Zugrundelegung derjenigen normierten Orthogonalbasen, bei welchen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ die Matrizen A, A' entsprechen, mögen $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$ die Matrizen B, B' entsprechen. Wir betrachten also jetzt nebeneinander die Bildungen:

$$F(x) = \mathfrak{A} H(x) \qquad G(x) = \mathfrak{B} H(x).$$
$$F'(x) = \mathfrak{A}' L(x) \qquad G'(x) = \mathfrak{B}' L(x).$$

Wenn nun die Matrizen A und B ein ausgezeichnetes Paar bilden, so läßt sich jede Funktion $L(x)$ aus $(\mathfrak{L})$ auf eine und nur eine Weise in die Summe

$$L(x) = F(x) + \Psi'(x)$$

einer in der Gestalt $F(x) = \mathfrak{A} H(x)$ mit aus $(\mathfrak{H})$ entnommener $H(x)$ darstellbaren Funktion $F(x)$ und einer zu $(\mathfrak{L})$ gehörigen der Gleichung $\ldots = \mathfrak{B}' \Psi'(x)$ genügenden Funktion $\Psi'(x)$ spalten, und in dieser Spaltung wird $\Psi'(x)$ durch Anwendung der linearen Differentialoperation $\varphi(\mathfrak{A}\mathfrak{B}')$ auf die zu spaltende Funktion $L(x)$ erhalten, worin $\varphi(\lambda)$ die in § 25 erklärte Bedeutung hat, d. h. es ist

$$\Psi'(x) = L(x) - \frac{d_{\varrho-1}}{d_\varrho} \mathfrak{A}\mathfrak{B}' L(x) + \ldots + (-1)^\varrho \frac{1}{d_\varrho} (\mathfrak{A}\mathfrak{B}')^\varrho L(x).$$

§ 29. Ein einfaches Beispiel zu den Betrachtungen dieses Kapitels ist das folgende. Die $\varkappa \cdot n$ Elemente der Matrix

$$\begin{matrix} \tau_1^{(1)} & \ldots & \tau_n^{(1)} \\ \ldots & & \\ \tau_1^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_n^{(\varkappa)} \end{matrix}$$

seien Variable, $\varkappa \leqq n$, und es sei (Θ) die Schar aller derjenigen ganzen rationalen Funktionen $\Theta(\tau)$, welche in den Elementen jeder einzelnen Zeile der Matrix linearhomogen sind; (Θ) ist eine Normalschar vom Range $n^\varkappa$, da die Produkte $\tau_{\nu_1}^{(1)} \ldots \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}$ eine normierte Orthogonalbasis bilden $(\nu_1, \ldots, \nu_\varkappa = 1, \ldots, n)$. Sind $\Theta_1(\tau)$ und $\Theta_2(\tau)$ Funktionen aus (Θ), so ist $\Theta_1\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Theta_2(\tau)$ von den τ unabhängig und daher $\left[\Theta_1\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Theta_2(\tau)\right]_0 = \Theta_1\left(\frac{\partial}{\partial \tau}\right)\Theta_2(\tau)$.

Es sei nun (L) die Teilschar derjenigen Funktionen $L(\tau)$, welche von den Determinanten

$$\begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix}$$

$(\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa)$ linearabhängig sind. Ihre Dualschar (Λ) innerhalb (Θ) besteht aus denjenigen Funktionen $\Lambda(\tau)$ aus (Θ), welche dem System von Differentialgleichungen

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_1}^{(1)}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)}} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}} \end{vmatrix} \Lambda(\tau) = 0$$

$(\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa)$ genügen. (L) und (Λ) sind in (Θ) komplementär, es gibt also eine eindeutige Spaltung

$$\Theta(\tau) = L(\tau) + \Lambda(\tau),$$

und wir nennen $L(\tau)$ den *Determinantenteil* von $\Theta(\tau)$. Die Determinanten dividiert durch $\sqrt{\varkappa!}$ bilden eine normierte Orthogonalbasis für (L).

Wir bilden jetzt die lineare Differentialoperation:

$$(38) \qquad \mathsf{T}^{(\varkappa)} = \frac{1}{\varkappa!} \sum_{\nu_1 < \ldots < \nu_\varkappa} \begin{vmatrix} \tau_{\nu_1}^{(1)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \ldots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \ldots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_1}^{(1)}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)}} \\ \ldots & & \\ \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}} & \ldots & \frac{\partial}{\partial \tau_{\nu_\varkappa}^{(\varkappa)}} \end{vmatrix}.$$

Es ist dann für jede $L(\tau)$ aus (L) und jede $\Lambda(\tau)$ aus (Λ):

$$\mathsf{T}^{(\varkappa)} L(\tau) = L(\tau), \qquad \mathsf{T}^{(\varkappa)} \Lambda(\tau) = 0.$$

Die durch $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$ aus (Θ) erzeugte Schar ist (L), die Schar der zu (Θ) gehörigen Nullösungen von $\mathsf{T}^{(\varkappa)}$ ist (Λ). Für jede $\Theta(\tau)$ aus (Θ) besteht die Gleichung

$$\mathsf{T}^{(\varkappa)} \Theta(\tau) - \mathsf{T}^{(\varkappa)^2} \Theta(\tau) = 0,$$

nd *der Determinantenteil* $L(\tau)$ *von* $\Theta(\tau)$ *wird durch*

$$L(\tau) = \mathsf{T}^{(\varkappa)}\Theta(\tau)$$

egeben.

Kapitel V.

Die zu den Cayleyschen dualen Funktionenscharen.

§ 30. Wir nehmen nun den Ansatz des § 6 wieder auf. Im Gebiete er ganzen rationalen Funktionen der Variablen x und τ betrachten wir e Schar $(L^{(\varkappa)})$ der Funktionen $L^{(\varkappa)} = L^{(\varkappa)}(x;\tau)$ von der Gestalt (7). Sie t eine Normalschar; jedes der in § 7 erklärten $\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ nämlich ist das Pro-ukt einer Determinante der τ und eines Potenzproduktes $x_1''^{\mu_1}\dots x_m''^{\mu_m}$ der x, nd wenn man $\mathfrak{z}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} = \sqrt{\mu_1!\dots\mu_m!}$ setzt, so bilden die Funktionen $\frac{\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}}{\mathfrak{z}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\cdot\sqrt{\varkappa!}}$ ne normierte Orthogonalbasis von $(L^{(\varkappa)})$. Wir *ändern die Bezeichnung* da-n ab, daß wir diese Funktionen jetzt mit $\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)} = \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}(x;\tau)$ bezeichnen; ıgleich wollen wir die bisher mit $\mathfrak{z}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\cdot\sqrt{\varkappa!}\cdot l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ zu bezeichnenden Größen tzt mit $l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}$ bezeichnen; in der neuen Bezeichnung ist also:

$$\left[\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa'}^{(\varkappa)}(x;\tau)\right]_0 = \mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial\tau}\right)\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa'}^{(\varkappa)}(x;\tau) = 1 \text{ oder } 0,$$

nachdem $\lambda_\varkappa =$ oder $\neq \lambda_\varkappa'$ ist, und

$$L^{(\varkappa)}(x;\tau) = \sum_{\lambda_\varkappa=1}^{\lambda_\varkappa=\sigma_\varkappa} l_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}\cdot\mathfrak{p}_{\lambda_\varkappa}^{(\varkappa)}.$$

Wir gebrauchen ferner die Zeichen $\dot{F}^{(\varkappa)}$ und $\Phi^{(\varkappa+1)}$ in demselben Sinne ie in § 6. Es ist nämlich $(L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ eine Funktion $F^{(\varkappa)}(x;\tau)$ aus $(L^{(\varkappa)})$, nd wir bezeichnen mit $(F^{(\varkappa)})$ die Schar aller derjenigen Funktionen $F^{(\varkappa)}$ er x und τ, für welche die Gleichung $F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ mindestens ne Lösung $L^{(\varkappa+1)}$ aus der Schar $(L^{(\varkappa+1)})$ besitzt, mit $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ die Schar ler derjenigen Funktionen $\Phi^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$ der x und τ, welche zu $(L^{(\varkappa+1)})$ hören und der Gleichung $0 = (\Phi^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ genügen.

$(F^{(\varkappa)})$ ist Teilschar von $(L^{(\varkappa)})$, und wir suchen ihre Dualschar inner-alb $(L^{(\varkappa)})$; $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ ist Teilschar von $(L^{(\varkappa+1)})$, und wir suchen ihre Dual-har innerhalb $(L^{(\varkappa+1)})$. Nun kann der Gleichung $F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ e Gestalt

$$F^{(\varkappa)}(x;\tau) = \left(f_1(x)\frac{\partial}{\partial\tau_1^{(\varkappa+1)}} + \dots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial\tau_n^{(\varkappa+1)}}\right)L^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$$

geben werden. Daher wird man zur Bestimmung der Dualscharen an 28 anknüpfen und die lineare Differentialoperation

$$\tau_1^{(\varkappa+1)} f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + \tau_n^{(\varkappa+1)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$$

heranziehen; da diese aber, auf eine Funktion aus $(L^{(\varkappa)})$ angewendet, keine Funktion aus $(L^{(\varkappa+1)})$ zu ergeben braucht, muß man noch die durch (38) definierte lineare Differentialoperation $\mathsf{T}^{(\varkappa+1)}$ heranziehen und bemerken, daß man der Gleichung $F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{\tau^{(\varkappa+1)}=f}$ auch die Gestalt

$$F^{(\varkappa)}(x;\tau) = \left(f_1(x)\frac{\partial}{\partial \tau_1^{(\varkappa+1)}} + \cdots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial \tau_n^{(\varkappa+1)}}\right)\mathsf{T}^{(\varkappa+1)} L^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$$

geben kann.

Wir bilden also die beiden linearen Differentialoperationen:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}^{(\varkappa)} &= \left(f_1(x)\frac{\partial}{\partial \tau_1^{(\varkappa+1)}} + \cdots + f_n(x)\frac{\partial}{\partial \tau_n^{(\varkappa+1)}}\right)\cdot \mathsf{T}^{(\varkappa+1)} \\ \mathfrak{A}'^{(\varkappa)} &= \mathsf{T}^{(\varkappa+1)}\cdot\left(\tau_1^{(\varkappa+1)} f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \cdots + \tau_n^{(\varkappa+1)} f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right)\end{aligned} \tag{39}$$

in den Variablen x und τ. Sind $L^{(\varkappa+1)}$ und $L^{(\varkappa)}$ beliebige Funktionen aus $(L^{(\varkappa+1)})$ bzw. $(L^{(\varkappa)})$, so sind

$$\begin{aligned}F^{(\varkappa)}(x;\tau) &= \mathfrak{A}^{(\varkappa)} L^{(\varkappa+1)}(x;\tau) \\ F'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) &= \mathfrak{A}'^{(\varkappa)} L^{(\varkappa)}(x;\tau)\end{aligned} \tag{40}$$

Funktionen aus $(L^{(\varkappa)})$ bzw. $(L^{(\varkappa+1)})$, und wenn wir die durch $\mathfrak{A}^{(\varkappa)}$ aus $(L^{(\varkappa+1)})$ erzeugte Schar mit $(F^{(\varkappa)})$ und die durch $\mathfrak{A}'^{(\varkappa)}$ aus $(L^{(\varkappa)})$ erzeugte mit $(F'^{(\varkappa+1)})$ bezeichnen, so ist die erstere mit der oben erklärten Schar $(F^{(\varkappa)})$ identisch; wenn wir ferner die Schar der zu $(L^{(\varkappa+1)})$ gehörigen Nullösungen von $\mathfrak{A}^{(\varkappa)}$ mit $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ und die Schar der zu $(L^{(\varkappa)})$ gehörigen Nullösungen von $\mathfrak{A}'^{(\varkappa)}$ mit $(\Phi'^{(\varkappa)})$ bezeichnen, so daß für ihre Funktionen

$$\begin{aligned}0 &= \mathfrak{A}^{(\varkappa)} \Phi^{(\varkappa+1)}(x;\tau) \\ 0 &= \mathfrak{A}'^{(\varkappa)} \Phi'^{(\varkappa)}(x;\tau)\end{aligned} \tag{41}$$

gilt, so ist die erstere mit der oben erklärten Schar $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ identisch. Nach § 28 *ist nun $(\Phi'^{(\varkappa)})$ die Dualschar von $(F^{(\varkappa)})$ innerhalb $(L^{(\varkappa)})$ und $(F'^{(\varkappa+1)})$ die Dualschar von $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ innerhalb $(L^{(\varkappa+1)})$.*

Setzt man

$$L^{(\varkappa)} = \sum_{\nu_1<\cdots<\nu_\varkappa} L_{\nu_1\ldots\nu_\varkappa}(x)\cdot\begin{vmatrix}\tau_{\nu_1}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_\varkappa}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)} & \cdots & \tau_{\nu_1}^{(\varkappa)}\end{vmatrix},$$

$$F'^{(\varkappa+1)} = \sum_{\nu_1<\cdots<\nu_{\varkappa+1}} F'_{\nu_1\ldots\nu_{\varkappa+1}}(x)\cdot\begin{vmatrix}\tau_{\nu_1}^{(1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(1)} \\ \cdots & & \\ \tau_{\nu_1}^{(\varkappa+1)} & \cdots & \tau_{\nu_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}\end{vmatrix},$$

so ist die Gleichung $F'^{(\varkappa+1)} = \mathfrak{A}'^{(\varkappa)} L^{(\varkappa)}$ gleichbedeutend mit dem Gleichungssystem

$$\varkappa+1)\cdot F'_{\nu_1\dots\nu_{\varkappa+1}}(x)=f_{\nu_{\varkappa+1}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_{\nu_1\dots\nu_\varkappa}(x)-f_{\nu_\varkappa}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_{\nu_1\dots\nu_{\varkappa-1}\nu_{\varkappa+1}}+\dots$$

$$\dots+(-1)^\varkappa f_{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L_{\nu_2\dots\nu_{\varkappa+1}}(x).$$

Setzt man ferner

$$L^{(\varkappa+1)}=\sum l^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}},\qquad L^{(\varkappa)}=\sum l^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa},$$

$$F^{(\varkappa)}=\sum\mathfrak{a}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}\mathfrak{p}^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa},\qquad F'^{(\varkappa+1)}=\sum\mathfrak{a}'^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}\mathfrak{p}^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}},$$

o ist (40) gleichbedeutend mit

$$(\mathfrak{a}^{(\varkappa)})=\mathsf{A}^{(\varkappa)}(\overline{l}^{(\varkappa+1)}),$$

$$(\mathfrak{a}'^{(\varkappa+1)})=\mathsf{A}'^{(\varkappa)}(l^{(\varkappa)}),$$

worin $\mathsf{A}^{(\varkappa)}=(\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa,\lambda_{\varkappa+1}})$ diejenige Matrix bedeutet, deren Elemente $\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa,\lambda_{\varkappa+1}}$ n der alten Bezeichnungsweise mit $\frac{\delta^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}}{\delta^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}}\frac{1}{\sqrt{\varkappa+1}}\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa,\lambda_{\varkappa+1}}$ zu bezeichnen wären, und $\mathsf{A}'^{(\varkappa)}$ die zu $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ transponierte Matrix bedeutet. Es ist

$$L^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial\tau}\right)F^{(\varkappa)}(x;\tau)=L^{(\varkappa+1}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial x}\right)F'^{(\varkappa+1)}(x;\tau)=\sum\alpha^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa,\lambda_{\varkappa+1}}l^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}l^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}.$$

Ferner ist $\mathrm{Rang}\,(F^{(\varkappa)})=\mathrm{Rang}\,(F'^{(\varkappa+1)})=\mathrm{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}=\sigma_{\varkappa+1}-\mathrm{Rang}\,(\Phi^{(\varkappa+1)})$ $=\sigma_\varkappa-\mathrm{Rang}\,(\Phi'^{(\varkappa)})$.

Wir stellen noch speziell die Definition der Scharen $(F^{(0)})$, $(\Phi'^{(0)})$, $\Phi^{(1)})$, $(F'^{(1)})$ *und* $(\Phi'^{(1)})$ *zusammen.* $(F^{(0)})$ besteht aus denjenigen Formen $F^{(0)}(x)$ vom Grade s, welche der Kongruenz

$$F^{(0)}(x)\equiv 0\ \mathrm{modd}\ f_1(x),\dots,f_n(x)$$

genügen, ihre Dualschar $(\Phi'^{(0)})$ innerhalb $(L^{(0)})$ aus denjenigen Formen $\Phi'^{(0)}(x)$ vom Grade s, welche dem System von Differentialgleichungen

$$0=f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi'^{(0)}(x),\dots,0=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi'^{(0)}(x)$$

genügen. $(\Phi^{(1)})$ besteht aus denjenigen $\Phi_1(x)\tau_1^{(1)}+\dots+\Phi_n(x)\tau_n^{(1)}$, in welchen $\Phi_1(x),\dots,\Phi_n(x)$ Formen von den Graden $s-s_1,\dots,s-s_n$ sind, welche der Gleichung

$$0=f_1(x)\,\Phi_1(x)+\dots+f_n(x)\,\Phi_n(x)$$

genügen, ihre Dualschar $(F'^{(1)})$ innerhalb $(L^{(1)})$ aus denjenigen $F'_1(x)\tau_1^{(1)}+\dots$ $+F'_n(x)\tau_n^{(1)}$, in welchen $F'_1(x),\dots,F'_n(x)$ Formen von den Graden $s-s_1,\dots,s-s_n$ sind, welche sich aus einer Form $L^{(0)}(x)$ vom Grade s durch die Formeln

$$F'_1(x)=f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L^{(0)}(x),\dots,F'_n(x)=f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L^{(0)}(x)$$

erzeugen lassen. $(\Phi'^{(1)})$ besteht aus denjenigen $\Phi'_1(x)\tau_1^{(1)}+\ldots+\Phi'_n(x)\tau'_n$, in welchen $\Phi'_1(x),\ldots,\Phi'_n(x)$ Formen von den Graden $s-s_1,\ldots,s-s_n$ sind, welche den $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentialgleichungen

$$0=f_{\nu_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi'_{\nu_1}(x)-f_{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Phi'_{\nu_2}(x)$$

genügen.

§ 31. Es sei ein der Bedingung $0<\varkappa<k$ genügender Wert $\varkappa$ fixiert. Die Tatsache $(F^{(\varkappa)})\leqq(\Phi^{(\varkappa)})$, die wir in § 7 durch $\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}\cdot\mathsf{A}^{(\varkappa)}=0$ ausgedrückt haben, können wir jetzt durch

$$0=\mathfrak{A}^{(\varkappa-1)}\mathfrak{A}^{(\varkappa)}L^{(\varkappa+1)}$$

für jedes $L^{(\varkappa+1)}$ aus $(L^{(\varkappa+1)})$ ausdrücken. Es ist ferner dann und nur dann $(F^{(\varkappa)})=(\Phi^{(\varkappa)})$, wenn $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa-1)}=\varrho_{\varkappa-1}$ und $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}=\varrho_\varkappa$ ist, wobei $\varrho_{\varkappa-1}$ und $\varrho_\varkappa$ durch (18) definiert sind; denn man hat

$$\begin{aligned}\text{Rang}\,(\Phi^{(\varkappa)})-\text{Rang}\,(F^{(\varkappa)})&=(\sigma_\varkappa-\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa-1)})-\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}\\&=(\varrho_{\varkappa-1}-\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa-1)})+(\varrho_\varkappa-\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}).\end{aligned}$$

Durch Übergang zu den in § 30 bestimmten Dualscharen ergibt sich zunächst die Tatsache $(F'^{(\varkappa)})\leqq(\Phi'^{(\varkappa)})$, die auch durch $\mathsf{A}'^{(\varkappa)}\cdot\mathsf{A}'^{(\varkappa-1)}=0$ oder

$$0=\mathfrak{A}'^{(\varkappa)}\mathfrak{A}'^{(\varkappa-1)}L^{(\varkappa-1)}$$

für alle $L^{(\varkappa-1)}$ aus $(L^{(\varkappa-1)})$ ausgedrückt werden kann; ferner ergibt sich, daß, wenn $(F^{(\varkappa)})=(\Phi^{(\varkappa)})$ ist, auch $(F'^{(\varkappa)})=(\Phi'^{(\varkappa)})$ ist. Da aber in der Normalschar $(L^{(\varkappa)})$ das Dualitätsprinzip gilt, kann auch umgekehrt aus $(F'^{(\varkappa)})=(\Phi'^{(\varkappa)})$ auf $(F^{(\varkappa)})=(\Phi^{(\varkappa)})$ geschlossen werden. *Die Eigenschaften* $(F^{(\varkappa)})=(\Phi^{(\varkappa)})$ *und* $(F'^{(\varkappa)})=(\Phi'^{(\varkappa)})$ *sind also gleichbedeutend.*

Es sei ferner $\varkappa=k$. Die Schar $(\Phi^{(k)})$ besteht dann und nur dann bloß aus der Funktion 0, wenn $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(k-1)}=\sigma_k=\varrho_{k-1}$ ist. *Die Eigenschaft, daß* $(\Phi^{(k)})$ *nur aus der Funktion* 0 *besteht, ist gleichbedeutend mit der Eigenschaft, daß* $(F'^{(k)})$ *mit* $(L^{(k)})$ *identisch ist.*

Insbesondere ergibt sich die folgende *duale Fassung des Lasker-Ostrowskischen Satzes*:

Bilden $f_1,\ldots,f_n$ *ein System von nichtverschwindender Resultante, so stimmen für* $0<\varkappa<k$ *die Scharen* $(\Phi'^{(\varkappa)})$ *und* $(F'^{(\varkappa)})$ *überein, und* $(F'^{(k)})$ *ist* $(L^{(k)})$ *selbst.*

Speziell für $\varkappa=1$ erhält man (auch wenn $k=1$) folgende duale Fassung des Laskerschen Satzes:

Es sei $f_1,\ldots,f_n$ *ein System von nichtverschwindender Resultante; damit die Formen* $L_1(x),\ldots,L_n(x)$ *von den Graden* $s-s_1,\ldots,s-s_n$

ie Eigenschaft haben, sich aus einer Form $L^{(0)}(x)$ vom Grade s durch ie Formeln

$$L_1(x) = f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L^{(0)}(x), \ldots, L_n(x) = f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L^{(0)}(x)$$

rzeugen zu lassen, ist notwendig und hinreichend, daß sie den $\frac{n(n-1)}{2}$ Differentialgleichungen

$$f_{\nu_2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_{\nu_1}(x) = f_{\nu_1}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) L_{\nu_2}(x)$$

enügen. Diesen Satz hat mir Ostrowski im Jahre 1917 brieflich mitgeteilt; ch stand freilich damals im Felde und hatte nicht Muße, seine inhaltseichen Ausführungen gebührend aufzufassen, so daß ich den Satz erst jetzt us dem hier dargelegten Zusammenhange kennen gelernt habe. Ostrowski at ihn, nachdem er ihn zuvor anders bewiesen hatte, auf die Sätze des 6 meiner Arbeit „Über die Differentiationsprozesse der Algebra", Crelle 148, ie ihm damals im Manuskript vorlag, zurückgeführt. Ich vermute, daß ieser Beweis sich von dem meinigen nur durch die Heranziehung der zu en Koeffizienten a konjugiertkomplexen Größen $\bar{a}$ unterscheidet; warum ch diese vermeide, habe ich in einem analogen Falle, Crelle 140, S. 55, useinandergesetzt.

§ 32. Neben den Formen $f_1, \ldots, f_n$ mit den Koeffizienten a führen ir jetzt *ein zweites Formensystem* $g_1, \ldots, g_n$ von denselben Gradzahlen $_1, \ldots, s_n$ und mit Koeffizienten b ein. Für die Formen $g_1, \ldots, g_n$ mögen $\mathfrak{B}^{(\varkappa)}, \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}, \mathsf{B}^{(\varkappa)}, \mathsf{B}'^{(\varkappa)}, (G^{(\varkappa)}), (G'^{(\varkappa+1)}), (\Psi^{(\varkappa+1)}), (\Psi'^{(\varkappa)})$ die analoge Bedeuung haben wie $\mathfrak{A}^{(\varkappa)}, \mathfrak{A}'^{(\varkappa)}, \mathsf{A}^{(\varkappa)}, \mathsf{A}'^{(\varkappa)}, (F^{(\varkappa)}), (F'^{(\varkappa+1)}), (\Phi^{(\varkappa+1)}), (\Phi'^{(\varkappa)})$ für ie Formen $f_1, \ldots, f_n$.

Es sei ein der Bedingung $0 < \varkappa < k$ genügender Wert fixiert. Nach 22 ist

$$\begin{aligned}\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} \cdot \mathsf{B}'^{(\varkappa-1)} &= \text{Rang } (F'^{(\varkappa)}, G'^{(\varkappa)}) \\ &= \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} - \text{Rang Schnitt } (F'^{(\varkappa)}, \Psi^{(\varkappa)}), \\ \text{Rang } \mathsf{B}'^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)} &= \text{Rang } (F^{(\varkappa)}, G^{(\varkappa)}) \\ &= \text{Rang } \mathsf{B}^{(\varkappa)} - \text{Rang Schnitt } (\Phi'^{(\varkappa)}, G^{(\varkappa)}).\end{aligned}$$

st nun insbesondere $\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} = \text{Rang } \mathsf{B}^{(\varkappa-1)} = \varrho_{\varkappa-1}$ und $\text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa)} = \text{Rang } \mathsf{B}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$, so ist nach § 31 $(F'^{(\varkappa)}) = (\Phi'^{(\varkappa)})$, $(\Psi^{(\varkappa)}) = (G^{(\varkappa)})$, also

$$\varrho_{\varkappa-1} - \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} \cdot \mathsf{B}'^{(\varkappa-1)} = \varrho_\varkappa - \text{Rang } \mathsf{B}'^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)}.$$

as gilt also insbesondere, wenn $f_1, \ldots, f_n$ und $g_1, \ldots, g_n$ zwei Formenysteme von nichtverschwindender Resultante sind. Es gilt also der Satz:

Im Falle $0 < \varkappa < k$ *ist die Eigenschaft:*

$$\left.\begin{matrix} f_1, \ldots, f_n \text{ von nichtverschw. Res.} \\ g_1, \ldots, g_n \text{ von nichtverschw. Res.} \end{matrix}\right\} \text{und Rang } \mathsf{B}'^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$$

gleichbedeutend mit der Eigenschaft:

$$\left.\begin{matrix} f_1, \ldots, f_n \text{ von nichtverschw. Res.} \\ g_1, \ldots, g_n \text{ von nichtverschw. Res.} \end{matrix}\right\} \text{und Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)} \cdot \mathsf{B}'^{(\varkappa-1)} = \varrho_{\varkappa-1}.$$

Ist ferner $\varkappa = k$, so ist die Eigenschaft $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(k-1)} = \text{Rang}\,\mathsf{B}^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$ gleichbedeutend mit der Eigenschaft $\text{Rang}\ \mathsf{A}^{(k-1)} \cdot \mathsf{B}'^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$, weil $\sigma_k = \varrho_{k-1}$ ist. *Sind also beide Formensysteme von nichtverschwindender Resultante, so ist* $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(k-1)} \cdot \mathsf{B}'^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$.

§ 33. Mit $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}$, oder ansführlicher $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}(a)$, bezeichnen wir im Falle unbestimmter a die mit jenen Vorzeichen versehenen $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten der Matrix $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$; wegen der in § 30 vorgenommenen Änderung der Bezeichnung unterscheiden sie sich von den gleichnamigen Funktionen des § 12 um von den a unabhängige von 0 verschiedene Faktoren. Es sind dann $\Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}(b)$ die mit jenen Vorzeichen versehenen $\varrho_\varkappa$-reihigen Determinanten der Matrix $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$.

Wir führen nun eine Form $\Delta^{(\varkappa)} = \Delta^{(\varkappa)}(a; b)$ der Unbestimmten a und b ein durch die *Definition*

$$\Delta^{(\varkappa)}(a; b) = \sum_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}} \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}(a) \cdot \Delta^{(\varkappa)}_{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}(b). \tag{42}$$

Diese Form, welche der Gleichung $\Delta^{(\varkappa)}(a; b) = \Delta^{(\varkappa)}(b; a)$ genügt, verschwindet nicht identisch. Betrachten wir nämlich ein Wertsystem der a und bezeichnen mit $\bar{a}$ die zu den a konjugiertkomplexen Größen, so ist die reelle und nichtnegative Größe $\Delta^{(\varkappa)}(a; \bar{a})$ dann und nur dann $= 0$, wenn $\text{Rang}\,\mathsf{A}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$ ist.

Für unbestimmte a und b bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} |\mathsf{A}^{(\varkappa)}\mathsf{B}'^{(\varkappa)} + \lambda \mathsf{E}| &= \Delta^{(\varkappa)} \lambda^{\sigma_\varkappa - \varrho_\varkappa} + \ldots + \lambda^{\sigma_\varkappa}, \\ |\mathsf{B}'^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} + \lambda \mathsf{E}| &= \Delta^{(\varkappa)} \lambda^{\sigma_{\varkappa+1} - \varrho_\varkappa} + \ldots + \lambda^{\sigma_{\varkappa+1}}, \end{aligned} \tag{43}$$

deren jede ebenfalls zur *Definition* der Form $\Delta^{(\varkappa)}$ dienen kann.

Wir wollen nun feststellen, welche Bedeutung für ein Wertsystem der a und b das Nichtverschwinden der Größe $\Delta^{(\varkappa)}(a; b)$ hat. Nach (43) und § 25 besteht der Satz:

Es bildet $\Delta^{(\varkappa)}(a; b) \neq 0$ *eine notwendige und* (selbstverständlich auch) *hinreichende Bedingung dafür, daß* $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$ *und* $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$ *ein ausgezeichnetes Paar vom Range* $\varrho_\varkappa$ *bilden*, d. h. dafür, daß jede der vier Matrizen $\mathsf{A}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)}$, $\mathsf{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{B}'^{(\varkappa)}$, $\mathsf{B}'^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)}$ den Rang $\varrho_\varkappa$ hat.

Ist nun $\Delta^{(\varkappa)}(a;b) \neq 0$, so sind nach § 28 die Scharen $(F^{(\varkappa)})$ und $\Phi'^{(\varkappa)})$ in $(L^{(\varkappa)})$ komplementär, $(G^{(\varkappa)})$ und $(\Phi'^{(\varkappa)})$ in $(L^{(\varkappa)})$ komplementär, $\Phi'^{(\varkappa+1)})$ und $(\Psi^{(\varkappa+1)})$ in $(L^{(\varkappa+1)})$ komplementär, $(G'^{(\varkappa+1)})$ und $(\Phi^{(\varkappa+1)})$ $(L^{(\varkappa+1)})$ komplementär; ferner ist z. B. $(F'^{(\varkappa)})$ die durch $\mathfrak{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}$ aus $L^{(\varkappa)})$ erzeugte Schar, $(F^{(\varkappa)})$ Grundbereich für $\mathfrak{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}$ innerhalb $(L^{(\varkappa)})$ nd die Spaltung $L^{(\varkappa)} = F^{(\varkappa)} + \Psi'^{(\varkappa)}$ durch Anwendung gewisser linearer ifferentialoperationen herstellbar, die aus $\mathfrak{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}$ mit Benützung der (43) auftretenden Koeffizienten zu bilden sind, dabei ist Rang $(F^{(\varkappa)}) = \varrho_\varkappa$.

Machen wir insbesondere die Annahme $\Delta^{(0)}(a;b) \neq 0$ und berücksichtigen, daß dann auch $\mathsf{B}^{(0)}$ und $\overline{\mathsf{B}}^{(0)}$ ein ausgezeichnetes Paar vom Range bilden, so ergibt sich: Ist $\Delta^{(0)}(a;b) \neq 0$, so läßt sich *erstens* jede orm $L^{(0)}(x)$ vom Grade s auf eine und nur eine Weise so in die Summe

$$L^{(0)}(x) = F^{(0)}(x) + \Psi'^{(0)}(x)$$

weier Formen vom Grade s spalten, daß

$$F^{(0)}(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_n(x)$$

$$0 = g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi'^{(0)}(x), \ldots, 0 = g_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\Psi'^{(0)}(x)$$

t, und es ist dabei Rang $(F^{(0)}) = \varrho_0$; *zweitens* läßt sich dann jede der ongruenz

$$F^{(0)}(x) \equiv 0 \mod f_1(x), \ldots, f_n(x)$$

enügende Form vom Grade s auf eine und nur eine Weise so in die estalt

$$F^{(0)}(x) = \left[f_1(x) g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + f_n(x) g_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right] \bar{G}^{(0)}(x)$$

tzen, daß die Form $\bar{G}^{(0)}(x)$ vom Grade s der Kongruenz

$$\bar{G}^{(0)}(x) \equiv 0 \mod \bar{g}_1(x), \ldots, \bar{g}_n(x)$$

enügt, worin $\bar{g}_1(x), \ldots, \bar{g}_n(x)$ aus $g_1(x), \ldots, g_n(x)$ durch Übergang zu en konjugiert-komplexen Koeffizienten entstehen. Ferner läßt sich die paltung $L^{(0)}(x) = F^{(0)}(x) + \Psi'^{(0)}(x)$ durch gewisse lineare Differentialperationen vollziehen, welche nach §§ 25, 28 aus der linearen Differentialperation $f_1(x) g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \ldots + f_n(x) g_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$ und denjenigen Koeffizienten bilden sind, welche bei der Entwicklung von $|\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{B}'^{(0)} + \lambda \mathsf{E}|$ nach otenzen von λ auftreten.

§ 34. *Wir schalten hier eine Anwendung der letzten Betrachtungen ein.* Wir haben immer Formen betrachtet, deren Koeffizienten em Körper der komplexen Zahlen angehören. Legt man an dessen elle den Körper aller rationalen Funktionen von gewissen Parametern zugrunde, so kann man alle Betrachtungen übertragen. Wir

wollen insbesondere als Parameter die als Unbestimmte betrachteten Koeffizienten a der Formen $f_1, \ldots, f_n$ zugrunde legen, hingegen die Koeffizienten b der Formen $g_1, \ldots, g_n$ als komplexe Zahlen wählen, und zwar so, daß $g_1, \ldots, g_n$ ein System mit nichtverschwindender Resultante bilden. Dann ist $\Delta^{(0)}(a; b) \neq 0$; denn die a sind Unbestimmte, und es ist $\Delta^{(0)}(\bar{b}; b) \neq 0$.

Wir nehmen nun speziell die Formen:

$$g_1 = x_1^{s_1}, \ldots, g_n = x_n^{s_n}$$

und nehmen $n \leqq m$ an; dann bilden $g_1, \ldots, g_n$ ein System von nichtverschwindender Resultante. Bezeichnen wir nun mit $\Psi_1'^{(0)}(x), \ldots, \Psi_{\sigma_0 - \varrho_0}'^{(0)}(x)$ alle diejenigen Potenzprodukte $x_1^{\mu_1} \ldots x_m^{\mu_m}$ vom Grade s, für welche

$$\mu_1 < s_1, \ldots, \mu_n < s_n$$

ist, und mit $G_1^{(0)}(x), \ldots, G_{\varrho_0}^{(0)}(x)$ die übrigen Potenzprodukte vom Grade s, so ergibt sich aus § 33 insbesondere der Satz:

Ist $L^{(0)}(x)$ eine gegebene Form der x vom Grade s, deren Koeffizienten rationale Funktionen der Unbestimmten a sind, so kann man auf eine und nur eine Weise solche rationale Funktionen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{\sigma_0 - \varrho_0}$, $c_1, \ldots, c_{\varrho_0}$ der Unbestimmten a finden, daß

$$L^{(0)}(x) = \sum_i \gamma_i \Psi_i'^{(0)}(x) + \left(f_1(x) \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}} + \ldots + f_n(x) \frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}} \right) \sum_j c_j G_j^{(0)}(x)$$

ist.

Diesen Satz kann man aber auch unmittelbar durch folgende Schlußweise verifizieren, welche der in der Einleitung erwähnten Note von Perron nachgebildet ist. Es ist nur zu zeigen, daß die σ_0 Formen der x vom Grade s

$$\Psi_i'^{(0)}(x) \quad \text{und} \quad \left(f_1(x) \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}} + \ldots + f_n(x) \frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}} \right) G_j^{(0)}(x)$$

linearunabhängig sind, daß also ihre Koeffizientendeterminante nicht verschwindet. Da diese aber eine ganze rationale Funktion der a ist, genügt es, ein spezielles Wertsystem der a anzugeben, für welches sie nicht verschwindet, d. h. ein spezielles Formensystem $f_1, \ldots, f_n$ anzugeben, für welches jene σ_0 Formen linearunabhängig sind. Das leistet nun das System $f_1 = x_1^{s_1}, \ldots, f_n = x_n^{s_n}$; denn da die Exponenten des Potenzproduktes $G_j^{(0)}(x)$ nicht den sämtlichen Ungleichungen $\mu_1 < s_1, \ldots, \mu_n < s_n$ genügen, so unterscheidet sich $\left(x_1^{s_1} \frac{\partial^{s_1}}{\partial x_1^{s_1}} + \ldots + x_n^{s_n} \frac{\partial^{s_n}}{\partial x_n^{s_n}} \right) G_j^{(0)}(x)$ von $G_j^{(0)}(x)$ um einen konstanten Faktor, welcher > 0 ist.

Zum Vergleiche mit der Note von Perron nehme man $n = m - 1$ nd setze $x_m = 1$.

Nach dieser Abschweifung kehren wir zum ursprünglichen Gegenstande urück.

§ 35. Es seien nun die Koeffizienten a und b Unbestimmte.

Sind $L^{(\varkappa)}(x;\tau)$ und $H^{(\varkappa)}(x;\tau)$ Funktionen aus $(L^{(\varkappa)})$ mit unestimmten Koeffizienten $l^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}$ und $h^{(\varkappa)}_{\lambda_\varkappa}$, und werden aus ihnen die unktionen

$$F^{(\varkappa)}(x;\tau) = \mathfrak{A}^{(\varkappa)}\mathfrak{B}'^{(\varkappa)}L^{(\varkappa)}(x;\tau),$$
$$G^{(\varkappa)}(x;\tau) = \mathfrak{B}^{(\varkappa)}\mathfrak{A}'^{(\varkappa)}H^{(\varkappa)}(x;\tau)$$

ebildet, so ist

$$H^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)F^{(\varkappa)}(x;\tau) = L^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)G^{(\varkappa)}(x;\tau) =$$
$$= \mathsf{A}^{(\varkappa)}\mathsf{B}'^{(\varkappa)}(h^{(\varkappa)}, l^{(\varkappa)}),$$

enn wir allgemein mit $C(h;l)$ die aus der Matrix $C = (c_{ij})$ gebildete ilinearform $\sum c_{ij}h_i l_j$ bezeichnen. Nach § 26 kann man die linke Seite mformen und erhält, wenn man

$$F'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = \mathfrak{A}'^{(\varkappa)}H^{(\varkappa)}(x;\tau),$$
$$G'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}L^{(\varkappa)}(x;\tau)$$

etzt, die Gleichung

$$F'^{(\varkappa+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)G'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = \mathsf{A}^{(\varkappa)}\mathsf{B}'^{(\varkappa)}(h^{(\varkappa)};l^{(\varkappa)}).$$

Sind dagegen $L^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$ und $H^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$ Funktionen aus $(L^{(\varkappa+1)})$ it unbestimmten Koeffizienten $l^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$ und $h^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$, und werden aus ihnen e Funktionen

$$F'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = \mathfrak{A}'^{(\varkappa)}\mathfrak{B}^{(\varkappa)}H^{(\varkappa+1)}(x;\tau),$$
$$G'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = \mathfrak{B}'^{(\varkappa)}\mathfrak{A}^{(\varkappa)}L^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$$

ebildet, so ist

$$L^{(\varkappa+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)F'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) = H^{(\varkappa+1)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)G'^{(\varkappa+1)}(x;\tau) =$$
$$= \mathsf{B}'^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)}(h^{(\varkappa+1)};l^{(\varkappa+1)}),$$

nd, wenn

$$F^{(\varkappa)}(x;\tau) = \mathfrak{A}^{(\varkappa)}L^{(\varkappa+1)}(x;\tau),$$
$$G^{(\varkappa)}(x;\tau) = \mathfrak{B}^{(\varkappa)}H^{(\varkappa+1)}(x;\tau)$$

esetzt wird,

4) $$F^{(\varkappa)}\left(\frac{\partial}{\partial x};\frac{\partial}{\partial \tau}\right)G^{(\varkappa)}(x;\tau) = \mathsf{B}'^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)}(h^{(\varkappa+1)};l^{(\varkappa+1)}).$$

Von jeder der beiden so konstruierten Bilinearformen ist $\Delta^{(\varkappa)}(a;b)$ die Summe der $\varrho_\varkappa$-reihigen Hauptdeterminanten.

Insbesondere ist

$$\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{B}'^{(0)}(h^{(0)};l^{(0)}) = H^{(0)}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[f_1(x)\,g_1\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)+\ldots+f_n(x)\,g_n\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]L^{(0)}(x)$$

und, wenn man

$$F_\nu'(x) = f_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)H^{(0)}(x), \quad G_\nu'(x) = g_\nu\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)L^{(0)}(x)$$

setzt,

$$\mathsf{A}^{(0)}\mathsf{B}'^{(0)}(h^{(0)};l^{(0)}) = F_1'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)G_1'(x)+\ldots+F_n'\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)G_n'(x).$$

§ 36. Wir nehmen die Koeffizienten a und b wieder als Unbestimmte an und schreiben statt $f_\nu(x)$ ausführlicher $f_\nu(a;x)$; es ist $g_\nu(x) = f_\nu(b;x)$, $\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \mathsf{A}^{(\varkappa)}(a)$, $\mathsf{B}^{(\varkappa)} = \mathsf{A}^{(\varkappa)}(b)$.

Wir wollen jetzt die Formen g_ν mit anderen Variablen $u_1,\ldots,u_m$ bilden und zeigen, *daß $\Delta^{(\varkappa)}a;b)$ eine Invariante des Grundformensystems*

$$f_1(x),\ldots,f_n(x), \quad g_1(u),\ldots,g_n(u)$$

ist, wenn die u zu den x kontragredient sind. Damit ist folgendes gemeint. Wir führen statt der x durch eine beliebige lineare Transformation neue Variable x^* ein und statt der u neue u^* durch diejenige lineare Transformation, für welche die Gleichung

$$x_1u_1+\ldots+x_mu_m = x_1^*u_1^*+\ldots+x_m^*u_m^*$$

besteht, d. h.

$$(x) = P(x^*), \quad |P| \neq 0, \quad (u) = P'^{-1}(u^*);$$

ferner führen wir statt der a neue a^* und statt der b neue b^* ein durch diejenigen linearen Transformationen, für welche die Gleichungen

$$f_\nu(a;x) = f_\nu(a^*;x^*), \quad f_\nu(b;u) = f_\nu(b^*;u^*)$$

$(\nu = 1,\ldots,n)$ bestehen; dann wird behauptet, daß $\Delta^{(\varkappa)}(a;b) = \Delta^{(\varkappa)}(a^*;b^*)$ ist.

Der Beweis beruht auf der Regel der Differentialrechnung, daß für Formen $\varphi(x)$ und $\psi(u)$ aus $\varphi(x) = \varphi^*(x^*)$ und $\psi(u) = \psi^*(u^*)$ stets $\psi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)\varphi(x) = \psi^*\left(\frac{\partial}{\partial x^*}\right)\varphi^*(x^*)$ folgt. Wir setzen, indem wir statt $L^{(\varkappa+1)}$ ausführlicher $L^{(\varkappa+1)}(l^{(\varkappa+1)};x;\tau)$ schreiben,

$$F^{(\varkappa)}(a;l^{(\varkappa+1)};x;\tau)$$
$$= \left(f_1(a;x)\frac{\partial}{\partial\tau_1^{(\varkappa+1)}}+\ldots+f_n(a;x)\frac{\partial}{\partial\tau_n^{(\varkappa+1)}}\right)L^{(\varkappa+1)}(l^{(\varkappa+1)};x;\tau),$$

daß nach (44)

$$^{(\varkappa)}\left(b; h^{(\varkappa+1)}; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial \tau}\right) F^{(\varkappa)}(a; l^{(\varkappa+1)}; x; \tau) = \mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a)(h^{(\varkappa+1)}; l^{(\varkappa+1)})$$

t. Nun führen wir statt der $l^{(\varkappa+1)}$ neue Unbestimmte $l^{*(\varkappa+1)}$ und statt r $h^{(\varkappa+1)}$ neue $h^{*(\varkappa+1)}$ durch diejenigen linearen Transformationen ein, r welche die Gleichungen

$$L^{(\varkappa+1)}(l^{(\varkappa+1)}; x; \tau) = L^{(\varkappa+1)}(l^{*(\varkappa+1)}; x^*; \tau),$$
$$L^{(\varkappa+1)}(h^{(\varkappa+1)}; u; \tau) = L^{(\varkappa+1)}(h^{*(\varkappa+1)}; u^*; \tau)$$

stehen; diese Transformationen stehen wegen

$$L^{(\varkappa+1)}\left(h^{(\varkappa+1)}; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial \tau}\right) L^{(\varkappa+1)}(l^{(\varkappa+1)}; x; \tau)$$
$$= L^{(\varkappa+1)}\left(h^{*(\varkappa+1)}; \frac{\partial}{\partial x^*}; \frac{\partial}{\partial \tau}\right) L^{(\varkappa+1)}(l^{*(\varkappa+1)}; x^*; \tau),$$

h. $\sum h^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}} l^{(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}} = \sum h^{*(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}} l^{*(\varkappa+1)}_{\lambda_{\varkappa+1}}$, in der Beziehung

$$(l^{(\varkappa+1)}) = Q(l^{*(\varkappa+1)}), \quad (h^{(\varkappa+1)}) = Q'^{-1}(h^{*(\varkappa+1)}).$$

bestehen nun die Gleichungen

$$F^{(\varkappa)}(a; l^{(\varkappa+1)}; x; \tau) = F^{(\varkappa)}(a^*; l^{*(\varkappa+1)}; x^*; \tau),$$
$$F^{(\varkappa)}(b; h^{(\varkappa+1)}; u; \tau) = F^{(\varkappa)}(b^*; h^{*(\varkappa+1)}; u^*, \tau),$$

s welchen

$$^{(\varkappa)}\left(b; h^{(\varkappa+1)}; \frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial \tau}\right) F^{(\varkappa)}(a; l^{(\varkappa+1)}; x; \tau)$$
$$= F^{(\varkappa)}\left(b^*; h^{*(\varkappa+1)}; \frac{\partial}{\partial x^*}; \frac{\partial}{\partial \tau}\right) F^{(\varkappa)}(a^*; l^{*(\varkappa+1)}; x^*; \tau)$$

gt. Hiernach ist:

$$\mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a)(h^{(\varkappa+1)}; l^{(\varkappa+1)}) = \mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b^*)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a^*)(h^{*(\varkappa+1)}; l^{*(\varkappa+1)}),$$

h.

$$Q^{-1}\mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a)\,Q = \mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b^*)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a^*),$$

d hieraus folgt:

$$|\mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a) + \lambda\,\mathsf{E}| = |\mathsf{A}'^{(\varkappa)}(b^*)\,\mathsf{A}^{(\varkappa)}(a^*) + \lambda\,\mathsf{E}|$$

d insbesondere

$$\Delta^{(\varkappa)}(a; b) = \Delta^{(\varkappa)}(a^*; b^*).$$

Kapitel VI.

Die invariante Konstruktion des Resultantenproduktes $R(a)\cdot R(b)$.

§ 37. *Wir machen nun die Voraussetzungen:*

$$m = n \quad \text{und} \quad s > s_1 + \ldots + s_n - n,$$

sowie $n > 1$. Die Resultante von $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ bezüglich $x_1, \ldots, x_n$ wird wieder mit $R(a)$ bezeichnet, so daß $R(b)$ die Resultante von $g_1(u), \ldots, g_n(u)$ bezüglich $u_1, \ldots, u_n$ ist. Aus den $\underset{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}{\Delta^{(\varkappa)}}(a)$ bilden wir nach (2) und (2′) die Funktionen $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}(a)$ der Unbestimmten a, so daß

$$\underset{p_\varkappa, p_{\varkappa+1}}{\Delta^{(\varkappa)}}(a) = R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}(a)\cdot R_{p_{\varkappa+1}}^{(\varkappa+1)}(a) \text{ für } \varkappa < k-1, \quad \Delta_{p_{k-1},1}^{(k-1)}(a) = R_{p_{k-1}}^{(k-1)}(a)$$

ist; wegen der in den §§ 30, 33 vorgenommenen Änderung der Bezeichnung unterscheiden sie sich von den gleichnamigen Funktionen des Kapitels III um von den a unabhängige von 0 verschiedene Faktoren. Nach den Sätzen I und II des § 14 sind die $R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}(a)$ Formen der a, und es ist

$$R(a) = c\cdot R_1^{(0)}(a),$$

worin c ein von den a unabhängiger Faktor ist.

Setzt man nun

$$R^{(\varkappa)}(a;b) = \sum_{p_\varkappa} R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}(a)\cdot R_{p_\varkappa}^{(\varkappa)}(b),$$

so ist die Invariante (§ 36) $\Delta^{(\varkappa)}(a;b)$ *nach* (42) *durch*

$$\Delta^{(\varkappa)}(a;b) = R^{(\varkappa)}(a;b)\cdot R^{(\varkappa+1)}(a;b) \quad \textit{für } \varkappa < k-1, \tag{45}$$

$$\Delta^{(k-1)}(a;b) = R^{(k-1)}(a;b)$$

gegeben und daher

$$R^{(\varkappa)}(a;b) = \frac{\Delta^{(\varkappa)}(a;b)\cdot\Delta^{(\varkappa+2)}(a;b)\ldots}{\Delta^{(\varkappa+1)}(a;b)\cdot\Delta^{(\varkappa+3)}(a;b)\ldots}.$$

Die Formen $R^{(\varkappa)}(a;b)$ sind daher ebenfalls Invarianten des Grundformensystems $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $g_1(u), \ldots, g_n(u)$. Insbesondere ist

$$R^{(0)}(a;b) = R_1^{(0)}(a)\cdot R_1^{(0)}(b)$$

und daher $R(a)\cdot R(b) = c^2\cdot R^{(0)}(a;b)$; damit ist bewiesen:

Satz III. *Mittelst der unter Zugrundelegung einer Gradzahl* $s > s_1 + \ldots + s_n - n$ *gebildeten Invarianten* $\Delta^{(\varkappa)}(a;b)$ *des Grundformensystems* $f_1(x), \ldots, f_n(x)$, $g_1(u), \ldots, g_n(u)$ *wird das Resultantenprodukt durch*

$$R(a)\cdot R(b) = c^2\cdot\frac{\Delta^{(0)}(a;b)\cdot\Delta^{(2)}(a;b)\ldots}{\Delta^{(1)}(a;b)\cdot\Delta^{(3)}(a;b)\ldots} \tag{46}$$

sgedrückt, worin c^2 von den Unbestimmten a und b unabhängig ist. Dabei nn $\Delta^{(\varkappa)}(a;b)$ mittelst $F^{(\varkappa)} = (L^{(\varkappa+1)})_{x^{(\varkappa+1)}=f(x)}$ und $G^{(\varkappa)} = (H^{(\varkappa+1)})_{x^{(\varkappa+1)}=g(x)}$ rch (44), (43) definiert werden.

Nach den §§ 16 und 30 ist c^2 als bekannt anzusehen.

§ 38. Da jetzt $\sigma_0 = \varrho_0$ ist, so ist

$$\Delta^{(0)}(a;b) = |\mathsf{A}^{(0)} \cdot \mathsf{B}'^{(0)}|.$$

Für ein Wertsystem der a ist, wenn $\bar{a}$ die zu den a konjugiertkomexen Größen sind, die Eigenschaft $\Delta^{(0)}(a;\bar{a}) \neq 0$ gleichbedeutend mit r Eigenschaft $R(a) \neq 0$, da nach §§ 14 und 33 beide mit Rang $\mathsf{A}^{(0)} = \varrho_0$ eichbedeutend sind. *Der nach der letzten Bemerkung des* § 35 *leicht zu ldende Ausdruck $\Delta^{(0)}(a;\bar{a})$ kann also als Ersatz für die schwieriger zu ldende Resultante $R(a)$ dienen.*

$\Delta^{(0)}(a;b)$ ist bezüglich der Unbestimmten a und b durch $R(a)\cdot R(b)$ ilbar: $c^2 \cdot \Delta^{(0)}(a;b) = R(a)\cdot R(b)\cdot R^{(1)}(a;b)$.

§ 39. Die allgemeineren Resultate des § 32 lassen sich für unseren all mittelst der Formen $R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}$ verifizieren. Es sind nämlich die $\varrho_\varkappa$-reihigen eterminanten der Matrizen $\mathsf{A}^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{B}'^{(\varkappa)}$ und $\mathsf{B}'^{(\varkappa)} \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)}$ durch

$$\pm |\mathsf{A}^{(\varkappa)}_{p_\varkappa,\ldots} \cdot (\mathsf{B}^{(\varkappa)}_{p'_\varkappa,\ldots})'| = R^{(\varkappa)}_{p_\varkappa}(a)\, R^{(\varkappa)}_{p'_\varkappa}(b) \cdot R^{(\varkappa+1)}(a;b) \quad \text{für } \varkappa < k-1,$$

$$= R^{(k-1)}_{p_{k-1}}(a)\, R^{(k-1)}_{p'_{k-1}}(b) \quad \text{für } \varkappa = k-1$$

$$\mathsf{B}^{(\varkappa)}_{\ldots,p_{\varkappa+1}})' \cdot \mathsf{A}^{(\varkappa)}_{\ldots,p'_{\varkappa+1}}| = R^{(\varkappa)}(a;b) \cdot R^{(\varkappa+1)}_{p_{\varkappa+1}}(b)\, R^{(\varkappa+1)}_{p'_{\varkappa+1}}(a) \quad \text{für } \varkappa < k-1,$$

$$= R^{(k-1)}(a;b) \quad \text{für } \varkappa = k-1$$

geben. Ist nun für ein Wertsystem der a und b $R(a) \neq 0$ und $R(b) \neq 0$, sind $R^{(\varkappa)}_1(a), R^{(\varkappa)}_2(a), \ldots$ nicht alle $= 0$ und $R^{(\varkappa)}_1(b), R^{(\varkappa)}_2(b), \ldots$ nicht le $= 0$. Es ist daher im Falle $0 < \varkappa < k$ jede der Eigenschaften

$$R(a) \neq 0, \quad R(b) \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Rang } \mathsf{B}'^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} = \varrho_\varkappa$$

d

$$R(a) \neq 0, \quad R(b) \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Rang } \mathsf{A}^{(\varkappa-1)}\mathsf{B}'^{(\varkappa-1)} = \varrho_{\varkappa-1}$$

eichbedeutend mit der Eigenschaft:

$$R(a) \neq 0, \quad R(b) \neq 0 \quad \textit{und} \quad R^{(\varkappa)}(a;b) \neq 0;$$

d aus $R(a) \neq 0$ und $R(b) \neq 0$ folgt Rang $\mathsf{A}^{(k-1)}\mathsf{B}'^{(k-1)} = \varrho_{k-1}$.

Dazu tritt aber in unserem Falle wegen $\sigma_0 = \varrho_0$ noch die weitere tsache: *Wenn $R(a) \neq 0$ und $R(b) \neq 0$ ist, so ist* Rang $\mathsf{B}'^{(0)}\mathsf{A}^{(0)} = \varrho_0$, $^{(0)}(a;b) \neq 0$.

Ist $0 < \varkappa < k-1$ und für ein Wertsystem der a und b $\Delta^{(\varkappa-1)}(a;b) \neq 0$ und $\Delta^{(\varkappa+1)}(a;b) \neq 0$, so ist auch $\Delta^{(\varkappa)}(a;b) \neq 0$; ist $\Delta^{(k-2)}(a;b) \neq 0$, so ist auch $\Delta^{(k-1)}(a;b) \neq 0$.

Die Bedeutung des Nichtverschwindens der Invariante $\Delta^{(\varkappa)}(a;b)$ ist aus § 33 zu entnehmen.

Will man den Ansatz (46) *heuristisch verstehen, so muß man die Formen* $R^{(\varkappa)}(a;b)$ *vermeiden und an* §§ 32, 33 *anknüpfen.* Wir verstehen für $\varkappa > 0$ unter $\mathfrak{M}^{(\varkappa)}$ die Menge derjenigen Wertsysteme der a und b, für welche

$$R(a) \neq 0, \quad R(b) \neq 0 \quad \text{und} \quad \text{Rang } \mathsf{B}'^{(\varkappa)}\mathsf{A}^{(\varkappa)} < \varrho_\varkappa$$

ist. Mit $\mathfrak{M}^{(0)}$ bezeichnen wir die Menge derjenigen Wertsysteme der a und b, welche der Gleichung $R(a) \cdot R(b) = 0$ genügen. Dann kann die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}^{(0)}$ und $\mathfrak{M}^{(1)}$ durch $\Delta^{(0)}(a;b) = 0$ charakterisiert werden; die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}^{(1)}$ und $\mathfrak{M}^{(2)}$ durch $R(a) \neq 0$, $R(b) \neq 0$, $\Delta^{(1)}(a;b) = 0$; die Vereinigungsmenge von $\mathfrak{M}^{(2)}$ und $\mathfrak{M}^{(3)}$ durch $R(a) \neq 0$, $R(b) \neq 0$, $\Delta^{(2)}(a;b) = 0$; usw.; die Menge $\mathfrak{M}^{(k-1)}$ durch $R(a) \neq 0$, $R(b) \neq 0$, $\Delta^{(k-1)}(a;b) = 0$.

(Eingegangen am 13. Januar 1926.)

Über ein geometrisches Theorem und seine Anwendung auf die partiellen Differentialgleichungen vom elliptischen Typus*).

Von

Serge Bernstein in Charkow.

1. Die vorliegende Arbeit enthält den Beweis und einige Anwendungen ines Theorems meiner Note „Sur une généralisation des théorèmes de iouville et de M. Picard“ [1]).

Das geometrische Theorem, welches ich hier beweisen will, lautet ie folgt:

Eine Fläche $z = f(x, y)$, welche für alle Werte von x, y stetige par-elle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, und deren Gauß-che Krümmung nirgends positiv ist, jedoch nicht identisch verschwindet, ann nicht ständig zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ verlaufen.

Aus diesem Theorem folgt für die partiellen Differentialgleichungen om elliptischen Typus leicht der nachstehende sehr allgemeine Satz:

Ist $z(x, y)$ eine beschränkte Funktion, die für alle Werte von x, y etige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt und einer ifferentialgleichung der Form

$$) \qquad Ar + 2Bs + Ct = 0$$

nügt, wo A, B, C endliche Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind, r welche $AC - B^2 > 0$ gilt, so ist die Funktion $z(x, y)$ eine Konstante.

Dieser Satz ist augenscheinlich eine Verallgemeinerung des grund-

*) Die vorliegende Note ist die Übersetzung des bereits im Jahre 1914 in den tteilungen der Mathematischen Gesellschaft in Charkow erschienenen Aufsatzes ur un théorème de géométrie et son application aux équations aux dérivées par-lles du type elliptique.“ Für die freundliche Übersetzung sind die Schriftleitung d der Verfasser Herrn Tibor Radó in Szeged zu Dank verpflichtet.

[1]) Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 10. Oktober 1910.

legenden Liouvilleschen Theorems über harmonische Funktionen und umfaßt offenbar auch den Fall der Minimalflächen. Jedoch ermöglicht die besondere Form der Differentialgleichung dieser Flächen einen kleinen rechnerischen Kunstgriff, durch welchen ich eine besondere Eigenschaft der Minimalflächen begründe, wodurch sich dieselben wesentlich von den harmonischen Flächen unterscheiden. Diese Eigenschaft besteht im folgenden.

Eine reelle Minimalfläche $z = f(x, y)$, welche für alle reellen Werte von x, y stetige partielle Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, ist eine Ebene. Mit anderen Worten: die Funktion z, die bekanntlich analytisch ist, muß in jedem anderen Falle reelle Singularitäten im Endlichen haben; während also die Mannigfaltigkeit der ganzen (rationalen und transzendenten) harmonischen Funktionen so groß ist, gibt es eine einzige ganze Funktion, die der Gleichung der Minimalflächen

$$(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t = 0$$

genügt, nämlich die lineare Funktion $z = ax + by + c$.

2. Wir wollen mit dem Beweis eines Lemmas beginnen, welches wir in der Folge oft anwenden werden:

Lemma. *Sei $\mathfrak{B}$ ein abgeschlossenes Gebiet. Darin sei $z = f(x, y)$ eine Funktion der reellen Veränderlichen x, y, welche stetige Ableitungen der beiden ersten Ordnungen besitzt, und $z < 0$ im Innern, sowie $z = 0$ in den Randpunkten von $\mathfrak{B}$. Ferner sei in allen Punkten, wo bei einem beliebig kleinen, aber festen positiven N die Ungleichung $p^2 + q^2 < N$ gilt,*

$$rt - s^2 \leqq 0.$$

Dann kann das Gebiet $\mathfrak{B}$ nicht beschränkt sein.

In der Tat, aus der Annahme der Beschränktheit des Gebietes $\mathfrak{B}$ würde folgen, daß die Funktion z ein absolutes Minimum $m < 0$ in einem inneren Punkte $\mathfrak{B}$ erreicht, wo dann $p = q = 0$ ist. Wird dieser Punkt O zum Anfangspunkt gewählt, so kann man, da im Punkte O notwendig $rt - s^2 = 0$ ist, setzen

$$z = m + (\alpha x + \beta y)^3 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 x^2 + 2\varepsilon_2 xy + \varepsilon_3 y^2),$$

wo α, β Konstanten sind (die auch verschwinden können), und $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ mit $x^2 + y^2$ gegen Null gehen. Wir betrachten jetzt die Funktion

$$z_1 = m + \frac{h}{2}(x^2 + y^2) \qquad (h > 0),$$

wo wir durch hinreichend kleine Wahl von h erreichen können, daß in allen Punkten von $\mathfrak{B}$ die Ungleichungen $z_1 < 0$ und $h^2(x^2 + y^2) < N$ bestehen.

Dann hat man in allen Randpunkten von $\mathfrak{B}$

$$\delta = z - z_1 > 0.$$

Ist nun h fest gewählt, so kann man den Punkt O mit einem hinhend kleinen Kreise umgeben, in welchem wenigstens ein Punkt liegt, wo

$$\delta = (\alpha x + \beta y)^2 + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - h)x^2 + \varepsilon_2 xy + \frac{1}{2}(\varepsilon_3 - h)y^2 < 0.$$

Die Funktion δ wird also ebenfalls ein absolutes Minimum im Innern $\mathfrak{B}$ annehmen, und in demjenigen Punkte, wo dieses Minimum erreicht d, hat man

$$\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 \geqq 0, \quad \frac{\partial\delta}{\partial x} = \frac{\partial\delta}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} \geqq 0, \quad \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} \geqq 0,$$

raus folgt

$$rt - s^2 = \left[h + \frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\right]\left[h + \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right] - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

$$= h^2 + h\left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\delta}{\partial y^2}\right) + \left[\frac{\partial^2\delta}{\partial x^2}\frac{\partial^2\delta}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2\delta}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] \geqq h^2 > 0,$$

$$p^2 + q^2 = \left(\frac{\partial z_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 = h^2(x^2 + y^2) < N.$$

Das Nebeneinanderbestehen beider Ungleichungen widerspricht aber eren Voraussetzungen, und das Lemma ist bewiesen.

3. Wir können nun zum Beweis unseres geometrischen Theorems ergehen.

Theorem. *Eine Fläche, die durch eine, für alle Werte von x, y lärte, zweimal stetig differentiierbare Funktion $z = f(x, y)$ dargestellt rd, und deren Gaußsche Krümmung weder positiv ist, noch identisch schwindet, kann nicht ständig zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ halten sein.*

In der Tat, es werde angenommen, daß unsere Fläche zwischen den den Ebenen $z = \pm h$ enthalten ist. Wir können dann durch geeignete rlegung des Koordinatensystems erreichen, daß im Anfangspunkte $p_0 = 0$, > 0, $r_0 t_0 - s_0^2 < 0$ wird. Dann hat im Punkte $x = y = 0$ die Berungsebene unserer Fläche die Gleichung

$$z_1 = q_0 y;$$

se Berührungsebene schneidet die Fläche in vier getrennten Kurvenzeigen [2]), welche in der Umgebung des Anfangspunktes vier getrennte

[2]) Es genügt die Bemerkung, daß in Polarkoordinaten

$$\delta = z - z_1 = \left(\frac{1}{2}r_0\cos^2\theta + s_0\cos\theta\sin\theta + \frac{1}{2}t_0\sin^2\theta + \varepsilon\right)\varrho^2,$$

ε und $\frac{\partial\varepsilon}{\partial\theta}$ mit ϱ gegen Null gehen.

Gebiete $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \Omega_4$ der xy-Ebene bestimmen, so daß in Ω_1, Ω_3 die Ungleichung $\delta = z - z_1 < 0$ und in Ω_2, Ω_4 die Ungleichung $\delta > 0$ gilt. Nach Lemma 2 kann keines dieser Gebiete, deren jedes wir durch Hinzufügung seiner Randpunkte $\delta = 0$ erweitern, beschränkt sein.

Andererseits sind die Gebiete Ω_1 und Ω_3 der xy-Ebene notwendig oberhalb der Geraden $y = -\frac{h}{q_0}$ gelegen, weil aus der Voraussetzung $z > -h$ für $y \leqq -\frac{h}{q_0}$ die Beziehung $\delta = z - q_0 y > 0$ folgt; ebenso müssen die Gebiete Ω_2 und Ω_4 unterhalb der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ liegen wegen $z < h$. Ich behaupte überdies, daß wenigstens eines der beiden Gebiete Ω_1 und Ω_3 ebenfalls unterhalb der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ verbleibt. In der Tat, die Gebiete Ω_1 und Ω_3 können kein zusammenhängendes Gebiet bilden, sonst *könnte man durch den Anfangspunkt* eine geschlossene Kurve in (Ω_1, Ω_3) ziehen, die dann eines der beiden Gebiete Ω_2, Ω_4 im Innern enthalten würde, was nicht möglich ist, weil diese Gebiete nicht beschränkt sind. Wenn also beide Gebiete Ω_1 und Ω_3 Punkte der Geraden $y = \frac{h}{q_0}$ enthalten würden, so müßten auf dieser Geraden auch Randpunkte derselben liegen; dies ist aber unmöglich, weil in den Randpunkten $\delta = z - q_0 y = 0$ ist.

Wir gelangen also zur Folgerung, daß wenigstens eines der beiden Gebiete mit geradem Index und wenigstens eines der beiden Gebiete mit ungeradem Index in der Weise sich ins Unendliche erstreckt, daß es beständig zwischen den beiden Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ verbleibt. Wesentlich ist noch die Bemerkung, daß wenigstens eines dieser Gebiete nur nach der einen Seite ins Unendliche zieht. Es seien in der Tat Ω_1 und Ω_2 die beiden Gebiete, die zwischen unseren Geraden liegen und sich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken; man kann dann in denselben je eine Linie S_1 bzw. S_2 zeichnen, welche nach beiden Seiten ins Unendliche gehen, und da der Anfangspunkt Randpunkt von Ω_1 und Ω_2 ist, so liegt derselbe zwischen diesen beiden Linien, so daß ein drittes Gebiet sich unmöglich nach beiden Seiten ins Unendliche erstrecken kann. Da nun die beiden Gebiete Ω_3 und Ω_4 zwischen S_1 und S_2 gelegen sein müssen, so sind dieselben a fortiori zwischen den Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ enthalten, und folglich erstrecken sie sich nur nach der einen Seite ins Unendliche.

Nach dieser Feststellung können wir also annehmen, daß das Gebiet Ω_1 zwischen den beiden Geraden $y = \pm \frac{h}{q_0}$ liegt und sich nur in der positiven x-Richtung ins Unendliche erstreckt. Wir betrachten nun eine Gerade $x = x_0$ der xy-Ebene; in den in Ω_1 enthaltenen Punkten derselben hat

n $\delta < 0$. Sei $u(x_0) = \delta(x_0, y_0)$ das absolute Minimum von $\delta(x_0, y)$ die betrachteten Punkte.

Wir wollen die so erklärte Funktion $u(x)$ für wachsende Werte von untersuchen. Wir bemerken, daß $u(x) < 0$, daß aber für hinreichend eine Werte von x die Funktion $u(x)$ beliebig wenig von Null abweicht; n kann folglich zwei Werte x_0, x_0' derart bestimmen, daß $x_0 > x_0'$ und $x_0) - u(x_0') < 0$.

Wir können alsdann beweisen, daß für $x_1 > x_0 > x_0'$ die Ungleichung

$$|u(x_1)| \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'} [u(x_0') - u(x_0)]$$

stehen muß.

In der Tat, die Ungleichung (3) ist mit Rücksicht auf $u(x) < 0$ der genden gleichwertig:

$$-u(x_1) \geqq \frac{x_1 - x_0'}{x_0 - x_0'} [u(x_0') - u(x_0)].$$

jene also nicht erfüllt, so muß man haben

$$-\frac{x_0 - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + u(x_0) - u(x_0') < 0.$$

e Funktion

$$v(x, y) = -\frac{x - x_0'}{x_1 - x_0'} u(x_1) + \delta(x, y) - u(x_0')$$

rd daher negativ für $x = x_0$, $y = y_0$; es gibt also ein Gebiet $\mathfrak{B}$, wo < 0 ist, und dieses Gebiet ist beschränkt, da $v \geqq 0$ ist für $x = x_0'$, für $< x < x_1$ mit $\delta = 0$, und für $x = x_1$.

Dies steht aber im Widerspruche mit dem Lemma aus Nr. 2, da

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right)^2 = r t - s^2 \leqq 0.$$

Die Ungleichung (3) muß somit erfüllt sein. Wenn aber x_1 hinchend groß ist, so widerspricht diese Ungleichung der Voraussetzung $| < h$.

Das Theorem ist folglich bewiesen.

Wenn wir unser Lemma in seiner allgemeinen Fassung heranziehen, können wir unser Theorem wie folgt verallgemeinern.

4. Verallgemeinerung. *Eine Fläche, die durch die zweimal stetig ferentiierbare Funktion $z = f(x, y)$ dargestellt wird, und deren ußsche Krümmung negativ ist in einem gewissen Punkte, wo die igung $p^2 + q^2$ der Berührungsebene $= q_0^2 > 0$ ausfällt, und (möglicherise) positiv nur in solchen Punkten, wo $p^2 + q^2 > N > q_0^2$ ist*[3]*), kann*

[3]) Es würde z. B. genügen, daß die Krümmung in der Umgebung der Punkte, wo $q = 0$, nicht positiv ist, und daß in der Umgebung wenigstens eines dieser Punkte Krümmung negativ wird.

nicht für alle Werte von x, y zwischen zwei festen Ebenen $z = \pm h$ enthalten sein.

In der Tat, die ganze Schlußweise des vorangehenden Beweises bleibt ohne Änderung bestehen bis zur Diskussion der durch (4) gegebenen Funktion $v(x, y)$. Nur können wir nicht mehr die Unmöglichkeit behaupten, daß das Gebiet $\mathfrak{B}$, wo $v < 0$ ausfällt, beschränkt ist. Dieses Gebiet könnte nur dann beschränkt sein, wenn es Punkte enthielte, wo

$$\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right| = \left| -\frac{1}{x_1 - x_0} u(x_1) + p \right| < \varepsilon \quad \text{und} \quad \left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| = |q - q_0| < \varepsilon,$$

sowie $rt - s^2 > 0$ ist, bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$. In solchen Punkten hat man aber nach Voraussetzung

$$p^2 + q^2 > N,$$

also

$$\left[-\frac{1}{x_1 - x_0'} u(x_1) \pm \varepsilon\right]^2 + (q_0 \pm \varepsilon)^2 > N,$$

und daher

$$|u(x_1)| > (x_1 - x_0')\left[\sqrt{N - (q_0 + \varepsilon)^2} - \varepsilon\right], \tag{5}$$

mit beliebig kleinem $\varepsilon > 0$. Man findet also anstatt der Ungleichung (3) die Ungleichung (5); diese letztere widerspricht aber ebenfalls der Tatsache $|z| < h$. Unsere Verallgemeinerung ist folglich bewiesen.

Bemerkung. Von Wichtigkeit ist die Bemerkung, daß die Funktionen, die wir untersucht und für welche wir die Unmöglichkeit der Ungleichung $|z| < h$ bewiesen haben, sehr wohl die Bedingung $z < h$ erfüllen können. Es genügt, um sich hiervon zu überzeugen, die durch die Funktion

$$z = h - e^{x - y^2}$$

dargestellte Fläche zu betrachten. Man stellt unmittelbar fest, daß

$$rt - s^2 = -2e^{2x - 2y^2} < 0$$

für alle Werte von x und y, und daß gleichzeitig

$$z < h.$$

Auch sei bemerkt, daß unser Theorem für solche Flächen, deren Krümmung identisch verschwindet, nicht mehr zu gelten braucht, da die Zylinderfläche $z = e^{-x^2}$ die Bedingung $|z| < 1$ erfüllt.

5. Theorem. *Wenn eine Funktion z, die für alle Werte von x, y zweimal stetig differentiierbar ist und der Gleichung*

$$Ar + 2Bs + Ct = 0 \quad \text{mit} \quad AC - B^2 > 0$$

genügt, wo A, B, C irgendwelche endliche Funktionen von x, y, z, p, q, r, s, t sind, beschränkt ist, so ist dieselbe eine Konstante.

In der Tat, man setze $rt - s^2 = \lambda$. Unsere Gleichung lautet dann

$$Ar + 2Bs + C\frac{s^2+\lambda}{r} = 0;$$

raus folgt, daß $\lambda \leqq 0$ ist, und daß $\lambda = 0$ nur für $r = s = t = 0$ ein-ten kann. Wenn also nirgends $\lambda < 0$ und somit überall $\lambda = 0$ ist, so ssen p und q Konstante sein, welche aber verschwinden müssen, nn z beschränkt bleibt; z ist also eine Konstante. Wenn aber die gleichung $\lambda < 0$ in wenigstens einem Punkte besteht, so kann die nktion z nach dem vorigen Theorem nicht beschränkt sein.

Das hiermit bewiesene Theorem stellt diejenige Verallgemeinerung des ouvilleschen Theorems dar, die ich vor vier Jahren ausgesprochen habe.

Aus diesem Theorem werden wir nun einen Satz über Minimalflächen gern.

6. Theorem. *Wenn eine Minimalfläche S durch die Gleichung*

$$z = f(x, y)$$

rgestellt ist, wobei f für alle reellen Werte von x, y stetige Ableitungen beiden ersten Ordnungen besitzt, so ist die Fläche S eine Ebene.

In der Tat, man bilde unter der Voraussetzung

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0$$

jenige Differentialgleichung, welcher $u = \operatorname{arctg} p$ genügt. Wenn man e Gleichung (6) nach x deriviert[4]), so ergibt sich

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + 2p(rt - s^2) = 0$$

er, indem man t eliminiert,

$$(1+q^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{2pr^2}{1+p^2}\right) - 2pq\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y} - \frac{2prs}{1+p^2}\right) + (1+p^2)\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{2ps^2}{1+p^2}\right) = 0.$$

[4]) Wir nehmen hier die Existenz der Ableitungen dritter Ordnung an; dies folgt r aus der Tatsache, daß die Existenz der Ableitungen zweiter Ordnung sogar die alytizität der Funktion nach sich zieht (vgl. diesbezüglich meine Arbeiten über das ichletsche Problem: Math. Annalen 69, S. 132 und Annales de l'École Nor-le 29, S. 482 und die Arbeit von L. Lichtenstein „Über den analytischen Charakter Lösungen regulärer zweidimensionaler Variationsprobleme", Bulletin de l'Academie Sciences de Cracovie (1912) S. 915—941).

Offenbar hat man nun

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}}{1+p^2} - \frac{2pr^2}{(1+p^2)^2}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}}{1+p^2} - \frac{2psr}{(1+p^2)^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}}{1+p^2} - \frac{2ps^2}{(1+p^2)^2}.$$

Es genügt also u der Gleichung

$$(1+q^2)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2pq\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (1+p^2)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

und folglich kann die Funktion $u = \operatorname{arctg} p$ nur dann in der ganzen Ebene beschränkt sein, wenn sie eine Konstante ist. Nun aber wird nach Voraussetzung p für keinen endlichen Wert von x, y unendlich; für alle Werte von x, y hat man folglich $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, woraus folgt, daß u eine Konstante ist. Man erkennt auf diese Weise, daß p und auch q eine Konstante und folglich die Fläche z eine Ebene ist.

(Eingegangen am 23. März 1925.)

einem Satze von S. Bernstein über Minimalflächen im Großen.

Von

Tibor Radó in Szeged (Ungarn).

Von Herrn S. Bernstein rührt der folgende Satz her:

Ist $z(x, y)$ eine in der ganzen endlichen xy-Ebene reguläre[1]) *Lösung partiellen Differentialgleichung der Minimalflächen*

$$(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t = 0,$$

ist die durch die Gleichung $z = z(x, y)$ dargestellte Minimalfläche eine ne[2]).

Es sind also die Daseinsmöglichkeiten der Lösungen von (I) weit beänkter als bei den nahe verwandten harmonischen Funktionen; eine der ganzen endlichen xy-Ebene reguläre harmonische Funktion kann recht beliebig sein, der reelle Teil einer jeden ganzen transzendenten ktion ist eine solche. Allerdings gibt es auch für harmonische Funkn ähnlich lautende Sätze; so gilt beispielsweise der Satz, daß eine in ganzen endlichen Ebene reguläre harmonische Funktion, welche nur tive Werte annimmt, eine Konstante ist. Es werde daher ausdrücklich erkt, daß beim S. Bernsteinschen Satze über die Funktion $z(x, y)$ e weiteren Voraussetzungen gemacht werden.

Wir wollen in dieser Note einen elementaren Beweis für diesen Satz n. Dieser beruht, ebenso wie die klassische Theorie der Minimalhen, auf den Beziehungen zur Funktionentheorie, und zerfällt dement-

[1]) Eine Lösung heißt regulär, wenn sie nebst ihren Ableitungen erster und zweiter ung stetig ist. Bekanntlich ist jede reguläre Lösung der Gleichung (I) analytisch; dieser Tatsache werden wir indessen keinen Gebrauch machen.

[2]) Vgl. den Enzyklopädieartikel II. C. 12 von L. Lichtenstein, Neuere Entlung der Theorie partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom ellipen Typus, S. 1324, Fußnote 120. Die dort zitierte Abhandlung des Herrn ernstein ist mir erst während der Korrektur zugänglich geworden (Vgl. die in m Hefte S. 551—558 veröffentlichte Übersetzung jener Arbeit.)

sprechend in einen flächentheoretischen und in einen funktionentheoretischen Teil. Es ist indessen von vornherein klar, daß die Sätze der Flächentheorie über Minimalflächen auf den vorliegenden Fall nicht ohne weiteres angewendet werden durften. Diese Sätze werden nämlich in der Regel durch Betrachtungen hergeleitet, welche für die Umgebung der Punkte, in welchen die Gaußsche Krümmung der Fläche verschwindet, versagen, während wir gerade das identische Verschwinden dieser Krümmung erweisen müssen. Ich habe daher die notwendigen Formeln ausführlich hergeleitet. Im funktionentheoretischen Teile verwende ich ein Lemma, welches eine naheliegende Verallgemeinerung bekannter Lindelöfscher Resultate darstellt und welches ich gelegentlich einer analogen Untersuchung über Riemannsche Flächen bewiesen habe. Da der ganz elementare Beweis dieses Lemmas in eben dieser Zeitschrift veröffentlicht wurde[3]), so wird es wohl genügen, den Wortlaut desselben anzuführen.

Lemma. *Sei G ein einfach zusammenhängendes Gebiet in der komplexen ζ-Ebene, welches innerhalb eines Kreises K liegt, ohne das Innere von K auszufüllen. Sei ferner $f(\zeta)$ eine in G reguläre analytische Funktion, welche in allen solchen Randpunkten von G verschwindet, welche innerhalb (also nicht am Rande) von K liegen.*

Dann ist $f(\zeta) \equiv 0$.

Es werde hervorgehoben, daß über *die Natur der Begrenzung* von G keinerlei Voraussetzung gemacht wird. Gerade dieser Umstand wird es ermöglichen, den Beweis des S. Bernsteinschen Satzes ohne weitläufige topologische Überlegungen zu Ende zu führen.

1. Es sei also $z(x, y)$ eine in der ganzen endlichen xy-Ebene reguläre Lösung von (I), und sei M die durch $z = z(x, y)$ gegebene Minimalfläche. Wir wollen zunächst zeigen, daß M *im Großen* umkehrbar eindeutig und konform auf ein ebenes Gebiet abgebildet werden kann. Dies folgt zwar unmittelbar aus dem Fundamentalsatze der Uniformisierungstheorie; da wir aber elementar vorgehen wollen und da überdies unsere weiteren Schlüsse gerade auf gewissen expliziten Formeln beruhen, so werden wir diese Tatsache direkt begründen. Wir setzen in üblicher Weise:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad W = (1 + p^2 + q^2)^{1/2},$$

$$r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

---

[3]) Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit, Math. Zeitschr. 20, S. 2, Lemma.

nn leitet man durch Ausrechnen die Identitäten her:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{p}{W}\right)=\frac{1}{W^3}[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{pq}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1+q^2}{W}\right)=\frac{p}{W^3}[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t],$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1+p^2}{W}\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{pq}{W}\right)=-\frac{q}{W^3}[(1+q^2)r-2pqs+(1+p^2)t].$$

ch Gleichung (I) sind die rechten Seiten gleich Null. Aus diesen *Inte-bilitätsbedingungen* folgt dann die Existenz dreier in der ganzen end-nen xy-Ebene eindeutiger Hilfsfunktionen $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, welche die Glei-ungen erfüllen[4]):

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial x}=\frac{q}{W}, \qquad \frac{\partial\omega_1}{\partial y}=-\frac{p}{W},$$

$$\frac{\partial\omega_2}{\partial x}=\frac{pq}{W}, \qquad \frac{\partial\omega_2}{\partial y}=\frac{1+q^2}{W},$$

$$\frac{\partial\omega_3}{\partial x}=\frac{1+p^2}{W}, \qquad \frac{\partial\omega_3}{\partial y}=\frac{pq}{W}.$$

r führen nun neue Veränderliche α, β durch die Formeln ein:

$$\alpha=x, \qquad \beta=\omega_2(x,y).$$

r die Funktionaldeterminante erhalten wir:

$$\frac{\partial(\alpha,\beta)}{\partial(x,y)}=\frac{1+q^2}{W}.$$

Funktionaldeterminante ist also überall von Null verschieden, die Ab-dung auf die $\alpha\beta$-Ebene ist demnach *im Kleinen* sicher eineindeutig. *Abbildung ist aber auch im Großen eineindeutig.* In der Tat, wenn Punkt (x, y) eine Gerade $x=$ konst. im Sinne wachsender y-Werte chreibt, so bewegt sich der Bildpunkt (α, β) wegen $x=\alpha$ ebenfalls einer Geraden $\alpha=$ konst., immer im Sinne wachsender β-Werte, da $=\frac{1+q^2}{W}>0$ ist.

---

[4]) Wir verwenden hier den wohlbekannten Satz: Sind $u(x,y)$, $v(x,y)$ in einem ach zusammenhängenden Gebiete G nebst ihren Ableitungen erster Ordnung stetig besteht die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}=0,$$

ibt es eine in G eindeutige Funktion $w(x,y)$, so daß:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=u, \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=v.$$

Sei D das Bildgebiet in der $\alpha\beta$-Ebene. Wir berechnen nach den bekannten Formeln für implizite Funktionen, unter Beachtung von (II):

$$\text{(V)} \qquad \frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1, \quad \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$
$$\frac{\partial y}{\partial \alpha} = -\frac{pq}{1+q^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{W}{1+q^2}.$$

Ferner:

$$\text{(VI)} \qquad \frac{\partial z}{\partial \alpha} = p\frac{\partial x}{\partial \alpha} + q\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{p}{1+q^2},$$
$$\frac{\partial z}{\partial \beta} = p\frac{\partial x}{\partial \beta} + q\frac{\partial y}{\partial \beta} = \frac{qW}{1+q^2}.$$

Aus diesen Formeln ergibt sich:

$$\text{(VII)} \qquad \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2 = \frac{1+p^2+q^2}{1+q^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2$$
$$\frac{\partial x}{\partial \alpha}\frac{\partial x}{\partial \beta} + \frac{\partial y}{\partial \alpha}\frac{\partial y}{\partial \beta} + \frac{\partial z}{\partial \alpha}\frac{\partial z}{\partial \beta} = 0.$$

Die angegebene Abbildung der Minimalfläche M auf das Gebiet D der $\alpha\beta$-Ebene ist also konform[5]).

2. Wir zeigen weiter — und dies ist der wesentlichste Punkt des Beweises — daß *das Bildgebiet D mit der ganzen endlichen $\alpha\beta$-Ebene identisch ist.* Wir gehen davon aus, daß nach der allgemeinen Theorie der Minimalflächen die drei rechtwinkligen Koordinaten x, y, z harmonische Funktionen der isothermen Parameter α, β sind. Da wir aber die expliziten Formeln benötigen werden, so wollen wir dies direkt verifizieren. Wir berechnen zu dem Ende die Ableitungen der Hilfsfunktionen ω_1, ω_3 nach α und β auf Grund der Formeln:

$$\frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial \omega_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \alpha} + \frac{\partial \omega_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha},$$

usw. Indem wir (II), (V), (VI) beachten, bestätigen wir dann durch eine einfache Rechnung, die wohl dem Leser überlassen werden kann, die Formeln:

$$\text{(VIII)} \qquad \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \omega_1}{\partial \beta} = -\frac{\partial z}{\partial \alpha},$$
$$\frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial \omega_3}{\partial \beta} = -\frac{\partial y}{\partial \alpha}.$$

Es genügen hiernach die Funktionenpaare $\omega_1(\alpha, \beta)$, $z(\alpha, \beta)$ und $\omega_3(\alpha, \beta)$, $y(\alpha, \beta)$ den Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen;

[5]) Die verwendete Abbildung beruht auf dem Riemann-Beltramischen Satze, daß die Minimalfläche von jeder Schar paralleler Ebenen in den Kurven einer Isothermenschar geschnitten wird. Vgl. Darboux, Théorie générale des surfaces 1, S. 320.

lich sind ω_1 und z einerseits, ω_3 und y andererseits konjugiert har-nische Funktionen von α und β. Natürlich ist auch $x(\alpha, \beta) = \alpha$ monisch. Wird nun die komplexe Veränderliche

$$\zeta = \alpha + i\beta$$

geführt, so folgt weiter aus (VIII), daß die Funktionen

$$f_1(\zeta) = \omega_1(\alpha, \beta) + iz(\alpha, \beta),$$
$$f_3(\zeta) = \omega_3(\alpha, \beta) + iy(\alpha, \beta)$$

Gebiete D analytisch sind.

Wir nehmen nun an, daß entgegen unserer Behauptung das Bild-iet D mit der ganzen endlichen $\alpha\beta$-Ebene *nicht* identisch ist, daß D wenigstens einen endlichen Randpunkt hat, und werden nach-sen, daß diese Annahme zu einem Widerspruche führt.

Wir erinnern zunächst daran, daß D als topologisches Bild der end-en xy-Ebene einfach zusammenhängt. Dann stellen wir fest, daß die D reguläre harmonische Funktion $y(\alpha, \beta)$ in jedem endlichen Rand-kte von D unendlich wird. Genau: Ist (α_0, β_0) ein endlicher Rand-kt von D, und (α_n, β_n) eine Punktfolge in D, welche gegen diesen ndpunkt konvergiert, so gilt $|y(\alpha_n, \beta_n)| \to \infty$. Seien nämlich (x_n, y_n) entsprechenden Punkte in der xy-Ebene. Da die Abbildung umkehrbar deutig und stetig ist, so können diese Punkte keine Häufungsstelle im dlichen haben, es muß also gelten:

$$|x_n| + |y_n| \to \infty.$$

n ist nach den Transformationsformeln $x_n = \alpha_n$, also konvergiert die ge x_n gegen den endlichen Wert α_0, es muß also $|y_n| = |y(\alpha_n, \beta_n)|$ en ∞ konvergieren.

Nun ist $y(\alpha, \beta)$ nach (IX) der imaginäre Teil der Funktion $f_3(\zeta)$. se Funktion $f_3(\zeta)$ ist also in D regulär-analytisch und wird in jedem lichen Randpunkte von D bestimmt unendlich. Sei nun ζ_0 ein end-er Randpunkt von D. Dann können wir also zunächst einen Kreis K dem Mittelpunkte ζ_0 annehmen, in welchem $f_3(\zeta)$ nicht mehr ver-windet. Diejenigen Punkte von D, welche im Innern von K liegen, len eine nicht leere offene Punktmenge, welche als Durchschnitt zweier fach zusammmenhängender Gebiete wieder in (höchstens abzählbar viele) fach zusammenhängende Gebiete zerfällt. Ist G ein solches Gebiet, so en nach dem Bisherigen die folgenden Aussagen:

a) Das Gebiet G hängt einfach zusammen, liegt im Kreise K, füllt r das Innere dieses Kreises nicht aus (weil nämlich der Mittelpunkt ζ_0 ß kein Punkt von G ist).

b) Die Funktion

$$f(\zeta) = \frac{1}{f_3(\zeta)}$$

ist in G regulär und verschwindet in jedem Randpunkte von G, welcher innerhalb K liegt (weil nämlich ein solcher Randpunkt auch für das Gebiet D Randpunkt ist).

Nach dem in der Einleitung angeführten Lemma müßte also diese Funktion $f(\zeta)$ in G identisch verschwinden. Dies kann aber gewiß nicht der Fall sein, da $f(\zeta)$ den reziproken Wert einer in G endlichen Funktion darstellt und demzufolge in G überhaupt keine Nullstelle haben kann. Die Annahme, daß das Bildgebiet D im Endlichen gelegene Randpunkte hat, führt also zu einem Widerspruche. *Damit ist bewiesen, daß die durch die Formeln* (III) *erklärte, im Großen umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung der Minimalfläche M auf die ganze endliche $\alpha\beta$-Ebene erfolgt.*

3. Wir berechnen nun die Ableitungen $f_1'(\zeta)$, $f_3'(\zeta)$ und erhalten aus (IX), (VIII), (VI), (V):

$$\text{(X)} \qquad \begin{aligned} f_1'(\zeta) &= \frac{\partial \omega_1}{\partial \alpha} + i\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{\partial z}{\partial \beta} + i\frac{\partial z}{\partial \alpha} = \frac{qW}{1+q^2} + i\frac{p}{1+q^2}, \\ f_3'(\zeta) &= \frac{\partial \omega_3}{\partial \alpha} + i\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{\partial y}{\partial \beta} + i\frac{\partial y}{\partial \alpha} = \frac{W}{1+q^2} - i\frac{pq}{1+q^2}. \end{aligned}$$

Aus diesen Formeln folgt weiter durch Ausrechnen:

$$\text{(XI)} \qquad f_1'(\zeta)^2 + f_3'(\zeta)^2 = 1.$$

Nun können wir sofort feststellen, daß $f_3'(\zeta)$ *konstant* ist. Diese Funktion ist nämlich in der ganzen endlichen ζ-Ebene regulär, ihr reeller Teil ist nach (X) gleich $\frac{W}{1+q^2}$, also *positiv*; nach einem bekannten funktionentheoretischen Satze ist eine derartige Funktion eine Konstante. Weiter folgt dann aus (XI), daß auch $f_1'(\zeta)$ konstant ist, und wir erhalten schließlich mit Rücksicht auf (X), daß die vier Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial y}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial z}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial z}{\partial \beta}$$

konstant sind. Da nach den Transformationsformeln (V) die Gleichungen bestehen:

$$\frac{\partial x}{\partial \alpha} = 1, \qquad \frac{\partial x}{\partial \beta} = 0,$$

so können wir zusammenfassend sagen, daß alle die partiellen Ableitungen erster Ordnung der Koordinaten x, y, z nach α und β konstant sind. Nun

bekanntlich für die Richtungskosinusse der Flächennormalen die Pro-
tion:

$$X:Y:Z=\begin{vmatrix}\frac{\partial y}{\partial\alpha} & \frac{\partial z}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial y}{\partial\beta} & \frac{\partial z}{\partial\beta}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial z}{\partial\alpha} & \frac{\partial x}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial z}{\partial\beta} & \frac{\partial x}{\partial\beta}\end{vmatrix}:\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial\alpha} & \frac{\partial y}{\partial\alpha}\\ \frac{\partial x}{\partial\beta} & \frac{\partial y}{\partial\beta}\end{vmatrix}.$$

Nach dem soeben Gesagten haben die rechtsstehenden Determinanten
nstante Werte. *Die Normale der betrachteten Minimalfläche M behält*
rnach eine konstante Richtung, diese Fläche ist folglich eine Ebene,
z. b. w.

Szeged, den 27. März 1925.

(Eingegangen am 29. März 1925.)

Über die Auflösung algebraischer Gleichungen durch hypergeometrische Funktionen.

Von

Richard Birkeland in Oslo.

Einleitung.

Wenn eine algebraische Gleichung mit gegebenen willkürlichen Koeffizienten gegeben ist, kann man bekanntlich die Wurzeln durch Reihenentwicklungen nach Potenzen der Koeffizienten bestimmen, indem man die gewöhnliche Methode der impliziten Funktionen anwendet. Diese Reihenentwicklungen, welche im allgemeinen innerhalb eines bestimmten Gebietes konvergieren, sind von einer großen Anzahl von Autoren behandelt worden.

Die Absicht dieser Abhandlungen ist, zu beweisen, daß man diesen Reihenentwicklungen durch Umformung und Einführung von gewissen neuen Variablen, welche sehr einfach von den Koeffizienten abhängen, eine derartige Form geben kann, daß die Wurzeln als eine lineare Kombination einer bestimmten Anzahl hypergeometrischer Funktionen von mehreren Variablen ausgedrückt werden[1]).

Im folgenden benutzen wir die von Herrn Horn[2]) gegebene Definition der hypergeometrischen Funktionen mehrerer Variablen. Der Einfachheit halber betrachten wir den Fall dreier Variablen, weil daraus die Definition im allgemeinen Fall leicht folgt. Eine Reihe

$$F(x_1, x_2, x_3) = \sum c_{k_1, k_2, k_3} x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3}$$

[1]) Richard Birkeland, Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, Paris C. R. **171** (1920), p. 1370; **172** (1921), p. 309). Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables, Paris C. R. **172** (1921), p. 1155.

[2]) Über die Konvergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen, Math. Annalen **34** (1889), S. 544.

rd dann *hypergeometrisch* genannt, wenn *die Verhältnisse*

$$\frac{c_{k_1+1,k_2,k_3}}{c_{k_1,k_2,k_3}}, \quad \frac{c_{k_1,k_2+1,k_3}}{c_{k_1,k_2,k_3}}, \quad \frac{c_{k_1,k_2,k_3+1}}{c_{k_1,k_2,k_3}}$$

ebene rationale Funktionen von k_1, k_2, k_3 *sind.* In jeder der rationalen nktionen (I), die in dieser Arbeit vorkommen, sind Zähler und Nenner mer Polynome vom *selben* Grade, welche sich in *lineare* Faktoren von r Form $a k_1 + b k_2 + c k_3 + d$ zerlegen lassen, wo a, b, c und d nicht n k_1, k_2, k_3 abhängen. Wie man sieht, hat man hier als Spezialfall die heren hypergeometrischen Funktionen einer Variablen[3]). Diese spezielleren pergeometrischen Funktionen treten bei der Lösung der allgemeinen trimischen Gleichung auf[4]).

Durch diese Definition scheint mir eine natürlich abgegrenzte Funktionenasse ausgewählt zu sein. Es gibt bekanntlich auch andere Definitionen r hypergeometrischen Funktionen, so z. B. die von Heymann[5]), Mellin[6]) a.[7]). Die so definierten Funktionenklassen scheinen mir nicht so wohl gegrenzt zu sein und sie fallen auch nicht mit den oben erklärten pergeometrischen Funktionen zusammen.

---

[3]) Sie sind von Clausen, J. f. Math. **3** (1828), S. 89 u. 92, und Thomae, J. f. th. **87** (1879), S. 26 in die Analysis eingeführt worden. Über diese Funktionen he: Enc. d. Math. W. II **5**, Nr. 19. Wir benutzen die Bezeichnungsweise von E. Goursat: r les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur. Annalen de l'éc. nor. **12** (1883), 261 u. 395.

[4]) Richard Birkeland, Resolution de l'équation algébrique trinome par des fonctions pergéométriques supérieures, Paris C. R. **171** (1920), p. 778; Résolution de l'équation nérale du 5e degré, Paris C. R. **171** (1920), p. 1047. Résolution des équations trimes par une somme de fonctions hypergéométriques supérieures. (Kristiania denskapsselskaps Skrifter. Mat. naturv. Klasse 1921, Nr. 3.)

[5]) Studien über die Transformation und Integration der Differential- und Differnzengleichungen, Leipzig 1891.

[6]) Zur Theorie der trinomischen Gleichungen, Ann. Ac. Sc. Fennicae, Helsingfors. r. A, **7**, Nr. 7, 1915. Ein allgemeiner Satz über algebraische Gleichungen, loc. cit. . 8, 1915. Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction mma, Paris C. R. **172** (1921), p. 658. Über Hrn. Mellins und meine Untersuchungen he: Richard Birkeland, Sur la résolution des équations algébriques par une somme fonctions hypergéométriques, Paris C. R. **177** (1923), p. 23.

[7]) In einer Note (Sur la résolution des équations algébriques, Paris C. R. **179** 924), p. 432) und auch in einer anderen Arbeit (Rend. del Circolo Math. di Palermo (1922), p. 463) hat Herr Belardinelli einige Untersuchungen von sich und Herrn pelli erwähnt. Durch Anwendung meiner Methoden auf seine Reihenentwicklungen ch Potenzen der Koeffizienten hat Herr Belardinelli einige meiner Resultate veriiert. Man sehe auch meine in [6]) erwähnte Note. Paris C. R. **177** (1923), p. 23.

§ 1.

Allgemeine Entwicklungen.

Wir wollen die folgende allgemeine algebraische Gleichung n-ten Grades betrachten

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n = 0, \tag{1}$$

in der die Koeffizienten auch komplexe Werte annehmen können. Unter p und q $(p > q)$ wollen wir zwei verschiedene von den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, n$ verstehen und annehmen, daß a_{n-p} und a_{n-q} beide von Null verschieden sind. Wir bezeichnen ganz allgemein mit $-u_\alpha$ das Verhältnis $a_{n-\alpha} : a_{n-p}$. Durch Einführung von

$$x = z\, u_q^{\frac{1}{p-q}}; \qquad l_i = u_{m_i} u_q^{\frac{m_i - p}{p-q}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

kann die Gleichung (1) auch die Form

$$z^p = z^q + l_1 z^{m_1} + l_2 z^{m_2} + \ldots + l_s z^{m_s} \tag{1'}$$

gebracht werden, wo $m_1, m_2, \ldots, m_s$ ganze positive Zahlen sind, jedoch so, daß $m_1 = 0$ wenn $q > 0$.

Man kann nun Lagranges Formel anwenden, um eine Wurzel z von (1') zu finden, da aber die Entwicklungen für eine beliebige Potenz von z nicht schwieriger werden als die für z, wollen wir gleich eine willkürliche Potenz der Wurzel in eine Reihe entwickeln. Wie bekannt, findet Lagrange, unter gewissen Konvergenzbedingungen, für die Funktion $F(\theta)$ einer Wurzel θ der Gleichung

$$\theta = y + l f(\theta) \tag{2}$$

die Darstellung

$$F(\theta) = F(y) + l F'(y) f(y) + \sum_{r=2}^{\infty} \frac{l^r}{r!} \frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}} [F'(y) f(y)^r]. \tag{2'}$$

Wenn wir in (2) einführen:

$$z = \theta^{\frac{1}{p-q}}, \qquad f(\theta) = z^{-q}(l_1 z^{m_1} + \ldots + l_s z^{m_s}), \qquad y = l = 1,$$

so erhalten wir die Gleichung (1') in der Form

$$z^{p-q} = 1 + z^{-q}(l_1 z^{m_1} + \ldots + l_s z^{m_s}).$$

Es sei γ eine willkürliche Konstante und

$$F(\theta) = z^\gamma = \theta^{\frac{\gamma}{p-q}}.$$

rch Anwendung des polynomischen Lehrsatzes erhalten wir dann

$$\frac{l^r}{r!}\frac{d^{r-1}}{dy^{r-1}}[F'(y)f(y)^r] = \frac{\gamma}{p-q}\, l^r \sum{}' \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2}\ldots l_s^{\alpha_s} y^{\tau-1},$$

bei $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ alle ganzen Werte $\geqq 0$ durchlaufen, welche der Bedingung

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_s = r$$

ügen und wo zur Abkürzung

$$(\lambda, k) = \lambda(\lambda+1)\ldots(\lambda+k-1), \quad (\lambda, 0) = 1 \qquad (k > 0)$$

etzt worden ist. Weiter ist

$$\tau = \frac{\gamma+v}{p-q} + 1, \qquad v = \sum_{\nu=1}^{s}(m_\nu - p)\alpha_\nu.$$

mmen wir dann in (2′) $l = 1$ (dies setzt voraus, daß alle $|l_i|$ genügend n sind) und $y = 1$, so ist $y^{\frac{1}{p-q}}$ durch eine Potenz ε^i einer primitiven rzel ε der Gleichung $x^{p-q} = 1$ und somit $y^{\frac{\gamma}{p-q}}$ durch $\varepsilon^{i\gamma}$ zu ersetzen. ergibt sich schließlich

$$z_i^\gamma = \varepsilon^{i\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{p-q}\sum_{\alpha_1,\ldots,\alpha_s=0}^{\infty} \varepsilon^{iv}\frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1!\,\alpha_2!\ldots\alpha_s!}\, l_1^{\alpha_1} l_2^{\alpha_2}\ldots l_s^{\alpha_s}\right]$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p-q).$$

r durchlaufen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ alle möglichen ganzen Werte $\geqq 0$; das rtsystem $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$ ist jedoch ausgeschlossen.

Wir haben also für die Wurzeln Potenzreihen gewonnen, jedoch vorig ohne uns von deren Konvergenz Rechenschaft zu geben, und es nun gezeigt werden, wie die Reihe (5) durch Einführung von neuen iablen in eine lineare Summe von $(p-q)^s$ hypergeometrischen Funktionen egt werden kann. Die Zahlen α_ν können wir immer in der Form

$$\alpha_\nu = \varkappa_\nu + (p-q)k_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s)$$

reiben, wo $\varkappa_\nu$ der kleinste positive Rest von α_ν in bezug auf den Modul q ist. Wir bezeichnen mit $\bar{v}$, $\bar{\tau}$ und $\bar{r}$ die Werte von v, τ und r, für $k_1 = k_2 = \ldots = k_s = 0$ ist, und setzen

$$l_\nu^{\alpha_\nu} = l_\nu^{\varkappa_\nu}\eta_\nu^{k_\nu}, \qquad \eta_\nu = l_\nu^{p-q} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

nn können wir die Entwicklungen (5) in der Form

$$= \varepsilon^{i\gamma}\left[1 + \frac{\gamma}{p-q}\sum_{\varkappa_1,\ldots,\varkappa_s=0}^{p-q-1} \varepsilon^{i\bar{v}}\frac{(\bar{\tau}, \bar{r}-1)}{\varkappa_1!\ldots\varkappa_s!}\, l_1^{\varkappa_1}\ldots l_s^{\varkappa_s}\psi(\gamma, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_s | \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s)\right]$$

schreiben, wo:

$$(8)\quad \psi(\gamma, \varkappa_1, \ldots, \varkappa_s | \eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s) = \frac{\varkappa_1! \ldots \varkappa_s!}{(\bar{\tau}, \bar{r}-1)} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{\infty} \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1! \alpha_2! \ldots \alpha_s!} \eta_1^{k_1}, \eta_2^{k_2}, \ldots, \eta_s^{k_s}.$$

Die Summation ist jetzt in folgender Weise ausgeführt: Unter den Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-q-1$ wählen wir ein System von Werten für $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ aus. Danach summieren wir in (8) in bezug auf die Buchstaben $k_1, k_2, \ldots, k_s$, welche wir alle möglichen ganzen Werte $\geqq 0$ durchlaufen lassen. Jedoch das Wertsystem $k_1 = \ldots = k_s = 0$ auszuschließen, wenn $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_s = 0$. Danach wird in (7) bezüglich der Größen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_s$ summiert. Diese Buchstaben werden alle möglichen verschiedenen Wertsysteme unter den $p-q$ Zahlen $0, 1, 2, \ldots, p-q-1$ annehmen. Wenn $\varkappa_1 = \ldots = \varkappa_s = 0$ ist, wird $(\bar{\tau}, \bar{r}-1)$ gleich 1 gesetzt.

Hiermit haben wir also z_i^{ν} als eine lineare Summe von den $(p-q)^s$ Funktionen ψ dargestellt. Wir werden zeigen, daß *die Funktionen ψ hypergeometrische Funktionen von $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ sind.* Nach der früher gegebenen Definition braucht man nur zu zeigen, daß das Verhältnis R_u zwischen zwei Koeffizienten in (8), die den Potenzen

$$k_1, \ldots, k_{u-1}, k_u, k_{u+1}, \ldots, k_s \quad \text{und} \quad k_1, \ldots, k_{u-1}, k_u + 1, k_{u+1}, \ldots, k_s$$

entsprechen, eine rationale Funktion von $k_1, k_2, \ldots, k_s$ ist. Setzt man daher:

$$A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s} = \frac{(\tau, r-1)}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_s!} = \frac{\Gamma(\tau+r-1)}{\Gamma(\tau)} \frac{1}{\alpha_1!\, \alpha_2! \ldots \alpha_s!},$$

$$A_{k_1, \ldots, k_u+1, \ldots, k_s} = \frac{(\tau', r'-1)}{\alpha_1'!\, \alpha_2'! \ldots \alpha_s'!},$$

so ist

$$R_u = \frac{A_{k_1, \ldots, k_u+1, \ldots, k_s}}{A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s}} = \frac{\Gamma(\tau+r-1+m_u-q)}{\Gamma(\tau+r-1)} \frac{\Gamma(\tau)}{\Gamma(\tau+m_u-p)} \frac{1}{(\alpha_u+1, p-q)}.$$

Wenn man nämlich in $A_{k_1, \ldots, k_u, \ldots, k_s}$ den Index k_u in k_u+1 übergehen läßt, während alle anderen k unverändert bleiben, so wird nach (3), (4) und (6)

$$\tau' = \tau + m_u - p, \qquad \alpha_u' = \alpha_u + p - q, \qquad r' = r + p - q,$$

während übrigens

$$\alpha_i' = \alpha_i \qquad (i \gtrless u).$$

Man behandelt nun am einfachsten die folgenden drei Möglichkeiten getrennt:

Fall I:

$$m_u \geqq p > q; \qquad R_u = \frac{(\tau+r-1, m_u-q)}{(\tau, m_u-p)(\alpha_u+1, p-q)}.$$

Fall II:

$$p > m_u \geqq q; \qquad R_u = \frac{(\tau + m_u - p,\ p - m_u)(\tau + r - 1,\ m_u - q)}{(\alpha_u + 1,\ p - q)}.$$

Fall III:

$$p > q > m_u; \qquad R_u = \frac{(\tau + m_u - p,\ p - m_u)}{(\tau + r - 1 + m_u - q,\ q - m_u)(\alpha_u + 1,\ p - q)}.$$

In jedem Falle sind hiernach Zähler und Nenner *feste* Polynome vom ben Grade bezüglich $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Unsere Behauptung ist damit be- esen. Die Gradzahlen sind in Fall I: $m_u - q$; Fall II: $p - q$; Fall III: $- m_u$.

Wird speziell $p = n$, $q = 0$ gewählt, so findet man aus (7) alle ırzeln. Setzt man $\gamma = 1, 2, 3, \ldots$, so sieht man, daß *jede rationale nktion der Wurzel z als lineare Kombination von hypergeometrischen nktionen von* $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_s$ *dargestellt werden kann.*

Wir können die Verhältnisse R_u noch etwas umformen, wodurch die nlichkeit mit den höheren hypergeometrischen Funktionen einer Variablen hr hervortritt. So erhält man

$$R_u = \frac{(k_u + A_1)(k_u + A_2)\ldots(k_u + A_\alpha)}{(k_u + 1)(k_u + B_1)\ldots(k_u + B_{\alpha-1})} p_u,$$

α gleich $m_u - q$ in Fall I, bzw. gleich $p - q$ und $p - m_u$ in Fall II d III ist, und wo $A_1, \ldots, A_\alpha$, $B_1, \ldots, B_{\alpha-1}$ nicht von k_u abhängen; sind lineare Funktionen von den anderen k. Der Faktor p_u ist gleich

) $$p_u = (m_u - q)^{m_u - q}(m_u - p)^{p - m_u}(p - q)^{q - p}.$$

Wenn man in ψ alle η_i gleich Null setzt, η_u ausgenommen, so muß n in R_u (siehe (9)) alle k_i gleich Null setzen, k_u ausgenommen. Alle ergeometrischen Funktionen $\psi(\gamma, \varkappa_u | \eta_u)$ von η_u sind dann nach (9) here hypergeometrische Funktionen von

) $$\zeta_u = \eta_u p_u$$

ehe (10)), wenn $\varkappa_u > 0$. Eine einfache Untersuchung zeigt, daß für die nktion

$$1 + \frac{\gamma}{p - q}\psi(\gamma, 0 | \eta_u)$$

selbe gilt.

§ 2.

Konvergenzbedingungen.

Dem gewöhnlichen Satz über implizite Funktionen zufolge sind die rstehenden Entwicklungen für hinreichend kleine absolute Werte der l_i er η_i absolut konvergent oder, wenn die durch (11) und (10) definierten

Veränderlichen ζ_i eingeführt werden, für hinreichend kleine absolute Werte der ζ_i. Wenn $s-1$ dieser Größen, z. B. $\zeta_2, \zeta_3, \ldots, \zeta_s$, gleich Null sind, wird ψ eine höhere hypergeometrische Funktion von ζ_1 allein. Diese Reihe konvergiert [8]) aber für $|\zeta_1|<1$ und divergiert für $|\zeta_1|>1$. Hieraus wird nach und nach abgeleitet, daß

$$|\zeta_1|<1, \quad |\zeta_2|<1, \ldots, \quad |\zeta_s|<1$$

eine notwendige Bedingung für die Konvergenz ist. Will man die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz bestimmen, so kann man das von J. Horn [9]) angegebene Verfahren anwenden.

Es wird von Interesse sein, eine sehr einfache, aber hinreichende Bedingung der Konvergenz zu geben. Wir wollen mit m die größte der Zahlen $m_\nu - p$ bezeichnen und die folgende trinomische Gleichung betrachten:

$$(11') \qquad z^{p-q} = 1 + z^{-q}(|l_1|z^{m+p} + |l_2|z^{m+p} + \ldots + |l_s|z^{m+p}).$$

Es sei t der dem τ (siehe (4)) hier entsprechende Wert. Dann ist

$$t = \frac{1}{p-q}\left(\gamma + m\sum_1^s \alpha_\nu\right) + 1.$$

Wenn $\sum \alpha_\nu$ hinreichend groß ist, wird $t > |\tau|$. Konvergiert daher diese Entwicklung nach Potenzen von $|l_1|, |l_2|, \ldots, |l_s|$, so werden auch die Reihen (5) konvergieren. Setzt man

$$D = |l_1| + |l_2| + \ldots + |l_s|,$$

so wird später gezeigt werden, daß die Wurzeln der trinomischen Gleichung (11') als eine Summe von höheren hypergeometrischen Funktionen von

$$\zeta = \frac{(m+p-q)^{m+p-q}}{m^m (p-q)^{p-q}} D^{p-q}$$

ausgedrückt werden kann, wenn $|\zeta|<1$. Wir haben folglich als *hinreichende* Bedingung für die Konvergenz der Reihe (5)

$$(12) \qquad |l_1| + |l_2| + \ldots + |l_s| < \frac{p-q}{m+p-q} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{p-q}{m}\right)^{\frac{m}{p-q}}}$$

Man kann immer eine algebraische Funktion durch eine Summe von hypergeometrischen Funktionen ausdrücken. Wenn man nämlich bei der gegebenen Gleichung durch passende Wahl von p und q keine konvergenten Entwicklungen bekommt, so führe man eine Tschirnhausentransformation

$$y_i = c_0 + c_1 x_i + c_2 x_i^2 + \ldots + c_{n-1} x_i^{n-1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[8]) E. Goursat, loc. cit.
[9]) Siehe [2]).

. Bekanntlich läßt sich immer durch geeignete Wahl der unbestimmten
ßen $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ erreichen, daß die Koeffizienten in der Gleichung,
cher $y_1, y_2, \ldots, y_n$ genügen, willkürlich gegebene Zahlen werden, daß
also z. B. der Ungleichung (12) genügen. Zwar ist es für die Bestim-
ng der Zahlen c nötig, Gleichungen höheren Grades zu lösen. Aus der
barkeit dieser Gleichungen folgt aber, daß man auch, ohne diese Lö-
g vollständig auszuführen, die Bedingung (12) erfüllen kann.

§ 3.

Die trinomische Gleichung.

Wir schreiben die trinomische Gleichung in der Form

$$x^n = g x^s + \beta, \tag{}$$

rin g und β Koeffizienten sind und $n > s$. In (7) setzen wir $p = n$,
$= s$, $m_1 = 0$ und erhalten dann

$$x = z g^{\frac{1}{n-s}}, \qquad l_1 = l = \beta g^{-\frac{n}{n-s}}, \qquad l_2 = \ldots = l_s = 0, \qquad \eta_1 = l_1^{n-s}.$$

iter ist (siehe (11))

$$\zeta_1 = \zeta = (-1)^{n-s} \frac{n^n}{s^s (n-s)^{n-s}} \frac{\beta^{n-s}}{g^n}, \qquad \zeta_2 = \ldots = \zeta_s = 0.$$

r bekommen dann für $|\zeta| < 1$ die $n - s$ Wurzeln durch

$$x_i^\gamma = g^{\frac{\gamma}{n-s}} \varepsilon^{i\gamma} \left[F_0(\zeta) + \frac{\gamma}{n-s} \sum_{\varkappa=1}^{n-s-1} \varepsilon^{-i\varkappa} \mu_\varkappa l^\varkappa F_\varkappa(\zeta) \right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-s)$$

gedrückt, worin

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi}{n-s}\sqrt{-1}}, \qquad \mu_1 = 1, \qquad \mu_\varkappa = \frac{1}{\varkappa} \binom{\frac{\gamma - s\varkappa}{n-s} - 1}{\varkappa - 1}$$

etzt ist, unter Benutzung der gewöhnlichen Abkürzung für die bi-
nischen Koeffizienten. Ferner ist in der Bezeichnungsweise von Goursat
c. cit.)

$$F_\varkappa(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_{1,\varkappa}, \ldots, a_{n-1,\varkappa}, a_{n,\varkappa} \\ b_{1,\varkappa}, \ldots, b_{n-1,\varkappa}, \zeta \end{pmatrix}$$

t

$$a_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{n-i}{n} - \frac{\gamma}{n(n-s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$b_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{s-i+1}{s} - \frac{\gamma}{s(n-s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$b_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n-s} + \frac{i-s}{n-s} + \frac{\delta_i}{n-s} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1)$$

und

$$(16') \qquad \delta_i = 0, \text{ wenn } i < n - \varkappa, \qquad \delta_i = 1, \text{ wenn } i \geqq n - \varkappa.$$

Die höheren hypergeometrischen Funktionen $F_\varkappa(\zeta)$ von ζ sind folglich im allgemeinen von der Ordnung n. Wir können beweisen, daß sie sich im Falle $\gamma = 1$ auf solche von der Ordnung $n-1$ reduzieren.

Bisher sind nur $n - s$ von den n Wurzeln gefunden. Die s übrigen Wurzeln können leicht bestimmt werden. Wir wählen nämlich in (7) $p = s$, $q = 0$, $m_1 = n$ und erhalten

$$x = z(-l)^{\frac{1}{s}} g^{\frac{1}{n-s}}, \qquad l_1 = \lambda = (-l)^{\frac{n-s}{s}} = (-\beta)^{\frac{n-s}{s}} g^{-\frac{n}{s}}.$$

Weiter findet man $\zeta_1 = \zeta$ wie in (14). Wir erhalten dann auch die übrigen s Wurzeln unter der Bedingung $|\zeta| < 1$:

$$(17) \qquad x_{n-s+i}^{\gamma} = (-l)^{\frac{\gamma}{s}} g^{\frac{\gamma}{n-s}} \delta^{i\gamma} \left[\varphi_0(\zeta) + \frac{\gamma}{s} \sum_{\varkappa=1}^{s-1} \delta^{i\varkappa} \Delta_\varkappa \lambda^\varkappa \varphi_\varkappa(\zeta) \right]$$

$$(i = 1, 2, \ldots, s),$$

wobei

$$\delta = e^{\frac{2\pi}{s}\sqrt{-1}}, \qquad \Delta_1 = 1, \qquad \Delta_\varkappa = \frac{1}{\varkappa} \binom{\frac{\gamma + n\varkappa}{s} - 1}{\varkappa - 1}.$$

Ferner ist:

$$\varphi_\varkappa(\zeta) = F\begin{pmatrix} d_{1,\varkappa}, \ldots, d_{n-1,\varkappa}, d_{n,\varkappa} \\ e_{1,\varkappa}, \ldots, e_{n-1,\varkappa}, \zeta \end{pmatrix},$$

wo

$$d_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + \frac{i-1}{s} + \frac{\gamma}{sn} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

$$e_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + \frac{i}{n-s} + \frac{\gamma}{s(n-s)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-s),$$

$$e_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{s} + 1 + \frac{i-n}{s} + \frac{\delta_i}{s} \qquad (i = n-s+1, \ldots, n-1),$$

und δ_i durch (16') gegeben ist.

Die Entwicklungen (15) und (17) konvergieren für $|\zeta| < 1$ und divergieren für $|\zeta| > 1$. Wir werden nun zum Schluß die Wurzeln im Falle $|\zeta| > 1$ bestimmen. In (7) setzen wir $p = n$, $q = 0$, $m_1 = s$ und erhalten dann

$$x = z\beta^{\frac{1}{n}}, \qquad l_1 = \varrho = g\beta^{-\frac{n-s}{n}}, \qquad l_2 = l_3 = \ldots = l_s = 0.$$

Weiter ist (siehe (11))

$$\zeta_1 = (-1)^{n-s} \frac{s^s (n-s)^{n-s}}{n^n} \frac{g^n}{\beta^{n-s}} = \frac{1}{\zeta},$$

der inverse Wert von der durch (14) bestimmten Größe ζ. Hieraus t, daß $|\zeta_1| < 1$, wenn $|\zeta| > 1$ ist, so daß die entsprechenden Entklungen konvergieren:

$$) \quad x_i^{\gamma} = \beta^{\frac{\gamma}{n}} \nu^{i\gamma} \left[\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{\gamma}{n} \sum_{\varkappa=1}^{n-1} \nu^{is\varkappa} \theta_\varkappa \varrho^\varkappa \psi_\varkappa\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

denen

$$\nu = e^{\frac{2\pi}{n}\sqrt{-1}}, \qquad \theta_1 = 1, \qquad \theta_\varkappa = \binom{\frac{\gamma + s\varkappa}{n} - 1}{\varkappa - 1}.$$

ner ist:

$$\psi_\varkappa\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\begin{pmatrix} g_{1,\varkappa}, \ldots, g_{n-1,\varkappa}, g_{n,\varkappa} \\ h_{1,\varkappa}, \ldots, h_{n-1,\varkappa}, \frac{1}{\zeta} \end{pmatrix}$$

$$g_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n} + \frac{i-1}{s} + \frac{\gamma}{ns} \qquad (i = 1, 2, \ldots, s),$$

$$g_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa}{n} + \frac{n-i}{n-s} - \frac{\gamma}{n(n-s)} \qquad (i = s+1, \ldots, n),$$

$$h_{i,\varkappa} = \frac{\varkappa + i}{n} + \frac{\delta_i}{n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

δ_i immer durch (16′) gegeben ist.

§ 4.

Die Wurzeln der trinomischen Gleichung sind, als Funktionen von ζ aufgefaßt, partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung.

Wird (14) nach β aufgelöst, so ergibt sich

$$\beta = K \zeta^{\frac{1}{n-s}},$$

K eine Konstante ist, wenn man β und ζ als Variablen auffaßt. Die rmeln (15) werden von der Form

$$x_i^{\gamma} = \sum_{\varkappa=0}^{n-s-1} A_{i,\varkappa} \zeta^{\frac{\varkappa}{n-s}} F_\varkappa(\zeta) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-s),$$

rin die Koeffizienten A nicht von ζ abhängen. Wenn diese nun partiläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung ter Ordnung sein sollen, müssen sie von der folgenden Form[10]) sein:

[10]) E. Goursat, loc. cit., S. 280.

$$x_i^\gamma = B_i F\begin{pmatrix} a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n \\ b_1, \ldots, b_{n-1}, \zeta \end{pmatrix} +$$

$$+\sum_{h=1}^{n-1} B_{i,h}\,\zeta^{1-b_h} F\begin{pmatrix} a_1+1-b_h, & a_2+1-b_h, & \ldots, & a_{n-1}+1-b_h, & a_n+1-b_h \\ 2-b_h, & b_1+1-b_h, & \ldots, & b_{n-1}+1-b_h, & \zeta \end{pmatrix},$$

worin die Größen B Konstanten sind. Also muß erstens

$$F_0(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & \ldots, & a_{n-1}, & a_n \\ b_1, & b_2, & \ldots, & b_{n-1}, & \zeta \end{pmatrix}$$

d. h. (siehe (16))

$$a_i = a_{i,0}, \qquad b_i = b_{i,0} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1); \qquad a_n = a_{n,0}$$

sein, wodurch

$$1 - b_i = \frac{n-i}{n-s} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1)$$

wird. Wenn wir $\varkappa = n - i$ setzen, sehen wir, daß

$$\zeta^{\frac{\varkappa}{n-s}} = \zeta^{\frac{n-i}{n-s}} = \zeta^{1-b_i} \qquad (i = s+1, \ldots, n-1).$$

Gleichzeitig nimmt $\varkappa$ die Werte $n-s-1, n-s-2, \ldots, 2, 1$ an. Folglich muß

$$F_\varkappa(\zeta) = F_{n-i}(\zeta) = F\begin{pmatrix} a_1+1-b_i, & a_2+1-b_i, & \ldots, & a_{n-1}+1-b_i, & a_n+1-b_i \\ 2-b_i, & b_1+1-b_i, & \ldots, & b_{n-1}+1-b_i, & \zeta \end{pmatrix}$$

sein. Dies ist auch wirklich der Fall. Wir haben nämlich, wenn wir mit (16) vergleichen,

$$\begin{aligned} a_r &+ 1 - b_i = a_{r,\,n-i} && (r = 1, 2, \ldots, n), \\ b_r &+ 1 - b_i = b_{r,\,n-i} && (r = 1, 2, \ldots, s), \\ b_r &+ 1 - b_i = b_{r,\,n-i} && (r = s+1, \ldots, i-1), \\ b_{r+1} &+ 1 - b_i = b_{r,\,n-i} && (r = i, \ldots, n-2), \\ & 2 - b_i = b_{n-1,\,n-i}. \end{aligned}$$

Damit ist unsere Behauptung bewiesen. Durch kontinuierliche Änderung von ζ können wir aus einer der Größen

$$x_1^\gamma, x_2^\gamma, \ldots, x_{n-s}^\gamma$$

auch die Wurzeln

$$x_{n-s+1}^\gamma, \ldots, x_n^\gamma$$

erhalten. *Folglich werden* $x_1^\gamma, x_2^\gamma, \ldots, x_n^\gamma$, *als Funktionen von* ζ *aufgefaßt, partikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung von der Ordnung* n, *welche durch die* $2n-1$ *Zahlen* $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ *völlig bestimmt ist.* Aus

$$\sum_1^{n-1} b_i - \sum_1^n a_i = \frac{1}{2} > 0$$

lgt, daß die Entwicklungen (15) und (17) auch für $\zeta = 1$ konver-eren.

Ist insbesondere $\gamma = 1$, so kann man, sofern n und s relativ prim sind, ne positive ganze Zahl $i_0 < n$ und eine ebensolche Zahl i_1 $(1 < i_1 \leqq s$ bestimmen, daß

$$a_{i_0,\varkappa} = b_{i_1,\varkappa} \qquad (\varkappa = 0, 1, 2, \ldots, n-s-1).$$

ie Wurzeln $x_1, x_2, \ldots, x_n$, als Funktionen von ζ aufgefaßt, sind also artikuläre Integrale einer höheren hypergeometrischen Differentialgleichung on der Ordnung $n-1$.

Man kann auch die Gruppe der betrachteten Differentialgleichung ngeben.

§ 5.

Spezielle Gleichungen.

Die Gleichung *fünften Grades* läßt sich bekanntlich durch elementare Iethoden in eine trinomische Gleichung überführen. Bringt man z. B. die Gleichung fünften Grades in die Form

$$x^5 = x^2 + \beta,$$

o wird $n = 5$, $s = 2$ und [11])

$$\zeta = -\frac{5^5}{2^2 3^3}\beta^3.$$

Wir erhalten dann aus (15) und (17), wenn $|\zeta| < 1$ und $\gamma = 1$,

$$x_1 = \varepsilon F_0(\zeta) + \varepsilon^2 \frac{1}{3}\beta F_1(\zeta) - \frac{1}{3}\beta^2 F_2(\zeta).$$

$$x_2 = \varepsilon^2 F_0(\zeta) + \varepsilon \frac{1}{3}\beta F_1(\zeta) - \frac{1}{3}\beta^2 F_2(\zeta),$$

$$x_3 = F_0(\zeta) + \frac{1}{3}\beta F_1(\zeta) - \frac{1}{3}\beta^2 F_2(\zeta),$$

$$x_4 = \frac{1}{2}\beta^2 F_2(\zeta) - (-\beta)^{\frac{1}{2}} F_3(\zeta),$$

$$x_5 = \frac{1}{2}\beta^2 F_2(\zeta) + (-\beta)^{\frac{1}{2}} F_3(\zeta),$$

vorin

$$F_0(\zeta) = F\left(\begin{matrix} -\frac{1}{15}, & \frac{2}{15}, & \frac{8}{15}, & \frac{11}{15} \\ \frac{5}{6}, & \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \zeta \end{matrix}\right), \qquad F_1(\zeta) = F\left(\begin{matrix} \frac{4}{15}, & \frac{7}{15}, & \frac{13}{15}, & \frac{16}{15} \\ \frac{4}{3}, & \frac{7}{6}, & \frac{2}{3}, & \zeta \end{matrix}\right),$$

$$F_2(\zeta) = F\left(\begin{matrix} \frac{3}{5}, & \frac{4}{5}, & \frac{6}{5}, & \frac{7}{5} \\ \frac{5}{3}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{3}, & \zeta \end{matrix}\right), \qquad F_3(\zeta) = F\left(\begin{matrix} \frac{1}{10}, & \frac{3}{10}, & \frac{7}{10}, & \frac{9}{10} \\ \frac{7}{6}, & \frac{1}{2}, & \frac{5}{6}, & \zeta \end{matrix}\right)$$

[11]) Den Fall $n=5$, $s=1$ findet man in meinen unter [4]) zitierten Arbeiten behandelt.

gesetzt ist und ε eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3 = 1$ bezeichnet. Im Falle $|\zeta| > 1$ werden die fünf Wurzeln durch (18) gegeben:

$$x_i = \beta^{\frac{1}{5}} \left[\nu^i \psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{5} \nu^{3i} \beta^{-\frac{3}{5}} \psi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) - \frac{1}{125} \nu^{2i} \beta^{-\frac{2}{5}} \psi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \frac{1}{625} \nu^{4i} \beta^{-\frac{12}{5}} \psi_3\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

Dabei ist

$$\psi_0\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\left(\begin{matrix} -\frac{1}{15}, \frac{1}{10}, \frac{3}{5}, \frac{4}{15} \\ \frac{4}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{matrix}\right), \quad \psi_1\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\left(\begin{matrix} \frac{2}{15}, \frac{3}{10}, \frac{4}{5}, \frac{7}{15} \\ \frac{6}{5}, \frac{3}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{matrix}\right),$$

$$\psi_2\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\left(\begin{matrix} \frac{8}{15}, \frac{7}{10}, \frac{6}{5}, \frac{13}{15} \\ \frac{8}{5}, \frac{7}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{matrix}\right), \quad \psi_3\left(\frac{1}{\zeta}\right) = F\left(\begin{matrix} \frac{11}{15}, \frac{9}{10}, \frac{7}{5}, \frac{16}{15} \\ \frac{9}{5}, \frac{8}{5}, \frac{6}{5}, \frac{1}{\zeta} \end{matrix}\right)$$

und ν eine primitive Wurzel der Gleichung $x^5 = 1$.

Bei Gleichungen dritten Grades

$$x^3 = g x + \beta$$

liefert die hier gegebene Methode das interessante Ergebnis, daß man die drei Wurzeln als eine Summe von Gaußschen hypergeometrischen Funktionen von

$$\zeta = \frac{27}{4} \frac{\beta^2}{g^3}$$

ausdrücken kann. So findet man für $|\zeta| < 1$ und $\zeta = 1$

$$x_i = \sqrt{g} \left[(-1)^{3i} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \zeta\right) + \frac{1}{3} \sqrt{\frac{\zeta}{3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \zeta\right) \right] \qquad (i = 1, 2),$$

$$x_3 = -\frac{2}{3} \sqrt{\frac{g\zeta}{3}} F\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \zeta\right),$$

und für $|\zeta| > 1$

$$x_i = \sqrt{\frac{g}{3}} \left[\nu^i 2^{\frac{1}{3}} \zeta^{\frac{1}{6}} F\left(-\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{\zeta}\right) + \nu^{3i} 2^{-\frac{1}{3}} \zeta^{-\frac{1}{6}} F\left(\frac{1}{6}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{1}{\zeta}\right) \right]$$

$$(i = 1, 2, 3),$$

wo ν eine primitive Wurzel der Gleichung $x^3 = 1$ darstellt.

(Eingegangen am 27. August 1925.)

Über ein topologisches Problem von Gauß[1]).

Von

Julius v. Sz. Nagy in Klausenburg.

1. Einleitung.

Gauß betrachtete mehrmals *ebene Kurven mit Doppelpunkten*, in denen sich die zwei Zweige wirklich schneiden (also ohne „Selbstberührungspunkte"), und stellte alle möglichen Typen bis zu Kurven mit 5 Doppelpunkten auf[2]). Sind $1, 2, \ldots$ die Doppelpunkte, so hat Gauß die Kurve durch eine Aufeinanderfolge dieser Zahlen dargestellt, wobei jede Zahl zweimal vorkommt und die Zahlen so aufeinander folgen, wie die Doppelpunkte auf der Kurve.

Gauß macht für die betrachteten Kurven keine Beschränkungen; man kann aber aus seinen Resultaten folgern, daß er nur die im Endlichen liegenden ebenen Kurven mit stetig verändernden Tangenten sich vor Augen gehalten hat. In der Sprechweise der kombinatorischen Topologie handelt es sich also um Kurven auf einer Sphäre (Fläche vom Geschlechte Null). Für Kurven auf der projektiven Ebene gelten die Behauptungen von Gauß nicht. (Gegenbeispiel: Hyperbel, deren einer Ast so deformiert ist, daß er den anderen zweimal schneidet. Permutation: 1212.)

Nach Gauß ist uns keine Abhandlung bekannt geworden, die sich mit diesem Gaußschen Problem beschäftigt hätte.

Wir wollen die Resultate von Gauß, die von ihm ohne Beweis gemacht wurden, für die Kurven der Sphäre mit eigentlichen Doppelpunkten beweisen und auf Grund der Zerschneidung dieser Kurven in gewisse ein-

[1]) Der wesentliche Inhalt der ersten 8 Paragraphen dieser Arbeit wurde am 2. 3. 1925 der ungarischen Akademie der Wissenschaften vorgelegt. Die Beweisführung ist aber — dank brieflicher Mitteilungen von Herrn F. Levi (Leipzig) — in der jetzigen Fassung erheblich vereinfacht. Besonders gilt das von Satz 8 und 9.

[2]) C. Fr. Gauß, Werke, Bd. VIII (1900, Teubner, Leipzig), S. 272, 282–286.

fache Kurven, *Zykel*, die voneinander nicht geschnitten werden, allgemeine Sätze ableiten.

Die von uns betrachteten Kurven haben nur einen Zug und keine drei- und mehrfachen Punkte. Unsere Untersuchungen können im Grenzfall auch für Kurven angewandt werden, welche Selbstberührungspunkte haben.

2. Der Beweis des Gaußschen Satzes.

Ist C eine auf einer Sphäre gelegene Kurve mit n Doppelpunkten $1, 2, \ldots, n$, so wird die Kurve durch eine Aufeinanderfolge P_{2n} ihrer Doppelpunkte charakterisiert. Diese Aufeinanderfolge P_{2n} ist eine Permutation der Elemente, in der jedes Element zweimal vorkommt. Für diese Permutation P_{2n} hat Gauß den folgenden allgemeinen Satz behauptet:

I. *In der Aufeinanderfolge der Doppelpunkte einer Kurve der Sphäre (ohne drei- und mehrfache Punkte) tritt jeder Doppelpunkt einmal an einer geraden und einmal an einer ungeraden Stelle auf.*

Gauß hat diesen Satz nicht bewiesen. Da er für die Fälle der 2, 3 und 4 Doppelpunkte alle möglichen Permutationen, also auch die leeren Permutationen aufgeschrieben hat, von denen keine Aufeinanderfolge der Doppelpunkte eine Kurve C darstellt, können wir folgern, daß Gauß seinen Satz induktiv gefunden hat.

Wir beweisen erst den folgenden Satz, woraus der Gaußsche folgt:

II. *Jede auf einer Sphäre gelegene Kurve C wird durch ihre n Doppelpunkte in $2n$ Strecken zerteilt, welche sich mit zwei Farben α und β so färben lassen, daß bei einer Durchlaufung der Kurve abwechselnd verschiedenfarbige Strecken aufeinanderfolgen und die Farben der zwei Strecken, die auf der Kurve zu einem ihrer Doppelpunkte führen oder von dort ausgehen, verschieden sind.*

Die Kurve C mit ihren n Doppelpunkten bildet einen aus $2n$ Strecken bestehenden regulären Streckenkomplex, weil von jedem Punkte des Komplexes (den Doppelpunkten von C) 4 Strecken ausgehen. Die $2n$ Strecken, deren Endpunkte für die Kurve C Doppelpunkte sind, lassen sich mit zwei Farben so färben, daß Strecken von verschiedener Farbe auf der Kurve aufeinanderfolgen[3]).

Für die Richtigkeit des Satzes II müssen wir nur beweisen, daß während der Durchlaufung der Kurve die eine der zwei gleichfarbigen an Q grenzenden Strecken von Q ausgeht, die andere aber nach Q zurückführt.

[3]) Zum ersten Male hat J. Petersen gefärbte Strecken in der Theorie der regulären Graphen verwendet. Acta Math. 15.

Die Kurve C wird durch den Doppelpunkt Q in zwei Pseudozüge C_1 und C_2 geteilt. Der Pseudozug C_1 ist der geschlossene Teil von C; welcher von einem Punkte durchlaufen wird, während er von Q ausgeht und auf C zum ersten Male zur Anfangslage Q zurückkehrt, der Pseudozug C_2 ist der andere geschlossene Teil von C. Die Kurve C schneidet sich im Punkte Q, die Pseudozüge C_1 und C_2 schneiden aber einander im Punkte Q nicht.

Hat der Pseudozug C_1 genau n_1 Doppelpunkte und m Schnittpunkte mit C_2, so liegen $2n_1 + m + 1$ Strecken von C auf dem Pseudozuge C_1. Der Pseudozug C_1 wird nämlich durch seine n_1 Doppelpunkte in $2n_1$ Strecken geteilt, und diese Anzahl der Strecken wird vom Punkte Q um 1, von den übrigen m gemeinsamen Punkten der Pseudozüge C_1 und C_2 um m vergrößert.

Die Pseudozüge C_1 und C_2 schneiden einander in einer geraden Anzahl von Punkten, da auf einer Sphäre alle geschlossenen Kurven von der Art 1 sind[4]). Es folgt also, daß $2n_1 + m + 1$ eine ungerade Zahl ist und daß die zwei Strecken von C_1 mit dem gemeinsamen Endpunkte Q (von denen die eine aus Q ausgeht, die andere aber nach Q zurückführt) dieselbe Farbe haben. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Der Satz I folgt aus dem Satze II. Die Strecken von der einen Farbe werden nämlich in der einen zur Kurve gehörigen Permutation P_{2n} durch das erste, zweite bzw. letzte Elementenpaar bestimmt, und in einem Paare ist das erste Element der Ausgangs- und das zweite der Endpunkt. Die Strecken von der einen Farbe und ihr Durchlaufungssinn werden durch die Paare der $2k$-ten und $2k+1$-ten Elemente der Permutation ($k = 1, 2, \ldots, n$; $2n+1 \equiv 1$) dargestellt. Daraus folgt der Satz I, weil jeder Doppelpunkt der Ausgangspunkt einer Strecke und der Endpunkt einer anderen Strecke von derselben Farbe ist.

3. Die Definition und die Eigenschaften der Zykel.

Von jedem Doppelpunkte der Kurve C geht nur eine α-Strecke aus und zu ihm führt nur eine Strecke von derselben Farbe hin. Es folgt also, daß die Strecken mit ihrem Durchlaufungssinne eine oder mehrere einfach geschlossene Kurven bilden, für welche die Doppelpunkte zu Eckpunkten werden. Im folgenden werden diese Kurven ohne Doppelpunkte *A-Zykel* oder *Zykel von der Farbe α* genannt. Ähnlicherweise können die *B-Zykel* oder die *Zykel von der Farbe β* definiert werden. Die A- und B-Zykel werden gemeinsam mit Z bezeichnet.

---

[4]) Vgl. F. Levi, Streckenkomplexe auf Flächen, Math. Zeitschr. **16** (1923), S. 151 und besonders 2. Mitteilung ebenda **22** (1925), S. 47.

Aus der Definition der Zykel folgen die Sätze:

III. *Die α- bzw. β-Strecken der Kurve bilden eine bestimmte Anzahl der geschlossenen einfachen Kurven, die Zykel A bzw. B. Jeder Zykel schneidet weder sich noch einen anderen Zykel. Zwei Zykel können nur dann gemeinsame Punkte haben, wenn sie von verschiedener Farbe sind. Die gemeinsamen Punkte sind Doppelpunkte der Kurve C.*

IV. *Orientiert man die Kurve C, so erhält jeder Zykel von C einen bestimmten Durchlaufungssinn.*

Da die Zykel einfache, sich gegenseitig nicht schneidende Kurven der Sphäre sind, gelten folgende beiden Sätze:

V. *Haben zwei Zykel* (von verschiedener Farbe) *gemeinsame Punkte, so ist die Aufeinanderfolge der gemeinsamen Punkte im Durchlaufungssinne beider Zykel dieselbe.*

VI. *Wenn sich die gemeinsamen Punkte eines Zykels Z mit zwei anderen Zykeln gegenseitig trennen, so liegen diese beiden Zykel auf verschiedenen Seiten von Z.*

Haben die Zykel Z_1 und Z_2 der Kurve gemeinsame Punkte, so sind sie *direkt* verbunden; ist das nicht der Fall, sind aber in der Folge $Z_1 Z'$, $Z' Z''$, ..., $Z^{(\nu)} Z_2$ je zwei aufeinanderfolgende Zykel direkt verbunden, so sind Z_1 und Z_2 *indirekt verbunden.* Jeder Zykel Z_0 zerlegt seine Kurve C in eine oder mehrere *Zykelreihen* nach folgender

Definition: Zwei Zykel gehören zur selben *Zykelreihe bezüglich* Z_0, wenn sie auch nach Beseitigung von Z_0 (direkt oder indirekt) verbunden bleiben.

Dem Satz VI entspricht für Zykelreihen der Satz

VII. *Sind I und II Zykelreihen bezüglich Z_0 und trennen sich die gemeinsamen Punkte von I mit Z_0 und II mit Z_0 auf Z_0 gegenseitig, so liegen I und II auf verschiedenen Seiten von Z_0.*

4. Die Konstruktion einer Kurve C für eine gegebene Permutation der Doppelpunkte. Isomorphe Kurven C.

Da eine im Endlichen liegende ebene Kurve C mit n eigentlichen Doppelpunkten sich von jedem Doppelpunkte aus in vier Richtungen durchlaufen läßt, so gehören $4n$ im allgemeinen verschiedene Permutationen P_{2n} der Doppelpunkte zur Kurve. Jede dieser Permutationen bestimmt die Zykel der Kurve [5]).

[5]) Z. B. die Permutation 12345366278975419 8 gehört zu einer Kurve C mit den α- bzw. β-Strecken 12, 34, 53, 66, 27, 89, 75, 41, 98 bzw. 23, 45, 36, 62, 78, 97, 54, 19 und 81. Die A- bzw. B-Zykel der Kurve C sind die folgenden: (127534), (89)

Auf Grund der Sätze über die Zykel läßt sich der folgende Satz beweisen:

VIII. *Gehört zu einer Permutation der Doppelpunkte überhaupt eine Kurve C der Sphäre, so läßt sie sich in endlich vielen Schritten konstruieren.*

Die erste Bedingung dafür, daß die gegebene Permutation zu einer Kurve gehört, ist die Forderung des ersten Satzes. Für die Zyklen der Permutation P_{2n} müssen die Forderungen der Sätze III bis VII erfüllt werden. Sind diese Forderungen alle erfüllt, so zeichnen wir die Zykel als Polygone mit entsprechender Eckenzahl. Diese Zykelpolygone werden zu einer Figur zusammengesetzt, die zuletzt die verlangte Kurve wird. Nach jedem Schritt zerlegt diese Figur die Sphäre in Flächenstücke, und die Strecken der Figur bestehen aus Streckenzügen je eines Zykels.

Man beginne mit zwei direkt verbundenen, sonst aber beliebigen Zykeln. Die aus ihnen zusammengesetzte Figur ist im Sinne der Isotopie auf der Sphäre in — bis auf die Indikatrix — eindeutiger Weise bestimmt. Das gilt auch dann noch, wenn man einen Zykel einfügt, der mit zwei verschiedenen Strecken der bereits entstandenen Figur direkt verbunden ist, oder eine Folge $Z', Z'', \ldots, Z^{(\nu)}$ von Zykeln, von denen nur Z' und $Z^{(\nu)}$ mit der entstandenen direkt verbunden sind, und zwar längs zweier verschiedener Strecken, und von denen je zwei aufeinanderfolgende — aber auch nur solche — Zykel miteinander direkt verbunden sind. In dieser Weise fahre man fort, bis es keine solchen Zykelfolgen (bzw. Zykel) mehr gibt. Ist damit die Gesamtheit der Zykel noch nicht erschöpft, so gibt es unter den übriggebliebenen Zykeln einen Z_0, der an eine gewisse Strecke s der entstandenen Figur angrenzt. Für ihn kommen also zwei Flächenstücke in Betracht, die an s auf der Sphäre angrenzen. Da nach Voraussetzung es eine Kurve mit der gegebenen Zykelzerlegung geben soll, muß es möglich sein die Kurve C zu zeichnen, wenn Z_0 auf einem der Flächenstücke angenommen wird. Man kann aber, ohne die Figur einschließlich der später anzuheftenden Zykel zu zerreißen, s umklappen und dadurch Z_0 in das andere Flächenstück bringen[6]). Ist aber dieses Flächenstück gewählt, so ist alles übrige im Sinne der Isotopie eindeutig. In dieser Weise fortfahrend, bekommt man nach endlich vielen Schritten eine Figur, die sich in der verlangten Weise aus den Zykeln zusammensetzt.

---

und (6) bzw. (1978), (236) und (45), wo der Zykel (127534) aus den Strecken 12, 27, 75, 53, 34 und 41, der Zykel (6) aber aus der einzigen Strecke 66 besteht. Die Zykel (1978) und (236) liegen auf verschiedenen Seiten des Zykels (127534), weil die Elemente 1 und 7 in der Aufeinanderfolge 127534 von den Elementen 2 und 3 abgetrennt sind.

[6]) Denn die mit s (direkt oder indirekt) verbundenen noch nicht eingezeichneten Zykel sind mit keiner andern bereits gezeichneten Strecke verbunden.

Sind alle Zykel nach dieser Regel aufgezeichnet, so gehört die Kurve zu der gegebenen Permutation. Dies folgt daraus, daß die Permutation sich aus ihren Zykeln zusammensetzen läßt. Geht man von einem Punkte des ersten Zykels in seiner Richtung aus, so folgen die gemeinsamen Punkte der Zykel bei der Durchlaufung in derjenigen Aufeinanderfolge, wie die entsprechenden Elemente der Zykeln von P_{2n}. Damit ist der Satz VIII bewiesen.

Aus dem Beweise des Satzes VIII kann man schließen, daß alle zu derselben Permutation gehörigen Kurven C durch Umklappungen aus einer beliebigen von ihnen hervorgehen. Daraus folgt der Satz

IX. *Die Kurven C der Sphäre, zu denen — bei entsprechender Bezeichnung der Doppelpunkte — dieselbe Permutation gehört, können durch Verbiegung im dreidimensionalen Raume ohne Selbstdurchdringung ineinander übergeführt werden.*

5. Aufschneiden der Doppelpunkte einer Kurve C.

Eine Kurve C läßt sich in einem ihrer Doppelpunkte auf zweierlei Art aufschneiden, je nachdem das Aufschneiden die Zykel A und B in dem Doppelpunkte voneinander trennt bzw. miteinander verbindet. Das Aufschneiden des Doppelpunktes wird im ersten Falle *Durchschnitt*, im zweiten aber *Querschnitt* genannt. Diesbezüglich gilt der Satz:

X. *Eine Kurve C auf der Sphäre zerfällt durch den Durchschnitt eines ihrer Doppelpunkte in zwei Kurven, sie bleibt aber eine Kurve nach dem Querschnitte eines ihrer Doppelpunkte.*

Durch den Durchschnitt des Doppelpunktes Q werden nämlich die zugehörigen Pseudozüge C_1 und C_2 voneinander abgetrennt. Durch einen Querschnitt werden die Kurven C_1 und C_2 im Punkte Q erst aufgeschnitten und dann in eine Kurve vereinigt.

Für zwei Kurven C, die einander schneiden, gilt der Satz:

XI. *Schneidet man einen Schnittpunkt der Kurven C_1 und C_2 auf irgendeine Art auf, so werden die Kurven dadurch in eine vereinigt.*

Aus den Sätzen X und XI folgen die Sätze:

XII. *Schneidet man die Doppelpunkte einer Kurve C nacheinander durch, so wird die Anzahl der Kurven, in welche die Kurve C durch die schon angewandten Durchschnitte zerfällt, durch einen weiteren Durchschnitt um 1 entweder erhöht oder vermindert.*

XIII. *Hebt man einen Doppelpunkt einer Kurve C auf der Sphäre durch einen Querschnitt, einen Doppelpunkt der so entstandenen Kurve wieder durch einen Querschnitt, und setzt man dieses Verfahren fort, so erhält man endlich eine einfache Kurve.*

Es ist möglich, daß einige dieser Querschnitte für die Kurve C Durchschnitte sind.

XIV. *Die Anzahl der Zykel einer Kurve C auf der Sphäre ist gerade oder ungerade, je nachdem die Anzahl der Doppelpunkte ungerade bzw. gerade ist.*

Schneidet man die Doppelpunkte der Kurve C in gewisser Reihenfolge durch, so zerfällt die Kurve durch die Durchschnitte in z Kurven ohne Doppelpunkte, d. h. in die z Zykel der Kurve. Ist n die Anzahl der Doppelpunkte, h bzw. k die Anzahl der Durchschnitte, von denen die Anzahl der Kurven (in welche die Kurve C durch die Durchschnitte zerfällt) erhöht bzw. vermindert wird, so bestehen die Gleichungen

$$n = h + k \quad \text{und} \quad z = 1 + h - k.$$

Daraus folgt die Gleichung

$$z = 1 + n - 2k = 1 + 2h - n.$$

Aus dieser Gleichung folgt der Satz XIV und folgen die Sätze:

XV. *Eine Kurve C der Sphäre mit n Doppelpunkten besteht höchstens aus $n+1$ Zykeln. Erreicht die Anzahl der Zykel dieses Maximum, so zerfällt die Kurve durch den Durchschnitt irgendeines Doppelpunktes in zwei Kurven, die keinen gemeinsamen Punkt haben.*

XVI. *Besteht eine Kurve C auf der Sphäre aus zwei Zykeln, so ist die Anzahl ihrer Doppelpunkte, n, ungerade und zerfällt die Kurve durch den Durchschnitt irgendeines Doppelpunktes in zwei Kurven mit $n-1$ gemeinsamen Punkten.*

XVII. *Zerfällt die Kurve C auf der Sphäre durch den Durchschnitt eines ihrer n Doppelpunkte in zwei Kurven mit $2m$ Schnittpunkten, so besteht die Kurve höchstens aus $n+1-2m$ Zykeln.*

XVIII. *Schneidet man die Doppelpunkte einer Kurve C auf der Sphäre in irgendeiner Reihenfolge durch, so ist die Anzahl der Durchschnitte, von denen die Anzahl der Kurven erhöht bzw. vermindert wird, von der Aufeinanderfolge der Durchschnitte unabhängig.*

Herr F. Levi hat mich auf die folgende Verallgemeinerung dieser Sätze aufmerksam gemacht:

Man kann die Schnitte als Durchschnitte und Querschnitte auch so unterscheiden, daß im ersten Falle die Kurve orientiert bleibt, im zweiten aber nicht. Im Falle der Kurven auf der Sphäre stimmt diese Definition mit der obigen überein, im allgemeinen Falle aber nicht. Versteht man unter den Zykeln einer Kurve die orientierten einfachen Kurven, in welche die Kurve durch die Durchschnitte ihrer Doppelpunkte zerfällt, so bleiben

alle Sätze des § 5 bei der neuen Definition für Kurven auf beliebigen Flächen und Raumkurven bestehen.

6. Über Kurven auf der Sphäre mit zwei Zykeln.

Besteht eine Kurve C der Sphäre aus zwei Zykeln, so ist die Anzahl n ihrer Doppelpunkte ungerade und es stimmt die Aufeinanderfolge der gemeinsamen Punkte auf beiden Zykeln überein. Ist die Aufeinanderfolge der n Ecken des einen Zykels $1, 2, \ldots, n$, so gehört die Permutation der Doppelpunkte $P_{2n} = 12 \ldots n\,12 \ldots n$ der Kurve C an. Nennen wir im folgenden eine gemeinsame Ecke von zwei Zykeln oder von zwei Kurven, von der ein gewöhnlicher Doppelpunkt gebildet wird, eine *Doppelpunktsecke*, so folgen — aus der Permutation P_{2n} auf Grund der vorigen — die Sätze:

XIX. *Die aus zwei Zykeln bestehenden Kurven der Sphäre mit n Doppelpunkten sind — bis auf die Indikatrix der Sphäre — isotop. Für jede ungerade positive Zahl n gibt es solche Kurven mit n Doppelpunkten, die aus zwei Zykeln zusammengesetzt sind.*

XX. *Ist die Anzahl n der gemeinsamen Punkte der Zykel A und B* (die sich nicht schneiden) *ungerade und sind diese n Punkte alle Doppelpunktsecken, so bilden die Zykel A und B nach der Vereinigung der gemeinsamen Ecken in Doppelpunkte eine einzügige Kurve mit n Doppelpunkten.*

Es gilt auch die folgende Verallgemeinerung dieses Satzes:

XXI. *Sind C_1 und C_2 Kurven auf der Sphäre, die außer n_1 bzw. n_2 Doppelpunkten keine mehrfachen Punkte haben, ist ferner n_3 bzw. n_4 die Anzahl ihrer Schnittpunkte bzw. ihrer gemeinsamen Punkte, welche alle Doppelpunktsecken sind, und sind endlich diese $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$ Punkte alle verschieden, so bilden die Kurven C_1 und C_2 nach der Vereinigung der gemeinsamen Ecken eine einzügige Kurve C mit n Doppelpunkten oder zwei Kurven C_1 und C_2, je nachdem n_4 eine ungerade bzw. gerade Zahl ist.*

Sind $1, 2, \ldots, n_4$ die gemeinsamen Ecken der Kurven C_1 und C_2, so werden beide Kurven von diesen Punkten in n Strecken geteilt. Bezeichnen $a_1, a_2, \ldots, a_{n_1}$ bzw. $b_1, b_2, \ldots, b_{n_2}$ die Strecken $12, 23, \ldots, n_4 1$ auf der Kurve C_1 bzw. C_2, so folgen die Strecken $a_{i-1}b_i$ und $b_{i-1}a_i$ im Punkte nach der Vereinigung der gemeinsamen Ecken in Doppelpunkte aufeinander. Ist n_4 eine ungerade Zahl, so wird die einzügige Kurve C von einem beweglichen Punkte erzeugt, wenn er vom Punkte 1 ausgehend die $2n_4$ Strecken $a_i b_k$ in der Aufeinanderfolge $a_1 b_2 a_3 b_4 \ldots a_{n_1} b_1 a_2 b_3 \ldots b_{n_2}$ beschreibt.

Ist aber n_1 eine gerade Zahl, so bilden die Kurven C_1 und C_2 zwei Kurven C_1 und C_2. Diese Kurven bestehen aus den Strecken $a_1 b_2 a_3 b_4 \dots b_{n_1}$ bzw. $b_1 a_2 b_3 a_4 \dots a_{n_1}$.

7. Über die aus drei Zykeln bestehenden Kurven auf der Sphäre.

Ist C eine aus den drei Zykeln A, B_1 und B_2 bestehende Kurve der Sphäre mit n Doppelpunkten und hat der Zykel A mit B_1 bzw. B_2 n_1 bzw. n_2 gemeinsame Ecken, so ist $n = n_1 + n_2$. Die Zahlen n_1 und n_2 sind beide ungerade oder beide gerade Zahlen.

Ist A irgendein Zykel auf der Sphäre, welcher mit dem Zykel B_1 bzw. B_2 n_1 bzw. n_2 Doppelpunktsecken hat, und sind die Zahlen n_1 und n_2 ungerade Zahlen, so bilden die Zykel A und B_1 (nach dem Satze XXI) eine Kurve C_1. Diese Kurve C_1 bildet mit dem Zykel B_2 wieder eine einzügige Kurve C mit $n = n_1 + n_2$ Doppelpunkten.

Sind aber n_1 und n_2 gerade Zahlen, so bilden die Zykel A und B_1 zwei Kurven C_1 und C_2. Bilden die drei Zykel A, B_1, B_2 eine einzügige Kurve mit n Doppelpunkten, so muß der Zykel B_2 wenigstens je eine Ecke mit der Kurve C_1 und C_2 haben. Diese notwendige Bedingung ist auch hinreichend.

Wir beweisen diese Behauptung erst für den Fall, daß der Zykel B_2 nur einen Punkt Q_1 bzw. Q_2 mit der Kurve C_1 bzw. C_2 hat.

Beschreibt ein beweglicher Punkt Q von dem Punkte Q_1 ausgehend erst die Kurve C_1, dann den anschließenden Teil $Q_1 Q_2$ des Zykels B_2, ferner die Kurve C_2 in der entsprechenden Richtung und endlich den anderen Teil $Q_1 Q_2$ des Zykels B_2, so ist die einzügige Kurve C mit $n = n_1 + n_2$ Doppelpunkten erzeugt.

Hat der Zykel B_2 außer den Punkten Q_1 und Q_2 noch $2h$ gemeinsame Doppelpunktsecken mit dem Zykel A, so stellen die drei Zykel nach der Vereinigung der $2h$ Ecken s Kurven dar. Trennt man aber in diesen $2h$ Punkten den Zykel B_2 von dem Zykel A wieder ab, so nimmt die Anzahl der Kurven durch die $2h$ Durchschnitte um h_1 zu und um h_2 ab, so daß die Gleichungen $h_1 + h_2 = 2h$ und $s + h_1 - h_2 = 1$ bestehen.

Wird es bewiesen, daß $h_1 \geqq h_2$ ist, so ist $s = 1$.

Die Ungleichung $h_1 \geqq h_2$ ist richtig. Die Anzahl der Kurven wird nämlich durch den Durchschnitt eines Doppelpunktes der einen Kurve um 1 vermehrt. Schneidet man die Schnittpunkte von zwei Kurven durch, so wird die Anzahl der Kurven durch den ersten Durchschnitt um 1 vermindert, durch den zweiten Durchschnitt um 1 vermehrt, so daß die Anzahl der Kurven durch die Durchschnitte der Schnittpunkte von zwei Kurven unverändert bleibt. Auf Grund dessen folgt der Satz:

XXII. *Hat ein Zykel A auf der Sphäre mit den Zykeln B_1 und B n_1 bzw. n_2 gemeinsame Ecken und sind n_1 und n_2 ungerade Zahlen, s bilden die Zykel A, B_1 und B_2 eine einzügige Kurve mit $n_1 + n_2$ Doppel punkten. Die Zykel A, B_1 und B_2 bilden auch dann eine einzügig Kurve mit $n_1 + n_2$ Doppelpunkten, wenn n_1 und n_2 gerade Zahlen sin und wenn es auf dem Zykel A wenigstens zwei gemeinsame Ecken mi B_1 gibt, zwischen denen eine ungerade Anzahl der gemeinsamen Ecke der Zykel A und B_2 liegt. Ist keine dieser zwei Bedingungen erfüllt, s kann keine einzügige Kurve mit $n_1 + n_2$ Doppelpunkten aus A, B_1 un B_2 zusammengesetzt werden.*

Man kann einen entsprechenden Satz auch für Kurven auf der Sphär beweisen, die sich aus vier Zykeln zusammensetzen lassen.

8. Über die Kurven der Sphäre mit drei, vier und fünf Doppelpunkten

Gauß hat die Permutationen, zu denen Kurven der Sphäre mi n Doppelpunkten gehören, im Falle $n = 2, 3, 4$ und 5 dargestellt. Di Kurven aber, welche zu den Permutationen von Gauß gehören, sind nich alle topologisch verschieden.

Wir führen ein Symbol ein, um die Zykel der Kurven leichter charak terisieren zu können. Das Symbol

$$m_1, m_2, \ldots, m_h \mid n_1, n_2, \ldots, n_k$$

gehört dann zu einer Kurve der Sphäre mit n Doppelpunkten und mi z Zykeln, wenn

$$n = m_1 + m_2 + \ldots + m_h = n_1 + n_2 + \ldots + n_k \quad \text{und} \quad z = h + k$$

ist und wenn die h bzw. k Zykel der Kurve von derselben Farb $m_1, m_2, \ldots, m_h$ bzw. $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Doppelpunktsecken haben. (Die Zahle m_i, n_j, h und k sind alle positiv.)

Im Falle $n = 1$ und $n = 2$ gibt es nur je eine topologisch ver schiedene Kurve, welche mit der Permutation 11 bzw. 1122 charakterisiert werden kann.

Im Falle $n = 3$ gibt es drei topologisch verschiedene Kurven auf de Sphäre, die sich durch die Permutationen (α) 112233, (β) 112332 bzw (γ) 123123 charakterisieren lassen. Zu diesen Kurven gehören die Sym bole (α) 1, 1, 1 | 3, (β) 1, 2 | 1, 2 bzw. (γ) 3 | 3. Diese Symbole erschöpfe für $n = 3$ sämtliche Möglichkeiten.

Im Falle $n = 4$ gibt es fünf nicht isomorphe Kurven auf der Sphäre, die durch die Permutationen: (a) 11223344, (b) 11223443, (c) 11234432, (d) 11234234, (e) 12314324 dargestellt werden können. Die Symbole (a) 1, 1, 1, 1 | 4, (b) 1, 1, 2 | 1, 3, (c) 1, 1, 2 | 2, 2, (d) 1, 3 | 4, (e) 2, 2 | 4,

welche zu den Kurven (a) bis (e) gehören, erschöpfen auch in diesem Falle sämtliche Möglichkeiten.

Gauß hat bemerkt, daß die notwendige Bedingung des ersten Satzes für die Existenz von Kurven auf der Sphäre, die zu einer gegebenen Permutation P_{2n} der Doppelpunkte gehören sollen, im Falle $n \leqq 4$ auch hinreichend ist. Dies läßt sich durch einfache Rechnungen leicht einsehen.

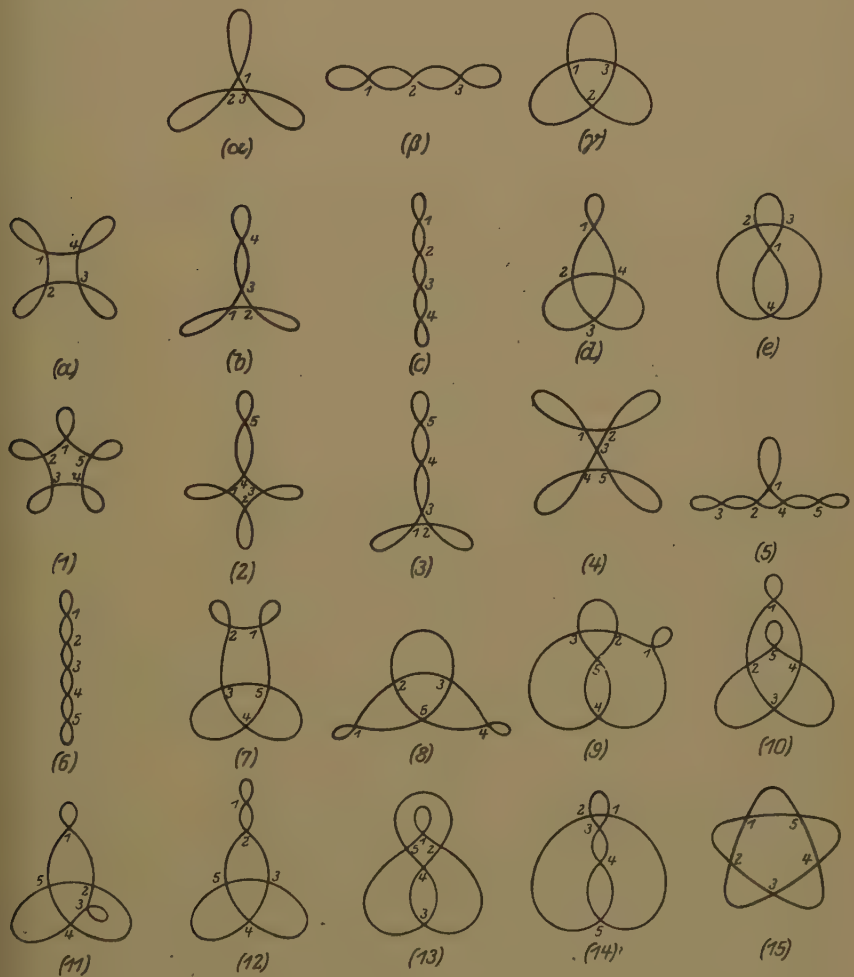


Fig. 1.

Im Falle $n = 5$ ist die Anzahl der nicht isomorphen Kurven 15, von denen 6, 8 bzw. 1 Kurven aus 6, 4 bzw. 2 Zykeln bestehen.

Die 6 Kurven mit 6 Zykeln lassen sich mit den Permutationen: (1) 1122334455, (2) 1122334554, (3) 1122345543, (4) 1122345453, (5) 1123324554, (6) 1123455432 darstellen, zu denen die Symbole:

(1) 1, 1, 1, 1, 1 | 5, (2) 1, 1, 1, 2 | 1, 4, (3) 1, 1, 1, 2 | 2, 3, (4) 1, 1, 3 | 1, 1, 3 (5) 1, 1, 3 | 1, 2, 2, (6) 1, 2, 2 | 1, 2, 2 gehören.

Die 8 Kurven mit 4 Zykeln und die zugehörigen Symbole sind di folgenden:

(7) 1122345345 und (8) 1123445235 mit dem Symbol 1, 1, 3 | 5,
(9) 1123453254 „ „ „ 1, 2, 2 | 5,
(10) 1123455234 „ (11) 1123345245 „ „ „ 1, 4 | 1, 4
(12) 1123453452 „ (13) 1123425435 „ „ „ 1, 4 | 2, 3
(14) 1234512543 „ „ „ 2, 3 | 2, 3

Die Kurve mit 2 Zykeln wird durch die Permutation (15) 123451234 oder durch das Symbol (15) 5 | 5 dargestellt.

Die Formen der nichtisomorphen Kurven mit drei, vier bzw. fün Doppelpunkten werden durch die Figuren (α) bis (γ), (a) bis (e) bzw (1) bis (15) gezeigt (s. Fig. 1).

Auf Grund der Symbole gilt der Satz:

XXIII. *Für jedes im voraus gegebene Symbol der Zykel gibt e Kurven auf der Sphäre mit n Doppelpunkten, wenn* $n \leqq 5$ *ist. Ist* $n \leqq 4$ *so sind die Kurven, die zu demselben Symbole gehören, alle isotop i einem dreidimensionalen sphärischen Raume.*

9. Ein Satz von Herrn F. Levi.

Mit der Erlaubnis des Herrn F. Levi teile ich die folgende von ihm herrührende Verallgemeinerung des Satzes IX und ihren Beweis mit:

Der Satz IX enthält zwei Bestandteile: 1. Kurven C mit derselben Permutation sind isomorph — das ist trivial. 2. Isomorphe C auf einer Sphäre können durch Verbiegung im dreidimensionalen Raum ohne Selbstdurchdringung ineinander übergeführt werden. Von letzterem Satze besteht folgende Verallgemeinerung:

XXIV. *Zwei isomorphe aus Punkten, Strecken und Flächenstücken bestehende Komplexe auf einer zweidimensionalen Sphäre können durch Verbiegung ohne Selbstdurchdringung durch das Innere der Sphäre hindurch in einander übergeführt werden.*

Der Satz wird mit der Einschränkung bewiesen, daß der Komplex zusammenhängt, der Übergang zu nicht zusammenhängenden Komplexen ist trivial. Auch ist es keine Einschränkung der Allgemeinheit anzunehmen, daß der Komplex nur aus Punkten und Flächenstücken besteht; denn jede Strecke des Komplexes läßt sich in ein Zweieck (dessen Ecken eventuell zusammenfallen) einschließen und jede Verbiegung, der man den so abgeänderten Komplex unterwerfen kann, wird vom ursprünglichen Komplex mitgemacht.

Die Punkte werden mit (1), (2), ..., (a),
die Flächenstücke mit [1], [2], ..., [b] bezeichnet.

Kommt (i) auf der Berandung von $[k]$ genau $\nu_k^{(i)}$-mal vor, so ist: $\sum_{k=1}^{b} \nu_k^{(i)} - 1 = \nu^{(i)}$ die Vielfachheit von (i) und $\sum_{i=1}^{a} \nu^{(i)} = \nu$ der Index des Komplexes.

Ist $\nu^{(i)} = 0$, so kann (i) durch interne Transformation beseitigt werden. Es sei also $\nu^{(i)} > 0$. Alle Strecken der Berandung von $[k]$, die unter sich zusammenhängen, bilden „einen Rand" von $[k]$. Summiert man $\sum \nu_k^{(i)}$ über einen Rand von $[k]$, so erhält man die Eckenzahl dieses Randes.

Ist $\nu = 0$, so besteht der Komplex aus einem einzigen Flächenstück und man kann isomorph berandete Flächenstücke auf der Sphäre sogar ohne Benutzung des Innern in einander verbiegen. Es sei also der Satz für $\nu = \mu - 1$ richtig und er wird für $\nu = \mu$ bewiesen.

I und *II* seien isomorphe Komplexe auf der Sphäre vom Index $\nu = \mu$. Die entsprechenden Flächenstücke und Punkte in *I* und *II* werden mit den gleichen Buchstaben bezeichnet.

Grenzt an den Eckpunkt (l) ein eineckiger Rand, so kann man das betreffende Flächenstück $[k]$ unter Festhaltung von (l) so durch das Innere der Sphäre hindurch ohne Selbstdurchdringung des Komplexes verbiegen, daß $[k]$ einem andern Flächenstück $[l]$ in *I* ebenso benachbart wird, wie in *II*. Dann kann man $[k]$ und $[l]$ zu einem Flächenstück verschmelzen. Dadurch wird $\nu = \mu$ auf $\mu - 1$ herabgedrückt und nach der Induktionsvoraussetzung die Verbiegung von *I* und *II* in der verlangten Art möglich. Es kann also ohne Einschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß kein eineckiger Rand auftritt.

Betrachtet man jetzt den Restkomplex der Sphäre hinsichtlich *II*, so muß in ihm ein „Elementarflächenstück" e vorkommen, dessen Rand mehr als null Eckpunkte des Komplexes hat. Um das einzusehen, braucht man nur von einem willkürlichen Flächenstück des Restkomplexes (in der Figur weiß) auszugehen, das an einen Komplexpunkt angrenzt; im Innern (d. h. der dem Flächenstück zugekehrten Seite) seines einen Randes können noch Flächenstücke des Komplexes *II* liegen. Da diese aber keine eineckigen Ränder haben dürfen, muß dann im Innern auch noch ein solches Flächenstück des Restkomplexes liegen, das an einen Punkt des Komplexes *II* grenzen muß. Dessen äußerer Rand muß dann weniger Flächenstücke von *II*

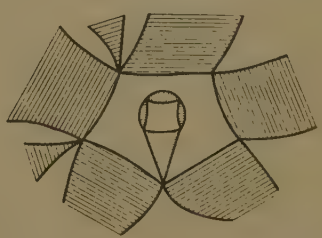


Fig. 2.

einschließen (in der Figur Null) und durch Fortsetzung des Verfahrens kommt man zu dem gesuchten e. Entspricht dem Rande r_{II} von e in gleichfalls der Rand r_I eines Elementarflächenstückes, so verschmelze man in I und II diese Flächenstücke mit den angrenzenden Flächenstücken des Komplexes zu je einem Flächenstück. So entstehen isomorphe Komplexe I' und II'', für die $\nu < \mu$ ist.

Es braucht also nur noch gezeigt zu werden, daß man aus dem Innern von r_I alle Bestandteile von I herausbiegen kann, wenn das Innere von r_{II} frei von solchen Stücken ist. Das ist so einzusehen:

An jede Randstrecke von r_I (bzw. r_{II}) grenzt genau ein Flächenstück von I (bzw. II). Zerreißt man nun diese Ränder, indem man alle diese Flächenstücke von den Eckpunkten von r_I (bzw. r_{II}) abheftet, so zerfallen I und II in isomorpher Weise in Teilkomplexe. Da nach dieser Operation die im Innern von r_I liegenden Bestandteile von I von denen im Äußern getrennt werden, liegen also im Innern von r_I ein oder mehrere solche Teilkomplexe vollständig. Die zyklische Reihenfolge der entsprechenden Teilkomplexe von I und II, an die einander entsprechende Zykeln der Punkte und Flächenstücke von r_I und r_{II} angrenzen, ist wegen des Isomorphismus dieselbe. Da aber die Teilkomplexe von II ganz im Äußern von r_{II} liegen, können sich diese Grenzpunkte und Flächenstücke auf r_I nicht gegenseitig trennen. Grenzt daher ein Teilkomplex von I, der im Innern von r_I liegt, an gewisse Randstrecken und Randpunkte von r_I, so kann man im Äußern von r_I auf der Sphäre ein einfach zusammenhängendes Flächenstück zeichnen, das ganz im Restkomplex von I liegt und die genannten Randstrecken und Punkte auf seinem Rande enthält. In dieses Flächenstück hinein läßt sich durch das ganze Innere der Sphäre hindurch der Teilkomplex verbiegen und in endlich vielen Schritten das ganze Innere von r_I freimachen. Damit ist der Satz bewiesen.

(Eingegangen am 28. April 1925.)

Untersuchungen über Dirichletsche Reihen.

Von

Karl Grandjot in Göttingen.

Einleitung.

Ist eine Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad (s = \sigma + ti) \tag{1}$$

n irgend einem Punkte s mit dem Realteil γ konvergent, so stellt sie einen Zweig $f(s)$ einer analytischen Funktion dar, der mindestens für $\sigma > \gamma$ regulär ist. Man weiß, daß das Konvergenzgebiet von (1) eine Halbebene $\sigma > \alpha_0$ (oder die ganze Ebene) ist, daß aber — anders als bei Potenzreihen — die Konvergenzabszisse α_0 nicht durch Singularitäten von $f(s)$ auf oder in beliebiger Nähe der Geraden $\sigma = \alpha_0$ gekennzeichnet ist. Zieht man allerdings zur Behandlung des „Konvergenzproblems" noch die „Größenordnung" von $f(s)$ mit in die Betrachtung, so bestehen Zusammenhänge, die durch Sätze der folgenden Art gegeben sind:

Aus der Regularität von $f(s)$ und der Gültigkeit von $(|t| \to \infty)$

$$f(s) = O(|t|^k)$$

für $\sigma > \sigma_0$ kann man auf die Konvergenz von (1) *für $\sigma > \sigma_1(\sigma_0, k)$ schließen; aus der Konvergenz von* (1) *für $\sigma > \sigma_0$ kann man für $\sigma > \eta > \sigma_0$ auf*

$$f(s) = O(|t|^{k(\eta, \sigma_0)})$$

schließen.

Nie ist jedoch, wie man weiß, die Bindung zwischen dem Konvergenzverhalten von (1) und der Größenordnung von f s) auf senkrechten Geraden, die man durch die Lindelöfsche μ-Funktion

$$\mu(\sigma) = \overline{\lim_{|t| \to \infty}} \frac{\log |f(\sigma + ti)|}{\log |t|} \tag{2}$$

beschreiben kann (also $\mu(\sigma) =$ untere Grenze der k mit $f(\sigma + ti) = O(|t^k|)$ so eng, daß $\mu(\sigma)$ etwa durch die Konvergenzabszisse bestimmt wäre oder umgekehrt; eine solche Bestimmung geht auch dann nicht an, wenn man die Abszissen der absoluten Konvergenz und der Cesàro-Summierbarkeit $\varkappa$-ter Ordnung hinzuzieht.

Aber jene Abszissen stehen, wie diese Arbeit in ihrem ersten Teil zeigen soll, in einem engeren Zusammenhange mit einer neu einzuführenden Funktion $\nu(\sigma)$, welche die „mittlere Größenordnung" von $f(s)$ auf einer senkrechten Geraden mißt; sie werde durch

$$1 + 2\nu(\sigma) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{\log \int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2 \, dt}{\log T} \tag{3}$$

$\left(\text{also } \nu(\sigma) = \text{untere Grenze der } k \text{ mit } \int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2 \, dt = O(T^{2k+1})\right)$ erklärt. Es stellt sich zunächst heraus, daß $\nu(\sigma)$ auch die bekannten allgemeinen Eigenschaften von $\mu(\sigma)$ — Konvexität u. dgl. — hat. Weiter kann man in den Voraussetzungen aller Sätze, die aus einer oberen Schranke von $\mu(\sigma)$ eine solche für die Konvergenzabszisse usw. herleiten, glatt $\mu(\sigma)$ durch $\nu(\sigma)$ ersetzen; jene Sätze werden dadurch, wie leicht zu sehen ist, verschärft. Umgekehrt ergeben sich aus den Konvergenzverhältnissen bessere obere Schranken für $\nu(\sigma)$, als für $\mu(\sigma)$ bestehen.

An Stelle der für $\mu(\sigma)$ geltenden Ungleichheitsbeziehungen erlange ich insbesondere z. B. im folgenden Falle für $\nu(\sigma)$ eine Gleichheit:

Für alle Reihen (1), *die* 1 *zur Abszisse der absoluten Konvergenz und* $-\varkappa$ *für jedes* $\varkappa \geqq 0$ *zur Abszisse der Summierbarkeit* $\varkappa$*-ter Ordnung haben, ist*

$$\nu(\sigma) = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma \geqq \tfrac{1}{2},$$
$$\nu(\sigma) = \tfrac{1}{2} - \sigma \qquad \text{für} \quad \sigma < \tfrac{1}{2}.$$

Ich beschränke mich bei der Entwicklung dieser Ergebnisse nicht auf Reihen der Form (1), sondern lasse allgemeine Dirichletsche Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s} \tag{4}$$

mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots$, $\lambda_n \to \infty$ zu; an Stelle der Cesàro-Summierung tritt dann die Summierung nach Rieszschen typischen Mitteln (erster oder zweiter Art)[1]. Ein Teil der Sätze ist allerdings von solcher Art, daß er die Einschränkung des λ-Typus

[1]) Wegen der vorkommenden bekannten Sätze über Dirichletsche Reihen verweise ich allgemein auf E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909 und auf G. H. Hardy und M. Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915; ich führe diese Bücher unter L bzw. H. R. an.

5) $$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = O(e^{\lambda_n l})$$

$l > 0$) benötigt.

Der kurze zweite Teil der Arbeit sucht einen Zusammenhang zwischen wei Sätzen über die Nullstellenanzahl allgemeiner Dirichletscher Reihen erzustellen. Wennberg bewies, daß die Anzahl der Nullstellen von $(s)\,(\not\equiv 0)$ im Gebiet $\sigma \geqq \alpha_0 + \delta$, $T \leqq t \leqq T + \log T$, wo $\delta > 0$ fest,

$$O(\log^2 T)$$

st, Landau zeigte, daß ihre Anzahl in $\sigma \geqq \alpha_0 + \delta$, $T \leqq t \leqq T+1$

$$o(\log^2 T)$$

st; beide arbeiten mit scheinbar verschiedenen Mitteln. Ich werde zeigen, laß mit Hilfe der Jensenschen Ungleichheit — die Landau benutzte — nd der konformen Abbildung eines Quadrats, in dem Nullstellen zu zählen ind, auf den Kreis — das spielte bei Wennberg versteckt mit — beide Sätze zugleich und außerdem ein schärferer, den Landauschen enthaltender Satz abgeleitet werden können. Beim Beweis ließe sich zwar das Quadrat durch einen Halbstreifen ersetzen, wodurch das elliptische Integral ermieden würde; doch diese Verschleierung der Methode würde keinen esentlichen Vorteil bringen[2]).

Erster Teil.

Über die mittlere Größenordnung Dirichletscher Reihen.

Voraus schicke ich einen mehrfach benutzten kleinen

Hilfssatz. *Ist* $g(t)$ *stetig für* $t \gtrless 0$ *und ist bei* $T \to \infty$

$$\int_{-T}^{T} g^2(t)\,dt = O(T^k)\ ^3),$$

o ist bei $|t| \to \infty$

$$\int_0^t g(\tau)\,d\tau = O\left(|t|^{\frac{k+1}{2}}\right).$$

Beweis.

$$\left|\int_0^t g(\tau)\,d\tau\right| \leqq \sqrt{\int_0^t g^2(\tau)\,d\tau \int_0^t d\tau} = O\left(|t|^{\frac{k+1}{2}}\right).$$

---

[2]) Diese Arbeit wurde am 3. Juli 1925 der math.-naturw. Fakultät der Universität Göttingen als Habilitationsschrift vorgelegt.

[3]) $g(t) = O(h(t))$ bzw. $= o(h(t))$ soll ausdrücken, daß bei $t > t_0$ und passendem c stets $|g(t)| \leqq c\,h(t)$ bzw. für jedes $\varepsilon > 0$ bei $t > t_0(\varepsilon)$ stets $|g(t)| \leqq \varepsilon\,h(t)$ ist; mit c bezeichne ich unterschiedslos positive Konstanten.

Ich entwickle nun zunächst eine Reihe von Sätzen (Sätze 1—10 die zwar alle Hauptergebnisse des ersten Teils schon enthalten, abe weder von $\nu(\sigma)$ noch den verschiedenen Abszissen der Konvergenz un Summierbarkeit reden; es ist bequemer, die Sätze erst zum Schlu (Sätze 11—12) in eine Form zu bringen, die jene Begriffe enthält.

Die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}, \tag{4}$$

von der dauernd die Rede sein wird, sei irgendwo bei passendem $\varkappa \geqq$ summierbar nach Rieszschen Mitteln $\varkappa$-ter Ordnung[4]); dann gibt es be kanntlich eine Zahl S [5]), so daß (4) in jedem s mit $\sigma > S$ von eine passenden Ordnung, für $\sigma < S$ aber von keiner Ordnung summierbar is Diese Zahl S hat ferner die Eigenschaft, daß im Regularitätsgebiet de durch (4) erklärten analytischen Funktion $f(s)$ die Beziehung

$$f(\sigma + ti) = O(|t|^k)$$

(mit passendem k) gleichmäßig in σ für $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2,\ S < \sigma_2$ gilt bzw. nicht gilt, je nachdem $\sigma_1 > S$ bzw. $\sigma_1 < S$ ist. Endlich nehm ich für das Folgende ständig an, daß $f(s)$ nicht identisch verschwindet

Satz 1. *Wenn für ein* $\eta > S$

$$\int_{-T}^{T} |f(\eta + ti)|^2 \, dt = O(T^k) \tag{6}$$

gilt, so ist auch für alle $\sigma > \eta$

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2 \, dt = O(T^k)\ ^{6}).$$

Beweis. Offenbar genügt es, $\lambda_1 = 0$ anzunehmen und die Behauptun für $\sigma = \gamma$, wo $\eta < \gamma < \eta + 1$ ist, zu beweisen. Die ganze Zahl $p > 0$ se so groß, daß einmal

$$f(s) = O(|t|^{p-1}) \tag{7}$$

gleichmäßig in $\eta \leqq \sigma \leqq \eta + 1$, zum anderen für $v = \gamma + \tau i$, $x \geqq 0$

$$\sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n v} (1 - e^{\lambda_n - x})^p = \frac{p!}{2\pi i} \int_{(\eta+1)} \frac{f(s)\, e^{x(s-v)}}{(s-v)\cdots(s-v+p)} \, ds\ ^{7})$$

[4]) Da aus der Summierbarkeit erster Art $R(\lambda, \varkappa)$ *oder* zweiter Art $R(e^{\lambda}, \varkappa)$ in Punkte s_0 die Summierbarkeit $R(\lambda, \varkappa)$ *und* $R(e^{\lambda}, \varkappa)$ für $\sigma > \Re s_0$ folgt, ist es gleich gültig, welche der beiden Arten hier gemeint ist.

[5]) Es kann auch $S = -\infty$ sein.

[6]) Vgl. F. Carlson, Contributions à la théorie des séries de Dirichlet, Note I Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 16 (1922), N:o 18, S. 2.

[7]) Statt $\int_{a-\infty i}^{a+\infty i}$ schreibe ich stets $\int_{(a)}$.

ilt. Hierin darf wegen (7) die Integration auf $\sigma = \eta$ verlegt werden, enn das Residuum $\frac{f(v)}{p!}$ des Integranden in $s = v$ berücksichtigt wird; ür $x = 0$ insbesondere ergibt sich

$$f(v) = -\frac{p!}{2\pi i}\int_{(\eta)} \frac{f(s)}{(s-v)\cdots(s-v+p)}\,ds.$$

Daher gilt für $T \geqq 1$, $|\tau| \leqq T$

$$|f(v)| < c\int_{2T}^{\infty} \frac{t^{p-1}}{t^{p+1}}\,dt + c\int_{-2T}^{2T} \frac{|f(\eta+ti)|}{1+(t-\tau)^2}\,dt,$$

$$|f(v)|^2 < \frac{c}{T^2} + c\int_{-2T}^{2T} \frac{|f(\eta+ti)|^2}{1+(t-\tau)^2}\,dt \int_{-2T}^{2T} \frac{dt}{1+(t-\tau)^2}$$

$$< \frac{c}{T} + c\int_{-2T}^{2T} \frac{|f(\eta+ti)|^2}{1+(t-\tau)^2}\,dt;$$

la $k \geqq 0$ ist, ergibt dies nach (6)

$$\int_{-T}^{T} |f(\gamma+\tau i)|^2\,d\tau = O(1) + O\int_{-2T}^{2T} |f(\eta+ti)|^2\,dt \int_{-T}^{T} \frac{d\tau}{1+(t-\tau)^2} = O(T^k).$$

. Satz 2. *Wenn für ein* $\eta > S$

6) $$\int_{-T}^{T} |f(\eta+ti)|^2\,dt = O(T^k)$$

ilt, so ist

$$\mu(\eta) \leqq \frac{k}{2}\ ^{8}).$$

Beweis. Bei $\varepsilon > 0$ betrachte ich den Punkt $v = \eta + \varepsilon + \tau i$, $\tau \gtrless 0$, nd das ihn umschließende Rechteck $ABCD$, wo $A = \eta + 2|\tau| i$, $B = \eta - 2|\tau| i$, $C = \eta + 2\varepsilon - 2|\tau| i$, $D = \eta + 2\varepsilon + 2|\tau| i$ ist. Wegen

$$f(v) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ABCDA} \frac{f(s)}{s-v}\,ds$$

st nach (6) und Satz 1

---

[8]) Vgl. a. a. O. [6]), S. 8. — Satz 2 und 3 wurden kürzlich angegeben bei F. Carlson, Sur quelques valeurs moyennes d'une fonction analytique, Comptes rendus **181** (1925), S. 397—399.

$$f(v) = O\int_{-2|\tau|}^{2|\tau|} \frac{|f(\eta+ti)|+|f(\eta+2\varepsilon+ti)|}{1+|t-\tau|}\,dt + O\int_{\eta}^{\eta+2\varepsilon} \frac{|f(\sigma+2|\tau|i)|+|f(\sigma-2|\tau|i)|}{|\tau|}\,d\sigma$$

$$= O\Big(\int_{-2|\tau|}^{2|\tau|} \frac{dt}{1+(t-\tau)^2} \int_{-2|\tau|}^{2|\tau|} \{|f(\eta+ti)|^2+|f(\eta+2\varepsilon+ti)|^2\}\,dt\Big) + O\left(|\tau|^{\mu(\eta)-\frac{1}{2}}\right)$$

$$= O\left(|\tau|^{\frac{k}{2}}\right) + O\left(|\tau|^{\mu(\eta)-\frac{1}{2}}\right).$$

Aus

$$\mu(\eta+\varepsilon) \leqq \mathrm{Max}\left(\frac{k}{2},\ \mu(\eta)-\frac{1}{2}\right)$$

folgt wegen der Stetigkeit von $\mu(\sigma)$ sofort

$$\mu(\eta) \leqq \frac{k}{2}.$$

Satz 3. *Wenn für ein $\eta > S$ und ein $\zeta > S$*

$$\int_{-T}^{T} |f(\eta+ti)|^2\,dt = O(T^k),$$

$$\int_{-T}^{T} |f(\zeta+ti)|^2\,dt = O(T^l)$$

gilt, so ist

$$\int_{-T}^{T} \left|f\left(\frac{\eta+\zeta}{2}+ti\right)\right|^2 dt = O\left(T^{\frac{k+l}{2}+\delta}\right)$$

für jedes $\delta > 0$.

Beweis.

$$\int_{-T}^{T} \left|f\left(\frac{\eta+\zeta}{2}+ti\right)\right|^2 dt = -i\int_{-T}^{T} f\left(\frac{\eta+\zeta}{2}+ti\right)\bar{f}\left(\eta+\zeta-\left(\frac{\eta+\zeta}{2}+ti\right)\right)i\,dt$$ [9]

$$= -i\int_{\frac{\eta+\zeta}{2}-Ti}^{\frac{\eta+\zeta}{2}+Ti} f(s)\bar{f}(\eta+\zeta-s)\,ds$$

$$= -i\int_{\frac{\eta+\zeta}{2}-Ti}^{\eta-Ti} - i\int_{\eta-Ti}^{\eta+Ti} - i\int_{\eta+Ti}^{\frac{\eta+\zeta}{2}+Ti} = J_1+J_2+J_3$$

[9]) $\bar{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n e^{-\bar{\lambda}_n s}$.

etwa. Die Konvexität von $\mu(\sigma)$ liefert für σ zwischen η und ζ

$$\mu(\sigma)+\mu(\eta+\zeta-\sigma)\leqq\mu(\eta)+\mu(\zeta),$$

so daß für jedes $\delta>0$, wegen Satz 2,

$$J_1+J_3=O\left(T^{\mu(\eta)+\mu(\zeta)+\delta}\right)=O\left(T^{\frac{k+l}{2}+\delta}\right)$$

wird; und es ist

$$J_2=\int_{-T}^{T}f(\eta+ti)\,\bar{f}(\zeta-ti)\,dt$$

$$=O\Big(\int_{-T}^{T}|f(\eta+ti)|^2\,dt\int_{-T}^{T}|f(\zeta+ti)|^2\,dt\Big)^{\frac{1}{2}}=O\left(T^{\frac{k+l}{2}}\right).$$

Satz 4. *Ist die Reihe* (4) *für* $\sigma>\sigma_0$ *summierbar* $\varkappa$*-ter Ordnung* ($\varkappa\geqq 0$), *so ist bei* $\sigma>\sigma_0$

$$\int_{-T}^{T}|f(\sigma+ti)|^2\,dt=O(T^{2\varkappa+2+\delta})$$

für jedes $\delta>0$.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_1\geqq 0$, $\sigma_0<0$, $\sigma>0$. Mit

$$A^{\varkappa}(x)=\sum_{\lambda_n<x}a_n(x-\lambda_n)^{\varkappa}$$

ist dann bekanntlich bei $x\to\infty$

$$A^{\varkappa}(x)=O(x^{\varkappa}),$$

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)}\int_0^{\infty}s^{\varkappa+1}e^{-su}A^{\varkappa}(u)\,du,$$

$$\bar{f}(\bar{s})=\frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)}\int_0^{\infty}\bar{s}^{\varkappa+1}e^{-\bar{s}u}\bar{A}^{\varkappa}(u)\,du;$$

da ferner beide Integrale auf $-T\leqq t\leqq T$ gleichmäßig konvergieren, gilt

$$\int_{-T}^{T}|f(\sigma+ti)|^2\,dt$$

$$=c\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}A^{\varkappa}(u)\,\bar{A}^{\varkappa}(v)\,e^{-\sigma(u+v)}\,du\,dv\int_{-T}^{T}(\sigma^2+t^2)^{\varkappa+1}e^{-ti(u-v)}\,dt.$$

Nun ist für $T\geqq 1$, $-T\leqq t\leqq T$

$$(\sigma^2+t^2)^{\varkappa+1}-t^{2\varkappa+2}<cT^{2\varkappa},$$

so daß es wegen

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}|A^{\varkappa}(u)|\,|\bar{A}^{\varkappa}(v)|\,e^{-\sigma u}e^{-\sigma v}T^{2\varkappa+1}\,du\,dv=O(T^{2\varkappa+1})$$

genügt,

$$J=\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}(u+v)}\,du\,dv\left|\int_{-T}^{T}t^{2\varkappa+2}e^{-ti(u-v)}\,dt\right|=O(T^{2\varkappa+2+\delta})$$

zu beweisen. Einerseits ist aber für $T\geqq 1$

$$\left|\int_{-T}^{T}t^{2\varkappa+2}e^{-ti(u-v)}\,dt\right|<cT^{2\varkappa+3},$$

andererseits $(u\neq v)$

$$\left|\int_{-T}^{T}t^{2\varkappa+2}e^{-ti(u-v)}\,dt\right|$$

$$=\left|\left\{\frac{e^{-ti(u-v)}t^{2\varkappa+2}}{-i(u-v)}\right\}_{-T}^{T}+\frac{2\varkappa+2}{i(u-v)}\int_{-T}^{T}t^{2\varkappa+1}e^{-ti(u-v)}\,dt\right|<\frac{cT^{2\varkappa+2}}{|u-v|}.$$

Das ergibt zunächst

$$J=OT^{2\varkappa+2}\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}(u+v)}\operatorname{Min}\left(T,\frac{1}{|u-v|}\right)du\,dv$$

$$=OT^{2\varkappa+2}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}u}\,du\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}v}\operatorname{Min}\left(T,\frac{1}{|u-v|}\right)dv.$$

Wegen

$$\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}v}\operatorname{Min}\left(T,\frac{1}{|u-v|}\right)dv$$

$$<\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}v}\,dv+c\int_{u-1}^{u+1}\operatorname{Min}\left(T,\frac{1}{|u-v|}\right)dv<c+c\int_0^{\frac{1}{T}}T\,dw+c\int_{\frac{1}{T}}^{1}\frac{dw}{w}<cT^{\delta}$$

für $T\geqq 1$ und jedes $\delta>0$ folgt endlich

$$J=OT^{2\varkappa+2}\int_0^\infty e^{-\frac{\sigma}{2}u}T^{\delta}\,du=O(T^{2\varkappa+2+\delta}).$$

Satz 5. *Ist die Reihe* (4) *für* $\sigma>\sigma_0$ *summierbar* $\varkappa$*-ter Ordnung* $(\varkappa\geqq 0)$ *und für* $\sigma>\sigma_1$ *absolut konvergent, so ist bei* $\sigma>\frac{\sigma_0+\sigma_1}{2}$

$$\int_{-T}^{T}|f(\sigma+ti)|^2\,dt=O(T^{\varkappa+1+\delta})$$

für jedes $\delta>0$ [10]).

[10]) Vgl. L., S. 798, Satz 41.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_1 \geqq 0$, $\sigma_0 < 0$, $\sigma - \sigma_1 > 0$. Ähnlich wie beim Beweis von Satz 3 ist, wegen Satz 4 und 3,

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma+ti)|^2\,dt = O\left(T^{\mu(0)+\mu(\sigma_1)+\delta}\right) + \int_{-T}^{T} f\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)\bar{f}\left(\sigma+\frac{\sigma_1}{2}-ti\right)dt$$

$$= O\left(T^{\varkappa+1+\delta}\right) + \int_{-T}^{T}\sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n e^{-\lambda_n\left(\sigma+\frac{\sigma_1}{2}\right)} e^{\lambda_n ti} f\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)dt,$$

wo die Summe wegen $\sigma+\frac{\sigma_1}{2} > \sigma_1$ absolut und gleichmäßig auf $-T \leqq t \leqq T$ konvergiert, so daß der Nachweis von

$$\int_{-T}^{T} e^{\lambda_n ti} f\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)dt = O\left(T^{\varkappa+1+\delta}\right)$$

gleichmäßig in n genügt. Mit

$$A^{\varkappa}(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n (x-\lambda_n)^{\varkappa} = O\left(x^{\varkappa}\right)$$

ist wiederum für $s = \sigma - \frac{\sigma_1}{2} + ti$

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(\varkappa+1)} \int_0^{\infty} s^{\varkappa+1} e^{-su} A^{\varkappa}(u)\,du,$$

wo das Integral für $-T \leqq t \leqq T$ gleichmäßig konvergiert. Wenn ich kurz $\frac{\sigma_1}{2} = \gamma\,(>0)$ schreibe, wird

$$\int_{-T}^{T} e^{\lambda_n ti} f\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)dt = c\int_0^{\infty} A^{\varkappa}(u)\,e^{-2\gamma u}\,du \int_{-T}^{T}\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)^{\varkappa+1} e^{(\lambda_n-u)ti}\,dt$$

$$= O\int_0^{\infty} e^{-\gamma u}\,du\left|\int_{-T}^{T}\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)^{\varkappa+1} e^{(\lambda_n-u)ti}\,dt\right|.$$

Wegen

$$\left|\left(\sigma-\frac{\sigma_1}{2}+ti\right)^{\varkappa+1} - (ti)^{\varkappa+1}\right| < cT^{\varkappa}$$

für $T \geqq 1$, $-T \leqq t \leqq T$ und wegen

$$\int_0^{\infty} e^{-\gamma u}\,du \int_{-T}^{T} T^{\varkappa}\,dt = O\left(T^{\varkappa+1}\right)$$

brauche ich endlich nur

$$J = \int_0^{\infty} e^{-\gamma u}\,du\left|\int_{-T}^{T} t^{\varkappa+1} e^{(\lambda_n-u)ti}\,dt\right| = O\left(T^{\varkappa+1+\delta}\right)$$

zu zeigen. Hierin ist, ähnlich wie oben,

$$\int_{-T}^{T} t^{\varkappa+1} e^{(\lambda_n-u)ti}\,dt = O\left(T^{\varkappa+1}\,\mathrm{Min}\left(T, \frac{1}{|\lambda_n-u|}\right)\right),$$

so daß tatsächlich

$$J = O\,T^{\varkappa+1}\int_0^{\infty} e^{-\gamma u}\,du + O\,T^{\varkappa+1}\int_{\lambda_n-1}^{\lambda_n+1} \mathrm{Min}\left(T, \frac{1}{|\lambda_n-u|}\right)du = O\left(T^{\varkappa+1+\delta}\right)$$

wird.

Satz 6. *Wenn für ein* $\eta > S$

$$\int_{-T}^{T} |f(\eta+ti)|^2\,dt = O(T^k) \tag{6}$$

gilt, so ist $k \geqq 1$ [11]).

Beweis. Für genügend großes ganzes $p > 0$ ist, da ich $\eta > 0$ annehmen darf, bei $x \gtrless 0$

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n (x-\lambda_n)^p = \frac{p!}{2\pi i}\int_{(\eta)} \frac{e^{xs}}{s^{p+1}} f(s)\,ds.$$

Wäre die Behauptung falsch, so wäre diese Gleichung p-mal nach x differenzierbar; denn rechts entsteht formal das Integral

$$\int_{(\eta)} \frac{e^{xs}}{s} f(s)\,ds,$$

das für $|x| < c$ gleichmäßig konvergiert, da der Integrand absolut $< c\,\frac{|f(s)|}{1+|t|}$ und für $y \to \infty$ nach (6) und dem Hilfssatz

$$\int_{-y}^{y} \frac{|f(\sigma+ti)|}{1+|t|}\,dt = \left\{\frac{\int_0^t |f(\sigma+\tau i)|\,d\tau}{1+|t|}\right\}_{-y}^{y} + \int_{-y}^{y}\frac{\int_0^t |f(\sigma+\tau i)|\,|d\tau|}{(1+|t|)^2}\,dt$$

$$= O\left(y^{\frac{k-1}{2}}\right) + O\int_{-y}^{y} (1+|t|)^{\frac{k+1}{2}-2} dt = O(1)$$

gilt. So ergibt sich

$$\sum_{\lambda_n<x} a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\eta)} \frac{e^{xs}}{s} f(s)\,ds,$$

und da rechts eine stetige Funktion von x steht, wäre $a_1 = a_2 = \cdots = 0$.

[11]) Vgl. T. Jansson, Über die Größenordnung Dirichlet'scher Reihen, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 15 (1920), N:o 6, S. 2.

Satz 7. *Für ein* $\eta > S$ *sei*

$$6) \qquad \int_{-T}^{T} |f(\eta + ti)|^2 \, dt = O(T^k).$$

Dann ist $f(s)$ *für* $\sigma > \eta$ *summierbar* $\varkappa$*-ter Ordnung für jedes* $\varkappa > \frac{k-1}{2}$ [12]).

Beweis. Es sei $\varkappa > \frac{k-1}{2}$; die Behauptung ist in $v = \gamma + \tau i$ zu eigen, wo ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\eta < \gamma < \eta + 1$ sei. Für enügend großes ganzes $p > 0$ und $y > 0$ ist jedenfalls

$$\sum_{e^{\lambda_n} < y} a_n e^{-\lambda_n v} (y - e^{\lambda_n})^{\varkappa+p}$$

$$= \frac{\Gamma(\varkappa+p+1) y^{\varkappa+p}}{2\pi i} \int_{(\gamma+1)} \frac{\Gamma(s-v)}{\Gamma(\varkappa+p+1+s-v)} y^{s-v} f(s) \, ds$$

nd

$$f(s) = O(|t|^{\varkappa+p})$$

leichmäßig in $\eta \leqq \sigma \leqq \gamma + 1$, so daß

$$\sum_{e^{\lambda_n} < y} a_n e^{-\lambda_n v} (y - e^{\lambda_n})^{\varkappa+p} - f(v) y^{\varkappa+p}$$

$$= -ci y^{\varkappa+p} \int_{(\eta)} \frac{\Gamma(s-v)}{\Gamma(\varkappa+p+1+s-v)} y^{s-v} f(s) \, ds$$

ilt. Die p-malige Differentiation nach y ergibt formal

$$\sum_{\lambda_n < y} a_n e^{-\lambda_n v} (y - e^{\lambda_n})^{\varkappa} - f(v) y^{\varkappa} = -ci y^{\varkappa} \int_{(\eta)} \frac{\Gamma(s-v)}{\Gamma(\varkappa+1+s-v)} y^{s-v} f(s) \, ds.$$

Dies Ergebnis ist richtig, da das Integral auf der rechten Seite für $y < c$ leichmäßig konvergiert, indem dann z. B. $(\omega \to \infty)$

$$\int_{\eta}^{\eta+\omega i} \left| \frac{\Gamma(s-v)}{\Gamma(\varkappa+1+s-v)} f(s) \, ds \right| = O \int_0^{\omega} \frac{|f(\eta+ti)|}{(1+t)^{\varkappa+1}} \, dt$$

$$= O \frac{\int_0^{\omega} |f(\eta+\tau i)| \, d\tau}{\omega^{\varkappa+1}} + O \int_0^{\omega} \frac{\int_0^{t} |f(\eta+\tau i)| \, d\tau}{(1+t)^{\varkappa+2}} \, dt$$

$$= O\left(\omega^{\frac{k+1}{2} - \varkappa - 1}\right) + O \int_0^{\omega} (1+t)^{\frac{k+1}{2} - \varkappa - 2} \, dt = O(1)$$

st; gleichzeitig ergibt sich die Behauptung

$$y^{-\varkappa} \sum_{e^{\lambda_n} < y} a_n e^{-\lambda_n v} (y - e^{\lambda_n})^{\varkappa} - f(v) = O(y^{\eta-\gamma}) = o(1).$$

[12]) Vgl. H. R., S. 53, Theorem 41.

Satz 8. *Es sei für ein* $l > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n l}), \tag{5}$$

für ein $\eta > S$ *und* $k > 1$

$$\int_{-T}^{T} |f(\eta + ti)|^2 dt = O(T^k). \tag{6}$$

Dann konvergiert die Reihe (4) *für* $\sigma > \eta + \frac{k-1}{2} l$.

Ist überdies

$$a_n = O(1), \tag{8}$$

so konvergiert (4) *für* $\sigma > \frac{2\eta + (k-1)l}{k+1}$ [13]).

Beweis. Für genügend großes ganzes $p > \frac{k+1}{2}$ und v mit $\Re v = \gamma > \eta$ ist sowohl für $x \gtrless 0$

$$\Phi(x) = \sum_{\lambda_n < x} a_n e^{-\lambda_n v} (x - \lambda_n)^p = \frac{p!}{2\pi i} \int_{(\gamma+1)} \frac{e^{x(s-v)}}{(s-v)^{p+1}} f(s)\, ds$$

als auch gleichmäßig in $\eta \leqq \sigma \leqq \gamma + 1$

$$f(s) = O(|t|^p),$$

so daß die Verlegung der Integration bei festem v auch

$$\Phi(x) = f(v) x^p + b_1 x^{p-1} + \cdots + b_p + \frac{p!}{2\pi i} \int_{(\eta)} \frac{e^{x(s-v)}}{(s-v)^{p+1}} f(s)\, ds$$

ergibt. Einstweilen bedeute $z = z(x)$ eine für $x > \lambda_1$ positive Funktion von x, die $o(1)$ bei $x \to \infty$ ist. Für die p-te Differenz nach x mit der Spanne z, deren Bildung kurz durch Δ bezeichnet sei, gilt dann bei $x > \lambda_1$

$$\Delta \Phi(x) = p!\, f(v) z^p - c i \int_{(\eta)} \frac{\Delta(e^{x(s-v)})}{(s-v)^{p+1}} f(s)\, ds.$$

Auf dem Integrationswege ist einerseits

$$|\Delta(e^{x(s-v)})| < c\, e^{x(\eta-\gamma)},$$

andererseits

$$\Delta(e^{x(s-v)}) = \int_{x}^{x+z} dx_1 \cdots \int_{x_{p-1}}^{x_{p-1}+z} (s-v)^p e^{x_p(s-v)}\, dx_p \Big| < z^p |s-v|^p e^{x(\eta-\gamma)}.$$

[13]) Vgl. E. Landau, Neuer Beweis eines Hauptsatzes aus der Theorie der Dirichletschen Reihen, Berichte der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 69 (1917), S. 336—343.

Daher ist bei $x \to \infty$

$$\int_{(\eta)} \frac{\Delta(e^{x(s-v)})}{(s-v)^{p+1}} f(s)\,ds$$

$$= O\,e^{x(\eta-\gamma)} \int_{-\frac{1}{z}}^{\frac{1}{z}} \frac{z^p}{1+|t|} |f(\eta+ti)|\,dt + O\,e^{x(\eta-\gamma)} \left(\int_{-\infty}^{-\frac{1}{z}} + \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \right) \frac{|f(\eta+ti)|}{|t|^{p+1}}\,dt;$$

hierin ist nach (6) und dem Hilfssatz z. B.

$$z^p \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{|f(\eta+ti)|}{1+t}\,dt = z^p \frac{\int_0^{\frac{1}{z}} |f(\eta+\tau i)|\,d\tau}{1+\frac{1}{z}} + z^p \int_0^{\frac{1}{z}} \frac{\int_0^t |f(\eta+\tau i)|\,d\tau}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= O\left(z^{p+\frac{1-k}{2}}\right),$$

$$\int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{|f(\eta+ti)|}{t^{p+1}}\,dt = -\frac{\int_0^{\frac{1}{z}} |f(\eta+\tau i)|\,d\tau}{\left(\frac{1}{z}\right)^{p+1}} + (p+1) \int_{\frac{1}{z}}^{\infty} \frac{\int_0^t |f(\eta+\tau i)|\,d\tau}{t^{p+2}}\,dt$$

$$= O\left(z^{p+\frac{1-k}{2}}\right).$$

So ergibt sich

$$\frac{1}{p!} z^{-p} \Delta\Phi(x) - f(v) = O\left(z^{\frac{1-k}{2}} e^{x(\eta-\gamma)}\right),$$

also wegen

$$\Delta\Phi(x) = p! \int_x^{x+z} dx_1 \cdots \int_{x_{p-1}}^{x_{p-1}+z} \sum_{\lambda_n < x_p} a_n e^{-\lambda_n v}\,dx_p,$$

$$\Delta\Phi(x) - p!\,z^p \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n v} = p! \int_x^{x+z} dx_1 \cdots \int_{x_{p-1}}^{x_{p-1}+z} \sum_{x < \lambda_n < x_p} a_n e^{-\lambda_n v}\,dx_p$$

$$= O\left(z^p e^{-x\gamma} \sum_{x < \lambda_n < x+pz} |a_n|\right)$$

auch

$$R(x) = \sum_{\lambda_n \leqq x} a_n e^{-\lambda_n v} - f(v) = O\left(e^{-x\gamma}\left(e^{x\eta} z^{\frac{1-k}{2}} + \sum_{x < \lambda_n < x+pz} |a_n|\right)\right).$$

Ich kann

$$z = (x - \lambda_1) e^{-x \frac{2(\eta-\gamma)}{k-1}}$$

setzen und erhalte so

$$R(x) = o(1) + O\,e^{-x\gamma} \sum_{x < \lambda_n < x+pz} |a_n|.$$

Nun sei *erstens* $\gamma > \eta + \frac{k-1}{2} l$. Wegen $l < \frac{2(\gamma-\eta)}{k-1}$ ist dann für alle großen j nach (5)

$$\lambda_{j+1} - \lambda_j > p e^{\lambda_j \frac{2(\eta-\gamma)}{k-1}} (\lambda_j - \lambda_1) = p z(\lambda_j);$$

für $x = \lambda_j$ ist also, da es kein λ_n mit $x < \lambda_n < x + pz$ gibt,

$$R(x) = o(1).$$

Ist *zweitens* (8) erfüllt, so ist

$$\sum_{x < \lambda_n \leq x+pz} |a_n| = O(1) + O(z e^{xl})\ ^{14}),$$

also

$$R(x) = o(1) + O(e^{-x\gamma}) + O\left(e^{x\left(l + \frac{2\eta}{k-1} - \frac{(k+1)\gamma}{k-1}\right)} x\right);$$

damit ist die Konvergenz von (4) zunächst für

$$\sigma > \mathrm{Max}\left(\eta,\ 0,\ \frac{2\eta + (k-1)l}{k+1}\right) \tag{9}$$

gesichert.

a) Es sei $2\eta + (k-1)l \leqq 0$. Dann konvergiert (4) nach dem bewiesenen ersten Teil des Satzes für $\sigma > \eta + \frac{k-1}{2} l$, also wegen $\frac{2\eta + (k-1)l}{k+1} \geqq \eta + \frac{k-1}{2} l$ erst recht für $\sigma > \frac{2\eta + (k-1)l}{k+1}$.

b) Es sei $2\eta + (k-1)l > 0$.

α) Wenn zudem $\eta \geqq l$, also $\frac{2\eta + (k-1)l}{k+1} \geqq l$, ergibt die (absolute) Konvergenz von (4) für $\sigma > l$ die Behauptung.

β) Wenn zudem $\eta < l$, so ist $\frac{2\eta + (k-1)l}{k+1} > 0$ und $> \eta$, also (4) nach (9) für $\sigma > \frac{2\eta + (k-1)l}{k+1}$ konvergent.

Satz 9. *Wenn mit* $l > 0$

$$\frac{1}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} = O(e^{\lambda_n l}) \tag{5}$$

und

$$a_n = O(1) \tag{8}$$

---

[14]) Denn aus (5) schließt man bekanntlich

$$\sum_{u < \lambda_n < v} 1 = O(1) + O \sum_{\substack{u < \lambda_n \\ \lambda_{n+1} < v}} (\lambda_{n+1} - \lambda_n) e^{\lambda_n l} = O(1) + O((v-u) e^{vl}),$$

woraus dann auch für jedes $\delta > 0$

$$\sum_{\lambda_n < v} 1 = O(e^{v(l+\delta)}),$$

also die Konvergenz von $\sum e^{-\lambda_n s}$ für $\sigma > l$ folgt.

t und für ein $\eta > S$

6) $$\int_{-T}^{T} |f(\eta + ti)|^2 \, dt = O(T^k)$$

ilt, so konvergiert

10) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-\lambda_n s}$$

ür $\sigma > \frac{4\eta + 3(k-1)l}{k+1}$ [15]).

Beweis. Die Konvergenzabszisse von (10) sei L. Da nach (5) nd (8) gewiß $L \leqq l$ ist (vgl. [14])), ist die Behauptung für $\eta \geqq l$ wegen $\frac{\eta + 3(k-1)l}{k+1} \geqq l$ richtig. Ich darf also $\eta < l$ annehmen. Dann ist sie ber auch bei $L \leqq 4\eta - 3l$ richtig, indem $(4\eta - 3l)(k+1) < 4\eta + 3(k-1)l$ wegen $4\eta - 3l < 3l$ ist; daher sei auch $L > 4\eta - 3l$.

Nun sei p eine positive ganze Zahl, über die nachher noch verfügt verden wird. Für

$$d_n(x) = a_n e^{-\lambda_n(\eta - l)} (x - \lambda_n)^p$$

st wegen (5) bei jedem $\delta > 0$ und $x \geqq 1$

$$\begin{aligned} x^p \sum_{\lambda_m < x} |d_m(x)| e^{-\lambda_m(\eta - l)} &\leqq c\, x^{2p} \sum_{\lambda_m < x} |a_m| e^{-2\lambda_m(\eta - l)} \\ &\leqq c\, x^{2p} \Big(\sum_{\lambda_m < x} |a_m|^2 e^{-\lambda_m(L+\delta)} \sum_{\lambda_m < x} e^{\lambda_m(L - 4\eta + 4l + \delta)} \Big)^{\frac{1}{2}} \\ &< c\, x^{2p} \left(e^{x(L + 4l - 4\eta + \delta) + x(l+\delta)} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &< c\, e^{\frac{x}{2}(L + 5l - 4\eta + 3\delta)} \end{aligned}$$

11)

Für $\lambda_m < x$ gilt, wenn $x > \lambda_2$ und λ_q das letzte $\lambda_m < x$ ist,

$$\sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{\lambda_m - \lambda_n} \leqq c \sum_{n=1}^{m-1} \frac{e^{\lambda_m l}}{m - n} < c\, e^{xl} \log q < c\, e^{x\left(l + \frac{\delta}{2}\right)}.$$

Für $T > 0$ ist hiernach wegen (8) und (11)

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-T}^{T} \Big| \sum_{\lambda_n < x} d_n(x) e^{-\lambda_n \tau i} \Big|^2 d\tau - 2T \sum_{\lambda_n < x} |d_n(x)|^2 \right| \\ &= O \sum_{\lambda_m < x} |d_m(x)| \sum_{n=1}^{m-1} \frac{|d_n(x)|}{\lambda_m - \lambda_n} = O\left(e^{\frac{x}{2}(L + 7l - 4\eta + 4\delta)} \right). \end{aligned}$$

12)

Nun sei p so groß, daß mit $v = \eta - l + \tau i$ die Beziehungen

$$\sum_{\lambda_n < x} d_n(x) e^{-\lambda_n \tau i} = \frac{p!}{2\pi i} \int_{(\eta)} \frac{e^{x(s-v)}}{(s-v)^{p+1}} f(s)\, ds$$

[15]) Vgl. K. Grandjot, Über das absolute Konvergenzproblem der Dirichletschen Reihen, Inaugural-Dissertation, Göttingen 1922, S. 6.

und

$$f(\eta+ti)=O(|t|^{p-1})$$

bestehen. Dann ist für $T\geqq 1$, $|\tau|\leqq T$

$$\Big|\sum_{\lambda_n<x} d_n(x)\,e^{-\lambda_n\tau i}\Big|<c\,e^{xl}\int_{2T}^{\infty}\frac{t^{p-1}}{t^{p+1}}dt+c\,e^{xl}\int_{-2T}^{2T}\frac{|f(\eta+ti)|}{1+(t-\tau)^2}dt,$$

$$\Big|\sum_{\lambda_n<x} d_n(x)\,e^{-\lambda_n\tau i}\Big|^2<c\frac{e^{2xl}}{T}+c\,e^{2xl}\int_{-2T}^{2T}\frac{|f(\eta+ti)|^2}{1+(t-\tau)^2}dt\int_{-2T}^{2T}\frac{dt}{1+(t-\tau)^2}$$

$$<c\,e^{2xl}\left(\frac{1}{T}+\int_{-2T}^{2T}\frac{|f(\eta+ti)|^2}{1+(t-\tau)^2}\,dt\right),$$

also nach (12)

$$2T\sum_{\lambda_n<x}|d_n(x)|^2=O\left(e^{\frac{x}{2}(L+7l-4\eta+4\delta)}\right)$$

$$+O\left(e^{2xl}\left(1+\int_{-2T}^{2T}|f(\eta+ti)|^2\,dt\int_{-T}^{T}\frac{d\tau}{1+(t-\tau)^2}\right)\right)$$

$$=O\left(e^{x\frac{L+7l-4\eta+4\delta}{2}}\right)+O(e^{2xl}T^k).$$

Ich nehme $T=T(x)=e^{x\frac{L+3l-4\eta}{2k}}$ und erhalte

$$\sum_{\lambda_n<x-1}|a_n|^2e^{-2\lambda_n(\eta-l)}\leqq\sum_{\lambda_n<x}|d_n(x)|^2=O\left(e^{2x(l+\delta)+x\frac{k-1}{2k}(L+3l-4\eta)}\right),$$

$$L\leqq 2\eta+\frac{k-1}{2k}(L+3l-4\eta),$$

$$L\leqq\frac{4\eta+3(k-1)l}{k+1}.$$

Satz 10. *Wenn mit* $l>0$

(5) $$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n}=O(e^{\lambda_n l})$$

und für ein $\eta>S$

(6) $$\int_{-T}^{T}|f(\eta+ti)|^2\,dt=O(T^k)$$

gilt, so konvergiert

(13) $$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|\,e^{-\lambda_n s}$$

für $\sigma>\eta+\frac{k-1}{2}l+l\frac{k}{k+1}$.

Ist überdies

$$a_n = O(1),$$

konvergiert (13) *für* $\sigma > \frac{2\eta}{k+1} + l\frac{2k-1}{k+1}$ [16]).

Beweis. Ich setze zunächst (8) voraus. Für $\sigma > \frac{2\eta}{k+1} + l\frac{2k-1}{k+1}$ gilt
egen $2\sigma - l > \frac{4\eta + 3(k-1)l}{k+1}$ nach dem vorigen Satz (für kleines $\delta > 0$)

$$\Big(\sum_{\lambda_n < y} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma}\Big)^2 \leqq \sum_{\lambda_n < y} |a_n|^2 e^{-\lambda_n(2\sigma - l - \delta)} \sum_{\lambda_n < y} e^{-\lambda_n(l+\delta)} = O(1).$$

Falls nun (8) nicht vorausgesetzt wird, liefert Satz 8 für jedes $\delta > 0$

$$a_n = O\Big(e^{\lambda_n\left(\eta + \frac{k-1}{2}l + \delta\right)}\Big),$$

daß der eben bewiesene Teil des Satzes auf

$$f_1(s) = f\Big(s + \eta + \frac{k-1}{2}l + \delta\Big)$$

it $\eta_1 = -\frac{k-1}{2}l$ anwendbar ist und die Konvergenz von (13) für
$> \eta + \frac{k-1}{2}l + \delta + \frac{-(k-1)l}{k+1} + l\frac{2k-1}{k+1}$, also für $\sigma > \eta + \frac{k-1}{2}l + l\frac{k}{k+1}$
efert.

Satz 11. *Die für* $\sigma > S$ *durch*

$$1 + 2\nu(\sigma) = \overline{\lim_{T \to \infty}} \frac{\log \int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2 dt}{\log T}$$

klärte Funktion $\nu(\sigma)$ *ist dort eine stetige, konvexe*[17]) *Funktion von* σ,
e mit wachsendem σ *nie zunimmt und nie negativ ist; es gilt dort ferner*

$$\mu(\sigma) - \frac{1}{2} \leqq \nu(\sigma) \leqq \mu(\sigma).$$

Beweis. Da für $\sigma = \sigma_0 > S$ und jedes $\delta > 0$

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma + ti)|^2 dt = O(T^{2\nu(\sigma_0)+1+\delta})$$

t, gilt diese Beziehung nach Satz 1 auch für $\sigma > \sigma_0$, womit

$$\nu(\sigma) \leqq \nu(\sigma_0)$$

[16]) Vgl. a. a. O. [15]), S. 9.

[17]) Ich nenne hier, wie vielfach üblich, eine Funktion $\nu(\sigma)$ konvex, wenn sie

$$\nu(\sigma) \leqq \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_2 - \sigma_1}\nu(\sigma_1) + \frac{\sigma - \sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}\nu(\sigma_2)$$

r $\sigma_1 \leqq \sigma \leqq \sigma_2$ $(\sigma_1 < \sigma_2)$ erfüllt.

aus $\sigma > \sigma_0$ gefolgert ist. Eine nach oben beschränkte Funktion $\nu(\sigma)$ ist aber bekanntlich stetig und konvex, wenn für sie

$$\nu\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right) \leqq \frac{\nu(\sigma_1)+\nu(\sigma_2)}{2}$$

gilt[18]). Den Nachweis dieser Ungleichheit liefert Satz 3, denn aus $(\delta > 0)$

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma_1+ti)|^2\,dt = O(T^{2\nu(\sigma_1)+1+\delta}),$$

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma_2+ti)|^2\,dt = O(T^{2\nu(\sigma_2)+1+\delta})$$

für $\sigma_1 > S$, $\sigma_2 > S$ wird in ihm

$$\int_{-T}^{T} \left| f\left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}+ti\right)\right|^2 dt = O(T^{\nu(\sigma_1)+\nu(\sigma_2)+1+2\delta})$$

gefolgert. Ferner würde $\nu(\sigma) < 0$ die Beziehung (6) mit $k = 1 + 2\frac{\nu(\sigma)}{2} < 1$ gegen Satz 6 ergeben.

Endlich ist

$$\nu(\sigma) \leqq \mu(\sigma),$$

da aus $(\delta > 0)$

$$f(\sigma+ti) = O(|t|^{\mu(\sigma)+\delta})$$

sofort

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma+ti)|^2\,dt = O(T^{2\mu(\sigma)+1+2\delta})$$

folgt; und Satz 2 schließt aus $\sigma > S$,

$$\int_{-T}^{T} |f(\sigma+ti)|^2\,dt = O(T^{2\nu(\sigma)+1+\delta})$$

auf

$$\mu(\sigma) \leqq \nu(\sigma) + \frac{1}{2} + \delta,$$

also

$$\mu(\sigma) - \frac{1}{2} \leqq \nu(\sigma).$$

Im folgenden bezeichne nun stets

β die Abszisse der absoluten Konvergenz,

$\bar{\beta}$ die Konvergenzabszisse von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-\lambda_n s}$,

$\alpha_\varkappa$ für $\varkappa \geqq 0$ die Abszisse der Summierbarkeit nach Rieszschen typischen Mitteln $\varkappa$-ter Ordnung,

---

[18]) Vgl. J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, Acta mathematica **30** (1906), S. 189.

ω die Schwundabszisse des allgemeinen Gliedes, d. h. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{\log|a_n|}{\lambda_n}$ [19]),

m die Zahl $\operatorname{Max}\left(0, \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{-\log(\lambda_{n+1}-\lambda_n)}{\lambda_n}\right)$.

Alle diese Zahlen dürfen auch $+\infty$ oder $-\infty$ sein. Die Zahl m ist, alls sie endlich ist, die untere Grenze der $l > 0$ mit

5) $$\frac{1}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} = O(e^{\lambda_n l}).$$

Satz 12. *Stets sei $\sigma > S$. Dann ist einerseits*

14) $$\nu(\sigma) \leqq \varkappa + \frac{1}{2} \quad \textit{für} \quad \sigma > \alpha_\varkappa,$$

15) $$\nu(\sigma) \leqq \frac{\varkappa}{2} \quad \textit{für} \quad \sigma > \frac{\alpha_\varkappa + \beta}{2};$$

ndererseits

16) $$\nu(\sigma) \geqq \varkappa \quad \textit{für} \quad \sigma \leqq \alpha_\varkappa,$$

nd, falls $0 < m < \infty$, $\beta > -\infty$,

17) $$\nu(\sigma) \geqq \frac{\alpha_0 - \sigma}{m - (\alpha_0 - \omega)},$$

18) $$\nu(\sigma) \geqq \frac{\alpha_0 - \sigma}{m},$$

19) $$\nu(\sigma) \geqq \frac{\bar{\beta} - 2\sigma}{3m - (\bar{\beta} - 2\omega)},$$

20) $$\nu(\sigma) \geqq \frac{\beta - \frac{m}{2} - \sigma}{2m - (\beta - \omega)},$$

21) $$(\nu(\sigma) + 1)\left(\nu(\sigma) - \frac{\beta - m - \sigma}{m}\right) \geqq \frac{1}{2}.$$

Für $m = 0$ ist $S = \beta$.

Vorbemerkung. In der Aussage $\nu(\sigma) \geqq 0$ des vorigen Satzes sind 7) und (18) für $\sigma \geqq \alpha_0$, (19) für $\sigma \geqq \frac{\bar{\beta}}{2}$, (20) und (21) für $\sigma \geqq \beta - \frac{m}{2}$ thalten. Wenn der Nenner von (17), der wegen $\alpha_0 \leqq \omega + m$ (nach [14])) ets $\geqq 0$ ist, verschwindet, soll (17) $S = \beta$ aussagen. Alle anderen enner sind, wegen $\bar{\beta} \leqq 2\omega + m$ und $\beta \leqq \omega + m$, positiv.

(14) leitet aus $\alpha_\varkappa$, (15) aus $\alpha_\varkappa$ und β eine obere Schranke für $\nu(\sigma)$ er; untere Schranken für $\nu(\sigma)$ werden gefolgert: in (16) aus $\alpha_\varkappa$, in (17) us α_0, m und ω, in (18) aus α_0 und m, in (19) aus $\bar{\beta}$, m und ω, in 20) aus β, m und ω, in (21) aus β und m.

[19]) Vgl. L. Neder, Über Umkehrungen der Konvergenzsätze für Dirichletsche eihen, Berichte der Sächsischen Akademie der Wissenschaften 74 (1922), S. 99.

Beweis. Satz 4 liefert sofort (14), Satz 5 sofort (15), Satz 7 sofort (16). Für den Beweis der weiteren Formeln sei $l > m$, so daß also (5) erfüllt ist, ferner $\sigma > S$, $k > 2\nu(\sigma) + 1$ und bei (17), (19), (20) noch $w > \omega$, $f_1(s) = f(s + w)$. Bei (17), (19), (20) sind bzw. die Sätze 8, 9, 10 auf $f_1(s)$ mit $\sigma - w$ statt η, bei (18), (21) bzw. die Sätze 8, 10 auf $f(s)$ mit σ statt η anwendbar; sie ergeben

$$\alpha_0 - w \leqq \frac{2(\sigma - w) + (k-1)l}{k+1},$$

$$\alpha_0 \leqq \sigma + \frac{k-1}{2} l,$$

$$\bar{\beta} - 2w \leqq \frac{4(\sigma - w) + 3(k-1)l}{k+1},$$

$$\beta - w \leqq \frac{2(\sigma - w)}{k+1} + l\frac{2k-1}{k+1},$$

$$\beta \leqq \sigma + \frac{k-1}{2} l + l\frac{k}{k+1};$$

da l beliebig nahe an m, k beliebig nahe an $2\nu(\sigma) + 1$, w beliebig nahe an ω liegen darf, ergibt sich

(22) $$\alpha_0 - \omega \leqq \frac{\sigma - \omega + m\nu}{\nu + 1}, \qquad \alpha_0 - \sigma \leqq (m - (\alpha_0 - \omega))\nu,$$

(23) $$\alpha_0 \leqq \sigma + m\nu, \qquad \alpha_0 - \sigma \leqq m\nu,$$

$$\bar{\beta} - 2\omega \leqq \frac{2(\sigma - \omega) + 3m\nu}{\nu + 1}, \qquad \bar{\beta} - 2\sigma \leqq (3m - (\bar{\beta} - 2\omega))\nu,$$

$$\beta - \omega \leqq \frac{\sigma - \omega + 2m\nu + \frac{m}{2}}{\nu + 1}, \qquad \beta - \frac{m}{2} - \sigma \leqq (2m - (\beta - \omega))\nu,$$

$$\beta \leqq \sigma + m\nu + m\frac{\nu + \frac{1}{2}}{\nu + 1}, \qquad -\frac{m}{2} \leqq m\nu^2 + (2m - (\beta - \sigma))\nu - (\beta - \sigma),$$

wo kurz ν statt $\nu(\sigma)$ geschrieben wurde. Falls $m = 0$, also $\alpha_0 = \beta$ ist, folgt aus (23) $\sigma \geqq \alpha_0$, d. h. $S = \alpha_0 = \beta$. Falls $m > 0$, aber $m = \alpha_0 - \omega$ ist, folgt wegen $\beta \leqq \omega + m = \alpha_0$ aus (22) wieder $S = \alpha_0 = \beta$. Sonst ergeben sich aber (17), (18), (19), (20), (21). Übrigens folgt (18) wegen $\omega \leqq \alpha_0$ auch sofort aus (17).

Folgerung. Wenn $0 < m < \infty$, $\bar{\varkappa} \geqq 0$,

$$\alpha_\varkappa = \alpha_0 - \varkappa m \quad \text{für} \quad 0 < \varkappa < \bar{\varkappa}$$

und

$$\beta = \alpha_0 + m$$

gilt; so ist

$$\nu(\sigma) = 0 \qquad \text{für} \quad \sigma \geqq \alpha_0 + \frac{m}{2},$$

$$\nu(\sigma) = \frac{\alpha_0 - \sigma}{m} + \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad \alpha_0 - \bar{\varkappa} m < \sigma < \alpha_0 + \frac{m}{2}.$$

Denn (14) liefert für $\alpha_0 - \bar{\varkappa} m \leqq \sigma \leqq \alpha_0$

$$\nu(\sigma+0) \leqq \frac{\alpha_0-\sigma}{m} + \frac{1}{2}$$

nd (15) für $\sigma > \frac{\alpha_0+\beta}{2} = \alpha_0 + \frac{m}{2}$

$$\nu(\sigma) \leqq 0;$$

20) liefert wegen $\omega = \alpha_0$

$$\nu(\sigma) \geqq \frac{\alpha_0 + \frac{m}{2} - \sigma}{m}.$$

us diesen drei Tatsachen ergibt sich zufolge Satz 11 die Behauptung.

Übrigens zeigt sich jetzt leicht, daß in $\mu(\sigma) = \nu(\sigma) + \vartheta(\sigma)$, wo nach atz 11 ja $0 \leqq \vartheta(\sigma) \leqq \frac{1}{2}$ ist, $\vartheta(\sigma)$ jeden Wert dieser Strecke haben kann. enn Bohr[20]) gab eine Reihe (1) mit $\alpha_0 = 0$, $\beta = 1$, $\mu(\sigma) = 1 - \sigma$ für $\leqq \sigma \leqq 1$ an; nach (15) ist hier $\nu(\sigma) = 0$ für $\sigma \geqq \frac{1}{2}$, also $\vartheta(\sigma) = 1 - \sigma$ ir $\frac{1}{2} \leqq \sigma \leqq 1$.

Endlich liefert Satz 11 mit (14) zusammen auch die bekannte Tatache, daß in

$$\sum_{1 \leqq d\delta \leqq x} 1 = x \log x + (2C-1)x + O(x^{\vartheta})$$

ewiß $\vartheta \geqq \frac{1}{4}$ ist; denn für die Dirichletsche Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \zeta^2(s) + \zeta'(s) - 2C\zeta(s)$$

äre sonst $\alpha_0 < \frac{1}{4}$, also $\nu(\frac{1}{4}) < \frac{1}{2}$; man beweist aber mit Hilfe der Funkionalgleichung der Zetafunktion für $f(s)$ leicht

$$\nu(\sigma) = 1 - 2\sigma \quad \text{für} \quad \sigma < 0,$$

nd daraus folgt wegen der Konvexität von $\nu(\sigma)$ sofort

$$\nu(\tfrac{1}{4}) \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Zweiter Teil.

Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen.

Hilfssatz. *Die Funktion $x = q(z)$ bilde das Quadrat*

$$|\Re z| \leqq 1, \quad |\Im z| \leqq 1$$

uf $|x| \leqq 1$ konform ab mit $q(0) = 0$, $q'(0) > 0$. Wird für $0 < \vartheta \leqq \frac{1}{8}$ as Rechteck

$$|\Re z| \leqq 1 - \vartheta, \quad |\Im z| \leqq \tfrac{1}{2}$$

[20]) H. Bohr, Bidrag til de Dirichlet'ske Rækkers Theori, Dissertation, Kopenagen 1910, S. 32.

mit R_ϑ bezeichnet, so ist bei passendem c und für z in R_ϑ

$$|q(z)| \leqq 1 - c\vartheta. \tag{24}$$

Beweis. Der Einheitskreis $|x| \leqq 1$ wird durch

$$z = p(x) = c\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1+u^4}}$$

bei passendem c, wenn für die Quadratwurzel der Hauptwert genommen wird, auf das Quadrat $|\Re z| \leqq 1$, $|\Im z| \leqq 1$ abgebildet; die umgekehrte Abbildung geschieht durch

$$x = q(z).$$

Jeder Oktant wird dabei in dem entsprechenden abgebildet. Die Behauptung

$$|q(z)| \leqq 1 - c\vartheta \quad \text{für alle } z \text{ in } R_\vartheta \tag{24}$$

brauche ich aus Symmetriegründen nur für den ersten Quadranten zu zeigen, und auch da nur für $\Re z \geqq \frac{2}{3}$, da für $0 \leqq \Re z \leqq \frac{2}{3}$, $0 \leqq \Im z \leqq \frac{1}{2}$ gewiß

$$|q(z)| \leqq 1 - c \leqq 1 - c\vartheta$$

gilt. Auf der abgeschlossenen Menge $\frac{2}{3} \leqq \Re z \leqq 1$, $0 \leqq \Im z \leqq \frac{1}{2}$ ist aber $\arg q(z) = r(z)$ stetig (wenn $0 \leqq \arg x < 2\pi$ festgesetzt ist) und $0 \leqq r(z) < \frac{\pi}{4}$, also

$$0 \leqq r(z) \leqq \frac{\pi}{4} - c.$$

Auf ihr ist daher bei $0 \leqq \varrho \leqq 1$

$$|1 + (\varrho\, e^{r(z)i})^4| > c,$$

also

$$\vartheta \leqq |p(e^{r(z)i}) - z| = |p(e^{r(z)i}) - p(|q(z)|\, e^{r(z)i})|$$

$$= \left| c \int_{|q(z)|\, e^{r(z)i}}^{e^{r(z)i}} \frac{du}{\sqrt{1+u^4}} \right| \leqq c(1 - |q(z)|),$$

d. h. (24).

Satz. *Es sei $0 < \eta \leqq \frac{1}{3}m$, $s = \sigma + ti$, $f(s)$ im Quadrat*

$$|\sigma - a| \leqq m, \quad |t - b| \leqq m \qquad (a, b \text{ reell})$$

regulär und für ein $K \geqq 1$

$$|f(s)| \leqq e^K,$$

$$|f(a + bi)| \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Dann hat $f(s)$ *in* $|\sigma - a| \leqq m - \eta$, $|t - b| \leqq \frac{m}{2}$ *höchstens*

$$c K \frac{m}{\eta}$$

Nullstellen.

Beweis. $g(x) = f(a + bi + m p(x))$ ist in $|x| < 1$ regulär, in $|x| \leqq 1$ stetig,

$$|g(x)| \leqq e^K,$$
$$|g(0)| \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Wenn s in $|\sigma - a| \leqq m - \eta$, $|t - b| \leqq \frac{m}{2}$ liegt, so ist nach (24) gewiß

$$\left| g\left(\frac{s - a - bi}{m}\right) \right| \leqq 1 - c\frac{\eta}{m}.$$

Daher ist die Wurzelzahl von $f(s)$ im genannten Rechteck höchstens gleich der von $g(x)$ in

$$|x| \leqq 1 - c\frac{\eta}{m},$$

also nach der Jensenschen Ungleichheit

$$\leqq \frac{\log \frac{e^K}{\frac{1}{2}}}{-\log\left(1 - c\frac{\eta}{m}\right)} < c K \frac{m}{\eta}.$$

Satz. *Die nicht identisch verschwindende Dirichletsche Reihe*

(4) $$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

habe $\alpha_0 < \infty$. *Es sei* $L(T) > 0$, $L(T) = o(\log T)$; *und* $n(T)$ *bezeichne bei festem* $\delta > 0$ *die Wurzelzahl von* $f(s)$ *in*

$$\sigma \geqq S + \delta, \quad T \leqq t \leqq T + L(T),$$

und $N(T)$ *die in*

$$\sigma \geqq S + \delta, \quad T \leqq t \leqq T + \log T.$$

Dann ist

$$n(T) = o(\log^2 T)\ ^{21}),$$
$$N(T) = O(\log^2 T)\ ^{22}).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha_0 < 0$,

$$f(s) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}.$$

---

[21]) Dieser Satz steht für $L(T) = 1$ (und mit α_0 statt S) bei E. Landau, Über die Nullstellen Dirichletscher Reihen, Mathem. Zeitschr. **10** (1921), S. 128–129.

[22]) Dieser Satz steht (mit α_0 statt S) bei S. Wennberg, Zur Theorie der Dirichletschen Reihen, Inaugural-Dissertation, Upsala 1920, S. 12.

Dann gilt für

$$B(x) = \sum_{\lambda_2 \leqq \lambda_n < x} a_n$$

sicher

$$|B(x)| < c.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ gegeben; ich wähle ein festes ganzes $w = w(\varepsilon) > 2$ so, daß

$$\lambda_w > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Für $\sigma \geqq \frac{\log t}{\lambda_w}$, $t > \tau_1(\varepsilon) > 1$ ist dann

$$\left|\sum_{n=w}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}\right| = \left| - B(\lambda_w) e^{-\lambda_w s} + s \int_{\lambda_w}^{\infty} B(u) e^{-us}\, du \right|$$

$$< c\left(2 + \frac{t}{\sigma}\right) e^{-\lambda_w \sigma} < \frac{1}{4};$$

also ist für $\sigma \geqq \frac{\log t}{\lambda_w}$, $t > \tau_2(\varepsilon) > 1$

$$\left|f(s)\right| > 1 - \sum_{n=2}^{w-1} |a_n| e^{-\lambda_n \sigma} - \frac{1}{4} > \frac{1}{2}.$$

Der vorige Satz ist auf $f(s)$ mit

$$a + bi = \frac{\log T}{\lambda_w} + Ti,$$

$$m = \frac{\log T}{\lambda_w} - S - \frac{\delta}{2},$$

$$K = c \log T,$$

$$\eta = \frac{\delta}{2}$$

für $T > \tau_3(\varepsilon)$ anwendbar; für $T > \tau_4(\varepsilon)$ ergibt er, da dann

$$2L(T) < \frac{\log T}{\lambda_w} - S - \delta$$

ist,

$$n(T) < c \frac{\log^2 T}{\lambda_w} < c\varepsilon \log^2 T.$$

Wird aber $\varepsilon = 1$ genommen und der vorige Satz auf

$$a + bi = 3 \log T + Ti,$$

$$m = 3 \log T - S - \frac{\delta}{2},$$

$$K = c \log T,$$

$$\eta = \frac{\delta}{2}$$

für $T > \tau_5$ angewendet, so ergibt sich für $T > \tau_6$ wegen

$$2 \log T \leqq 3 \log T - S - \frac{\delta}{2}$$

ıch

$$N(T) < c \log^2 T.$$

Satz. *Die nicht identisch verschwindende Dirichletsche Reihe*

:)
$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

fülle für $\sigma > \sigma_0$

$$|e^{\lambda_1 s} f(s)| < c;$$

sei $\sigma_1 > S$, $\nu(\sigma_1) = 0$. *Bei festem* $\delta > 0$ *bezeichne* $M(T)$ *die Wurzel-*
ıhl von $f(s)$ *in*

$$\sigma \geqq \sigma_1 + \delta, \quad -T \leqq t \leqq T.$$

ann ist

$$M(T) = o(T \log T)^{23}).$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\lambda_1 = 0$, $a_1 \neq 0$, > 0, $\sigma_1 = 0$. Für $\sigma > \tau_1 + |t|$ ist bekanntlich $f(s) \neq 0$, so daß für $> \tau_2$ das Rechteck

$$\delta \leqq \sigma \leqq 4T - \delta, \quad T \leqq t \leqq T$$

le in $M(T)$ gezählten Nullstellen enthält. Nun sei

$$g(x) = f(2T(p(x) + 1));$$

a das Bild von

25)
$$|x| \leqq 1 - \frac{c}{T}$$

urch

$$s = 2T(p(x) + 1)$$

ach dem Hilfssatz für passendes c gewiß

$$\delta \leqq \sigma \leqq 4T - \delta, \quad -T \leqq t \leqq T$$

nthält, genügt es, die Wurzelzahl von $g(x)$ in (25) als $o(T \log T)$ ab-
ıschätzen. Die Jensensche Formel liefert

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |g(e^{\varphi i})| \, d\varphi = \log |g(0)| + \sum_{\nu} \log \frac{1}{|\xi_\nu|},$$

o ξ_ν die Nullstellen von $g(x)$ in $|x| \leqq 1$ durchläuft. Wegen

$$\log \frac{1}{|\xi_\nu|} \geqq 0,$$

$$\log |g(0)| > -c$$

---

[23]) Vgl. H. Bohr und E. Landau, Ein Satz über Dirichletsche Reihen mit
nwendung auf die ζ-Funktion und die L-Funktionen. Rendiconti del Circolo Mate-
ıatico di Palermo 37 (1914), S. 269—272.

für $T > \tau_3$ und

$$\log \frac{1}{|\xi_\nu|} > \log \frac{1}{1-\frac{c}{T}} > \frac{c}{T}$$

für die ξ_ν in (25) langt der Nachweis von

$$\int_0^{2\pi} \log |g(e^{\varphi i})|\, d\varphi = o(\log T)$$

und hierzu

$$\int_0^{2\pi} |g(e^{\varphi i})|^2\, d\varphi = O(T^\varepsilon)$$

für jedes $\varepsilon > 0$. Führe ich hier wieder s als Integrationsveränderliche ein, so erhalte ich wegen

$$ds = 2Tip'(e^{\varphi i})e^{\varphi i}\, d\varphi,$$

$$d\varphi = \left| \frac{ds}{2Tp'(e^{\varphi i})} \right| = \frac{c}{T} \left| \sqrt{1+e^{4\varphi i}} \right| |ds| < c\frac{|ds|}{T}$$

die Behauptung in der Form

$$\int |f(s)|^2 |ds| = O(T^{1+\varepsilon}),$$

wo über den Rand des Quadrats $0 \leqq \sigma \leqq 4T$, $-2T \leqq t \leqq 2T$ zu integrieren ist. Auf den senkrechten Seiten ist aber $|ds| = |dt|$, auf den wagerechten $|ds| = |d\sigma|$; und es ist

$$\int_{-2T}^{2T} |f(ti)|^2\, dt = O(T^{1+\varepsilon}),$$

$$\int_{-2T}^{2T} |f(4T+ti)|^2\, dt = O(T),$$

$$\int_0^{4T} |f(\sigma \pm 2Ti)|^2\, d\sigma$$

$$= O\int_0^{\sigma_0} (T^{\frac{1}{2}+\frac{\varepsilon}{2}})^2\, d\sigma + O\int_{\sigma_0}^{4T} d\sigma = O(T^{1+\varepsilon}).$$

(Eingegangen am 5. Februar 1926.)

Über das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen.

Von

Max Müller in Heidelberg.

Das erste Kapitel der vorliegenden Arbeit beschäftigt sich mit dem
rfahren der sukzessiven Approximationen. In § 1 wird ein Konvergenz-
tz des Herrn Bendixson neu bewiesen und auf den Fall angewendet,
ß die rechten Seiten der Differentialgleichungen

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wissen Monotoniebedingungen unterworfen sind. In § 2 wird gezeigt,
ß das Verfahren auch dann noch konvergiert, wenn man in der Lipschitz-
dingung

$$|f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq k \sum_{\varrho=1}^{n} |y_\varrho - z_\varrho|$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

e Konstante k durch eine Funktion von x ersetzt, die nicht mehr be-
hränkt zu sein braucht; in unserem Ergebnis sind die bisher bekannt
wordenen enthalten. § 3 bringt Beispiele von gewöhnlichen Differential-
eichungen, bei denen das Verfahren divergiert.

Im zweiten Kapitel findet man einen neuen Beweis des Fundamental-
eorems für den Fall, daß von den Funktionen f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ nur
etigkeit vorausgesetzt ist. Durch Approximation der Funktionen f_ν mittels
nzen rationalen Funktionen wird dieser allgemeine Fall auf den ein-
heren und als bereits erledigt betrachteten zurückgeführt, daß die rechten
iten der Differentialgleichungen eine Lipschitz-Bedingung erfüllen.

Im § 1 des dritten Kapitels wird in Erweiterung eines Satzes des
errn Perron auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen ein
istenzsatz bewiesen, der einen möglichst günstigen Bereich gesicherter
istenz der Integrale liefert. In diesem Existenzbereich sind alle bisher

gefundenen enthalten. In § 2 wird an einem Beispiel gezeigt, daß di Methode der Ober- und Unterfunktionen bei Systemen nicht allgemei zum Ziel führt.

Kapitel I.

Über das Verfahren der sukzessiven Approximationen

§ 1.

Neuer Beweis eines Satzes des Herrn Bendixson.

1. Wir machen für diesen und die beiden folgenden Paragraphen di

Voraussetzung A. *Die Funktionen* $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n$ *seien in dem durch die Ungleichungen*

$$x_0 - a_1 \leqq x \leqq x_0 + a_2, \quad |y_\nu - y_{\nu 0}| \leqq b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ a_1 \geqq 0,\ a_2 \geqq 0$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$ *stetig. Es sei*

$$M = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\} \tag{1}$$

und

$$a_1' = \operatorname{Min}\left(a_1, \frac{b}{M}\right), \qquad a_2' = \operatorname{Min}\left(a_2, \frac{b}{M}\right). \tag{2}$$

Die Funktionen $\varphi_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *seien im Intervall* $\langle x_0 - a_1',\ x_0 + a_2'\rangle$ *stetig; es sei daselbst*

$$|\varphi_\nu(x)| \leqq M|x - x_0| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

und demnach

$$\varphi_\nu(x_0) = 0 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n). \tag{4}$$

Unter dieser Voraussetzung A können im Intervall $\langle x_0 - a_1',\ x_0 + a_2'\rangle$ sukzessive die Funktionen

$$\begin{cases} y_{\nu 1}(x) = y_{\nu 0} + \varphi_\nu(x) \\ y_{\nu,\lambda+1}(x) = y_{\nu 0} + \int_{x_0}^{x} f_\nu(t, y_{1\lambda}(t), \ldots, y_{n\lambda}(t))\, dt \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n, \\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots \end{pmatrix} \tag{5}$$

gebildet werden. Wir bezeichnen sie als die *nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen gebildeten Funktionen* oder kurz als *S-Funktionen*[1]).

---

[1]) Diese *S*-Funktionen sind zuerst von Herrn E. Picard eingeführt worden: Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives. Journal de mathématiques pures et appliquées (4) 6, 1890, S. 145–210, besonders S. 197–200. Das Verfahren der sukzessiven Approximationen wird in den meisten einschlägigen Lehrbüchern auseinandergesetzt.

Die Funktionenmenge $y_{\nu\lambda}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 2, 3, 4, \ldots)$ *ist Intervall* $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ *gleichgradig stetig,* denn für irgend zwei n Bedingungen

$$x_0 - a_1' \leqq x_1 < x_2 \leqq x_0 + a_2'$$

nügende Zahlen x_1 und x_2 ist

$$|y_{\nu\lambda}(x_1) - y_{\nu\lambda}(x_2)| \leqq \int_{x_1}^{x_2} |f_\nu(t, y_{1,\lambda-1}(t), \ldots, y_{n,\lambda-1}(t))|\, dt$$
$$\leqq M |x_2 - x_1|.$$

besondere ist also (für $x_1 = x$, $x_2 = x_0$)

$$|y_{\nu\lambda}(x) - y_{\nu\lambda}(x_0)| \leqq M |x - x_0|$$

er

$$y_{\nu 0} - M|x - x_0| \leqq y_{\nu\lambda}(x) \leqq y_{\nu 0} + M|x - x_0|,$$

h. die S-Funktionen sind auch gleichmäßig beschränkt.

2. Über diese S-Funktionen gilt nun zunächst

Satz 1. *Konvergiert eine jede der n Funktionenfolgen*

$$y_{\nu 1}(x),\ y_{\nu 2}(x),\ \ldots,\ y_{\nu\lambda}(x),\ \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

f einer im Intervall $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ *überall dicht liegenden und besondere seine Endpunkte enthaltenden Punktmenge* $\mathfrak{M}_\nu$, *so konvergieren diese Funktionenfolgen im ganzen Intervall* $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ *ichmäßig und liefern in ihren Grenzfunktionen*

$$\lim_{\lambda \to \infty} y_{\nu\lambda}(x) = y_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

Integralsystem des Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

s den Anfangsbedingungen

$$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ügt.

Wenn jede der Punktmengen $\mathfrak{M}_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit dem Intervall $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ identisch ist, ergibt sich der Satz des Herrn Bendixson [2]). Der nachstehende Beweis stützt sich im Gegensatz zum Bendixsonschen Originalbeweis unmittelbar auf die gleichgradige Stetigkeit der S-Funktionen.

[2]) J. Bendixson, Sur la convergence uniforme des séries. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1897, S. 605—622, besonders S. 616—622.

Beweis für Satz 1. Es sei ε eine beliebige positive Zahl und ν eine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Dann können wir aus der Punktmenge $\mathfrak{M}$ eine endliche Menge wachsender Zahlen

$$x_0 - a_1' = X_1 < X_2 < \ldots < X_i < X_{i+1} < \ldots < X_k = x_0 + a_2'$$

derart aussondern, daß

$$X_{i+1} - X_i < \frac{\varepsilon}{3M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, k-1) \tag{8}$$

wird. Da die k Zahlenfolgen

$$y_{\nu 1}(X_i),\ y_{\nu 2}(X_i),\ \ldots,\ y_{\nu\lambda}(X_i),\ \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

konvergieren, können wir eine Zahl $\Lambda = \Lambda(\varepsilon)$ derart angeben, daß für $\lambda > \Lambda(\varepsilon)$ und jede der Zahlen $p = 1, 2, 3, \ldots$; $i = 1, 2, \ldots, k$

$$|y_{\nu,\lambda+p}(X_i) - y_{\nu\lambda}(X_i)| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{9}$$

bleibt. Ist x eine beliebige Stelle des Intervalles $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$, so gibt es einen Index i derart, daß

$$X_i \leqq x \leqq X_{i+1},$$

und wegen (6), (8) und (9) ist

$$\begin{aligned} |y_{\nu,\lambda+p}(x) - y_{\nu\lambda}(x)| &\leqq |y_{\nu,\lambda+p}(x) - y_{\nu,\lambda+p}(X_i)| + |y_{\nu,\lambda+p}(X_i) - y_{\nu\lambda}(X_i)| \\ &\quad + |y_{\nu\lambda}(X_i) - y_{\nu\lambda}(x)| \\ &\leqq M(x - X_i) + \frac{\varepsilon}{3} + M(x - X_i) \\ &< M\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon, \end{aligned}$$

d. h. jede der Funktionenfolgen $\{y_{\nu\lambda}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist im Intervall $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ gleichmäßig konvergent. Wegen der Stetigkeit der einzelnen $y_{\nu\lambda}(x)$ sind dann auch die n Grenzfunktionen

$$\lim_{\lambda \to \infty} y_{\nu\lambda}(x) = y_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

stetig; daß sie den Anfangsbedingungen

$$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und dem Differentialgleichungssystem

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, erkennt man in der üblichen Weise.

3. Den Fall, daß die Funktionen $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ einer Lipschitz-Bedingung genügen, wollen wir in § 2 betrachten; hier beschäftigen wir uns zunächst mit einigen weiteren Ergebnissen des Herrn Bendixson [3].

[3] J. Bendixson a. in Anm. [2] a. O.

Satz 2. *Die Voraussetzung* A *sei mit* $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, *d. h. für den rch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a_2\,, \qquad |y_\nu - y_{\nu 0}| \leqq b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

finierten Bereich $\mathfrak{B}$ *erfüllt; und zwar sei insbesondere*

$$\varphi_\nu(x) = -M(x - x_0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

rner sollen die Funktionen $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *monoton chsen, wenn man irgendeines der n letzten Argumente* $y_1, y_2, \ldots, y_n$ *rgrößert. Dann konvergieren die aus den S-Funktionen gebildeten nktionenfolgen* $\{y_{\nu\lambda}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *im Intervall* $\langle x_0, x_0 + a_2' \rangle$.

Nach Satz 1 (es ist hier jedes $\mathfrak{M}_\nu$ identisch mit dem Intervall $_0, x_0 + a_2' \rangle$) erfüllen dann die n Funktionen

$$\lim_{\lambda \to \infty} y_{\nu\lambda}(x) = y_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

s Differentialgleichungssystem

$$y_\nu' = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

d die Anfangsbedingungen $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Bemerkung. Herr Bendixson gewinnt einen entsprechenden Satz unter r weiteren Voraussetzung, daß in $\mathfrak{B}$ $f_\nu \geqq 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ sein soll; diesem Fall kann man das Verfahren der sukzessiven Approximationen der meist üblichen Form $(\varphi_\nu(x) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n))$ ansetzen. err Bendixson hat die für die Funktionen f_ν angegebenen Voraus- tzungen nicht nur für den Bereich $\mathfrak{B}$, sondern für einen Bereich ge- acht, bei welchem auch $a_1 > 0$, und dann behauptet, daß die Integrale rch das Verfahren der sukzessiven Approximationen im *ganzen* Inter- ll $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ geliefert werden; für $x < x_0$ ist aber diese Be- uptung im allgemeinen nicht zutreffend, wie wir in § 3 an einem Bei- iel zeigen werden[4]). Einen auf den Fall $x < x_0$ bezüglichen richtigen tz erhält man, wenn man in Satz 2 $(x - x_0)$ durch $-(x - x_0)$ und gleich f_ν durch $-f_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ersetzt, d. h. von den Funk- nen f_ν monotones Abnehmen statt monotonen Wachsens verlangt.

Beweis für Satz 2. Jede der n Funktionenfolgen

$$y_{\nu 1}(x), y_{\nu 2}(x), \ldots, y_{\nu\lambda}(x), \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

ächst für jeden Wert von x im Intervall $\langle x_0, x_0 + a_2' \rangle$ monoton. Es ist mlich

[4]) Diese falsche Angabe des Herrn Bendixson ist auch in den Enzyklopädie- ikel des Herrn Painlevé übergegangen: Enzyklopädie der mathematischen Wissen- haften mit Einschluß ihrer Anwendungen, Bd. II, 1. Teil, 1. Hälfte, S. 200; Encyclo- die des sciences mathématiques pures et appliquées, t. 2, vol. 3, p. 15.

$$y_{\nu 2}(x) - y_{\nu 1}(x) = \int_{x_0}^{x} f_\nu(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t))\, dt + M(x - x_0)$$

$$\geqq \int_{x_0}^{x} (-M)\, dt + M(x - x_0) = 0$$

oder

$$y_{\nu 2}(x) \geqq y_{\nu 1}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n);$$

also wegen der Monotonievoraussetzungen unseres Satzes

$$f_\nu(x, y_{12}(x), \ldots, y_{n2}(x)) \geqq f_\nu(x, y_{11}(x), \ldots, y_{n1}(x)) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

mithin

$$y_{\nu 3}(x) - y_{\nu 2}(x) = \int_{x_0}^{x} [f_\nu(t, y_{12}(t), \ldots, y_{n2}(t)) - f_\nu(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t))]\, dt \geqq 0$$

oder

$$y_{\nu 3}(x) \geqq y_{\nu 2}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

und allgemein

$$y_{\nu\lambda}(x) \geqq y_{\nu,\lambda-1}(x) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 2, 3, 4, \ldots)$$

im Intervall $\langle x_0, x_0 + a_2' \rangle$. Andererseits sind nach (7) die Zahlenfolgen $\{y_{\nu\lambda}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ x_0 \leqq x \leqq x_0 + a_2')$ nach oben beschränkt, also wegen der soeben festgestellten Monotonie konvergent, w. z. b. w.

§ 2.

Konvergenz bei erfüllter Lipschitz-Bedingung.

1. Wir machen wieder die Voraussetzung A. Dann scheint, von dem in § 1 behandelten Problem des Herrn Bendixson und zwei weiter unten angegebenen Spezialfällen abgesehen, die Konvergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximationen bisher nur für den Fall bewiesen worden zu sein, daß die Funktionen f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ einer Lipschitz-Bedingung

$$|f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)|$$
$$\leqq k_1 |y_1 - z_1| + k_2 |y_2 - z_2| + \ldots + k_n |y_n - z_n|$$

mit *konstanten* Koeffizienten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ genügen, d. h. daß die Derivierten

$$\overline{D^+_{y_\mu} f_\nu},\ \overline{D^-_{y_\mu} f_\nu},\ \underline{D^+_{y_\mu} f_\nu},\ \underline{D^-_{y_\mu} f_\nu} \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

beschränkt sind. Diese Einschränkung lassen wir fallen, machen vielmehr die allgemeinere

Voraussetzung B. *Die Derivierten der Funktionen* f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *sollen einer Ungleichung*

$$\left|\overline{D^+_{y_\mu} f_\nu}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\right| \leqq K_0(x) \qquad (\nu, \mu = 1, 2, \ldots, n)$$

nügen, wo die Funktion $K_0(x)$ so beschaffen ist, daß im Intervall $x_0 - a_1', x_0 + a_2'\rangle$ die Integrale

0) $$K_1(x) = \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,|t - x_0|\,dt \right|,$$

1) $$K_{\mu+1}(x) = \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,K_\mu(t)\,dt \right| \qquad (\mu = 1, 2, 3, \ldots)$$

istieren. Dabei ist es für das Folgende einerlei, ob unter jeweiliger Be-ıtzung des Riemannschen Integralbegriffes die Definition des uneigent-hen Integrales von Cauchy (bei endlich vielen Unbeschränktheitsstellen) ıer die Definition von de la Vallée Poussin verwendet wird[5]).

Dann gelten für irgend zwei Stellen $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ und $(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ s Bereiches $\mathfrak{B}$ die Ungleichungen

2) $$|f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq K_0(x)\{|y_1 - z_1| + \ldots + |y_n - z_n|\} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n).$$

2. Bestehen die Voraussetzungen A und B, so können wir wegen (1),), (12), (10) und (11) die folgenden Abschätzungen vornehmen:

$$\begin{aligned} |y_{\nu 2}(x) - y_{\nu 1}(x)| &\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f_\nu(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t))|\,dt \right| + |\varphi_\nu(x)| \\ &\leqq M|x - x_0| + M|x - x_0| = 2M|x - x_0|, \\ |y_{\nu 3}(x) - y_{\nu 2}(x)| &\leqq \left| \int_{x_0}^{x} |f_\nu(t, y_{12}(t), \ldots, y_{n2}(t)) - f_\nu(t, y_{11}(t), \ldots, y_{n1}(t))|\,dt \right| \\ &\leqq \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\{|y_{12}(t) - y_{11}(t)| + \ldots + |y_{n2}(t) - y_{n1}(t)|\}\,dt \right| \\ &\leqq 2Mn \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,|t - x_0|\,dt \right| = 2Mn\,K_1(x), \end{aligned}$$

gemein findet man:

3) $$|y_{\nu,\lambda+1}(x) - y_{\nu\lambda}(x)| \leqq 2Mn^{\lambda-1} K_{\lambda-1}(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 2, 3, 4, \ldots).$$

Es sei $0 \leqq \alpha \leqq a_1'$, $0 \leqq \beta \leqq a_2'$. Konvergiert die Reihe

4) $$\sum_{\lambda=2}^{\infty} 2Mn^{\lambda-1} K_{\lambda-1}(x) = 2M \sum_{\lambda=2}^{\infty} n^{\lambda-1} K_{\lambda-1}(x)$$

f einer im Intervall $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \beta\rangle$ überall dicht liegenden und ins-

[5]) Wegen dieser Integraldefinitionen vgl. man etwa: P. Montel und A. Rosenthal, egration und Differentiation, Encyklopädie II, C. 9 b Nr. 32. Uneigentliche Inte-le, S. 1050—1056.

besondere seine Endpunkte enthaltenden Punktmenge $\mathfrak{M}'_\nu$, so gilt nach (13) dasselbe von den Reihen

$$y_{\nu 0} + (y_{\nu 1} - y_{\nu 0}) + (y_{\nu 2} - y_{\nu 1}) + \dots \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

mit den Partialsummen $y_{\nu\lambda}$ $(\lambda = 1, 2, 3, \dots; \nu = 1, 2, \dots, n)$. Nach Satz 1 (angewandt auf den Teil $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \beta\rangle$ des Intervalles $\langle x_0 - a'_1, x_0 + a'_2\rangle$) konvergieren dann im ganzen Intervall $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \beta\rangle$ die n Funktionenfolgen $\{y_{\nu\lambda}(x)\}$ $(\nu = 1, 2, \dots, n)$ gleichmäßig gegen ein Integralsystem

$$\lim_{\lambda \to \infty} y_{\nu\lambda}(x) = y_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Etwas spezieller können wir aussagen:

Satz 3. *Konvergiert bei erfüllten Voraussetzungen* A *und* B *die Reihe* (14) *in einem Intervall* $\langle x_0 - \alpha, x_0 + \beta\rangle$, *wo* $0 \leqq \alpha \leqq a'_1$, $0 \leqq \beta \leqq a'_2$, *so konvergiert in diesem Intervall das Verfahren der sukzessiven Approximationen und liefert Integrale des Differentialgleichungssystems*

$$y'_\nu = f_\nu(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n),$$

die den Anfangsbedingungen

$$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

genügen.

3. Wir wollen einige Spezialfälle hervorheben.

Satz 4. *Läßt sich* $K_0(x)$ *gleich einer positiven Konstanten* k *wählen, so konvergiert die Reihe* (14). (*Fall der gewöhnlichen Lipschitz-Bedingung.*)

Beweis. Es wird

$$K_1(x) = k \left| \int_{x_0}^{x} |t - x_0|\, dt \right| = k \frac{|x - x_0|^2}{2!},$$

$$K_2(x) = \left| \int_{x_0}^{x} k^2 \frac{|t - x_0|^2}{2!}\, dt \right| = k^2 \frac{|x - x_0|^3}{3!}$$

allgemein

$$K_{\mu+1}(x) = k^{\mu+1} \frac{|x - x_0|^{\mu+2}}{(\mu+2)!};$$

die Reihe (14) wird in diesem Fall eine Exponentialreihe und ist als solche beständig konvergent[6]).

[6]) Eine Exponentialreihe als Majorante findet sich zuerst bei E. Lindelöf, Sur l'application de la méthode des approximations successives aux équations différentielles ordinaires du premier ordre, Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'académie des sciences 118 (1894), S. 454—457.

Satz 5. *Ist*

$$L(x) = \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,dt$$

Intervall $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$ *vorhanden, so konvergiert die Reihe* (14).

Beweis. Wird $\mathrm{Max}(a_1', a_2') = a'$ gesetzt, so ist jetzt

$$K_1(x) = \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,|t - x_0|\,dt \right| \leqq a' \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,dt \right| = a'\,|L(x)|,$$

$$K_2(x) = \left| \int_{x_0}^{x} K_0(t)\,K_1(t)\,dt \right| \leqq a' \left| \int_{x_0}^{x} |L(t)|\,K_0(t)\,dt \right| = a' \frac{|L(x)|^2}{2},$$

d allgemein

$$K_\mu(x) \leqq a' \frac{|L(x)|^\mu}{\mu!},$$

daß die Reihe (14) konvergiert [6a]).

Die beiden folgenden Fälle hat schon Herr Rosenblatt behandelt [7]).

Satz 6. *Ist*

$$K_0(x) = \frac{k}{|x - x_0|^m} \qquad (k \text{ konstant}, \ 0 < m < 1),$$

konvergiert die Reihe (14).

Das ist eine unmittelbare Folge von Satz 5.

Satz 7. *Ist* $0 < k < \frac{1}{n}$ (k *konstant*) *und*

$$K_0(x) = \frac{k}{|x - x_0|},$$

konvergiert die Reihe (14).

Beweis. Es ist

$$K_1(x) = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{k}{|t - x_0|}\,|t - x_0|\,dt \right| = k\,|x - x_0|,$$

$$K_2(x) = \left| \int_{x_0}^{x} \frac{k}{|t - x_0|}\,k\,|t - x_0|\,dt \right| = k^2\,|x - x_0|,$$

[6a]) Ursprünglich hatte ich hier eine geometrische Reihe als Majorante erhalten d damit die Konvergenz der Reihe (14) zunächst nur in einer Umgebung der Stelle x_0 sicherstellen können, in welcher $|L(x)| < \frac{1}{n}$. Durch Aneinanderreihen solcher ervalle ergab sich dann die Existenz der Integrale im ganzen Intervall $\langle x_0 - a_1', x_0 + a_2' \rangle$. n Beweis des Textes und die damit mögliche einfache Formulierung von Satz 5 danke ich Herrn Prof. Perron.

[7]) A. Rosenblatt, Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differential- ichungen, Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik 5 (1909), Nr. 2.

allgemein

$$K_\mu(x) = k^\mu |x - x_0|;$$

das allgemeine Glied der Reihe (14) also

$$2M|x - x_0|(nk)^\lambda;$$

die Reihe konvergiert somit für $nk < 1$ oder $k < \frac{1}{n}$, w. z. b. w.

§ 3.

Beispiele für Divergenz des Verfahrens der sukzessiven Approximationen

1. Die bisherigen Untersuchungen lassen die Frage offen, ob es a den verwendeten Beweismethoden oder in der Natur des Verfahrens d sukzessiven Approximationen begründet ist, daß man unter der Voraus setzung A allein seine Konvergenz nicht sicherstellen kann. Hierauf laute die Antwort:

Satz 8. *Besteht allein die Voraussetzung* A, *so braucht das Ve fahren der sukzessiven Approximationen nicht zu konvergieren; nic einmal eine Teilfolge von S-Funktionen konvergiert im allgemeinen gege ein Integral.*

Den Beweis erbringen wir durch Angabe eines geeigneten Beispiel Bei einer einzigen Differentialgleichung besteht das Verfahren der su zessiven Approximationen darin, daß man der Reihe nach die Funktione

$$y_1(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_0)\,dt,$$

$$y_\lambda(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{\lambda-1}(t))\,dt \qquad (\lambda = 2, 3, 4, \ldots$$

bildet. Sämtliche Funktionen genügen derselben Anfangsbedingun $y_\lambda(x_0) = y_0$ $(\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ und haben an der Stelle $x = x_0$ diesel Ableitung

$$\left(\frac{dy_\lambda(x)}{dx}\right)_{x=x_0} = f(x_0, y_{\lambda-1}(x_0)) = f(x_0, y_0) \quad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

Wir setzen $x_0 = 0$, $y_0 = 0$; dann ist eine der einfachsten Funktione folgen, bei denen

1. die sämtlichen Funktionen für $x = 0$ den Wert 0 annehmen u dieselbe Ableitung haben und

2. mehr als eine Grenzfunktion existiert, die folgende

$$x^2, \; -x^2, \; x^3, \; -x^2, \ldots .$$

Wir wollen es nun so einrichten, daß bei unserem Beispiel

15) $$y_{2\lambda}(x) = -x^2, \qquad y_{2\lambda-1}(x) = x^2 \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

wird; dann muß also sein

$$y_1(x) = \int_0^x f(t, 0)\,dt = x^2,$$

$$y_{2\lambda}(x) = \int_0^x f(t, y_{2\lambda-1}(t))\,dt = \int_0^x f(t, t^2)\,dt = -x^2,$$

$$y_{2\lambda+1}(x) = \int_0^x f(t, y_{2\lambda}(t))\,dt = \int_0^x f(t, -t^2)\,dt = x^2;$$

hieraus erhält man durch Differentiation für f die Bedingungsgleichungen

$$f(x, 0) = 2x, \qquad f(x, x^2) = -2x, \qquad f(x, -x^2) = 2x.$$

Eine sehr einfache Funktion, die diesen Forderungen genügt, ist die folgende:

16) $$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0,\ -\infty < y < \infty, \\ 2x & \text{für } 0 < x \leqq a,\ -\infty < y < 0, \\ 2x - 4\dfrac{y}{x} & \text{für } 0 < x \leqq a,\ 0 \leqq y \leqq x^2, \\ -2x & \text{für } 0 < x \leqq a,\ x^2 < y < \infty, \end{cases}$$ (a beliebige positive Konstante);

sie ist bei festgehaltenem x für $y < 0$ konstant $= 2x$, fällt im Bereich $0 \leqq y \leqq x^2$ von diesem Wert linear auf den Wert $-2x$ und behält dann diesen letzten Wert für $y > x^2$ wiederum konstant bei. Sie ist in ihrem Definitionsbereich stetig und dem absoluten Betrage nach nicht größer als $2a$. Die Voraussetzung A ist also erfüllt, und zwar mit $a_1 = 0$, $a_2 = a$, $M = 2a$. Wendet man nunmehr auf die Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y),$$

wo $f(x, y)$ die Funktion (16) ist, das Verfahren der sukzessiven Approximationen an, so erhält man als S-Funktionen die Funktionen (15); diese Funktionen haben keine gemeinsame Grenzfunktion für $\lambda \to \infty$. *Also konvergiert hier das Verfahren der sukzessiven Approximationen nicht.* Die einzigen Funktionen, gegen welche Teilfolgen der S-Funktionen (15) konvergieren, sind die Funktionen x^2 und $-x^2$; dieselben sind keine Integrale, wie man beim Einsetzen in die Differentialgleichung findet. *Also konvergiert auch keine Teilfolge der nach dem Verfahren der sukzessiven Approximationen gebildeten Funktionen gegen ein Integral.* Damit ist Satz 8 bewiesen.

2. Ferner betrachten wir die Differentialgleichung, deren rechte Sei die Funktion

$$f(x,y)=\begin{cases} A \quad \text{für} \quad x=0,\ -\infty<y<\infty, \\ A+2x \quad \text{für} \quad -\frac{A}{2}\leqq x<0,\ -\infty<y<Ax, \\ A+2x-\frac{4(y-Ax)}{x} \quad \text{für} \quad -\frac{A}{2}\leqq x<0,\ Ax\leqq y\leqq Ax+x \\ A-2x \quad \text{für} \quad -\frac{A}{2}\leqq x<0,\ Ax+x^2<y<\infty \end{cases}$$

ist (A beliebige positive Konstante). $f(x,y)$ wächst in seinem Defi tionsbereich monoton mit y, ist daselbst stetig und nicht negativ:

$$0\leqq f(x,y)\leqq 2A.$$

Auch hier konvergieren die S-Funktionen weder insgesamt noch Teilfolgen gegen das Integral der Differentialgleichung $y'=f(x,y)$, d durch den Koordinatenursprung geht. Diese Differentialgleichung wid legt also direkt die in § 1, 3 erwähnte Behauptung des Herrn Bendixs

3. Es ist naheliegend, die Lipschitz-Bedingung

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqq k|y-\bar{y}| \qquad (k \text{ konsta}$$

durch die allgemeinere zu ersetzen:

$$|f(x,y)-f(x,\bar{y})|\leqq k|y-\bar{y}|^m \qquad (k \text{ konstant}, \ m>$$

(17)

Wir wollen eine solche Bedingung kurz eine *Lipschitz-Bedingung z Exponenten* m nennen. Da, falls $m>1$ ist, offenbar auch eine Lipschi Bedingung zum Exponenten 1 besteht, konvergiert das Verfahren sukzessiven Approximationen für $m\geqq 1$.

Für $0<m<1$ ist dies indessen nicht mehr allgemein der F Hierfür ein Beispiel: Wir wählen eine positive Zahl μ so, daß

$$\mu\geqq\frac{1}{1-m}>1$$

und wollen es dann einrichten, daß $x_0=0$, $y_0=0$ und

$$y_\lambda(x)=(-1)^{\lambda+1}x^\mu \qquad (\lambda=1,2,3,\ldots$$

(18)

hieraus ergeben sich wie in Nr. 1 für die rechte Seite $f(x,y)$ der suchten Differentialgleichung die Forderungen

$$f(x,0)=\mu x^{\mu-1}, \quad f(x,x^\mu)=-\mu x^{\mu-1}, \quad f(x,-x^\mu)=\mu x^{\mu-1}.$$

Eine für unsere Zwecke geeignete Funktion, die diesen Bedingungen nügt, ist die folgende:

$$) \quad f(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{für } x=0,\ -\infty<y<\infty \text{ (Gebiet I)},\\ \mu x^{\mu-1} & \text{für } x>0,\ -\infty<y\leqq 0 \text{ (Gebiet II)},\\ \mu x^{\mu-1}-2\mu x^{\mu(1-m)-1}y^m & \text{für } x>0,\ 0\leqq y\leqq x^\mu \text{ (Gebiet III)},\\ -\mu x^{\mu-1} & \text{für } x>0,\ x^\mu\leqq y<\infty \text{ (Gebiet IV)}; \end{cases}$$

sie ist bei festgehaltenem x für $y<0$ konstant $=\mu x^{\mu-1}$, fällt im Bereich $0\leqq y\leqq x^\mu$ von diesem Wert parabolisch auf den Wert $-\mu y^{\mu-1}$ und behält dann diesen letzten Wert für $y>x^\mu$ wiederum konstant bei; sie ist also in ihrem Definitionsbereich stetig.

Wendet man auf die Differentialgleichung $y'=f(x,y)$, in der f die durch (19) definierte Funktion ist, das Verfahren der sukzessiven Approximationen an, so erhält man als S-Funktionen die Funktionen (18), dasselbe konvergiert also nicht; die einzigen vorhandenen Grenzfunktionen x^μ und $-x^\mu$ erweisen sich beim Einsetzen in die Differentialgleichung nicht als Integrale; also konvergiert auch keine Teilfolge von S-Funktionen gegen ein Integral.

Wir haben noch zu zeigen, daß $f(x,y)$ in jedem Streifen $\mathfrak{S}$:

$$0\leqq x\leqq a, \qquad -\infty<y<\infty \qquad (a \text{ positive Konstante})$$

einer Lipschitz-Bedingung zum Exponenten m genügt: Im Gebiet I ist sicher für *jedes* $k>0$:

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=0\leqq k|y_1-y_2|^m;$$

für (x,y_1) und (x,y_2) gleichzeitig im Gebiet II oder gleichzeitig im Gebiet IV ist

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=|\mu x^{\mu-1}-\mu x^{\mu-1}|=0\leqq k|y_1-y_2|^m;$$

für (x,y_1) und (x,y_2) im Gebiet III ist wegen

$$\mu\geqq\frac{1}{1-m}, \quad \text{also} \quad \mu(1-m)-1\geqq 0:$$

$$\begin{aligned} &|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\\ &\quad=|\mu x^{\mu-1}-2\mu x^{\mu(1-m)-1}y_1^m-\mu x^{\mu-1}+2\mu x^{\mu(1-m)-1}y_2^m|\\ &\quad=|2\mu x^{\mu(1-m)-1}|\cdot|y_1^m-y_2^m|\\ &\quad\leqq|2\mu a^{\mu(1-m)-1}|\cdot|y_1^m-y_2^m|, \end{aligned}$$

oder, wenn wir jetzt $k=2\mu a^{\mu(1-m)-1}$ setzen, wegen $y_1\geqq 0$, $y_2\geqq 0$ [8]):

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqq k|y_1^m-y_2^m|=k\big||y_1|^m-|y_2|^m\big|\leqq k|y_1-y_2|^m.$$

[8]) Hier wird die Ungleichung

$$(\alpha) \qquad \big||a|^m-|b|^m\big|\leqq\big||a|-|b|\big|^m\leqq|a-b|^m \qquad (0\leqq m\leqq 1)$$

benutzt. Dieselbe kann man folgendermaßen beweisen: Zunächst ist sie sicher richtig, wenn $m=0$ oder $m=1$, ferner wenn eine oder jede der Zahlen a und b gleich Null

(Fortsetzung der Fußnote 8 auf nächster Seite.)

Ist aber etwa (x, y_1) im Gebiet IV und (x, y_2) im Gebiet III, so ist

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = |f(x, x^\mu) - f(x, y_2)| \leqq k|x^\mu - y_2|^m$$
$$= k(x^\mu - y_2)^m \leqq k(y_1 - y_2)^m = k|y_1 - y_2|^m$$

also wieder die Lipschitz-Bedingung erfüllt, und genau so kann ma schließen, falls (x, y_1) in III, (x, y_2) in II, oder (x, y_1) in IV und $(x, y_2$ in II gelegen ist; die Lipschitz-Bedingung (17) ist in $\mathfrak{S}$ erfüllt.

Satz 9. *Es gelte die Voraussetzung* A *mit* $n = 1$, *und es genüg* $f(x, y)$ *einer Lipschitz-Bedingung zum Exponenten* m

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leqq k|y_1 - y_2|^m \quad (k \text{ positive Konstante})$$

Das Verfahren der sukzessiven Approximationen konvergiert für $m \geqq 1$ *für* $0 < m < 1$ *konvergiert es im allgemeinen nicht mehr.*

Kapitel II.

Die Methode der approximativen Polynome.

Das Fundamentaltheorem in der Theorie der gewöhnlichen Differen tialgleichungen kann man in verschiedener Weise aussprechen; für un kommen zunächst die beiden folgenden Formulierungen in Betracht[9]).

---

ist, oder wenn $|a| = |b|$; sind diese Möglichkeiten ausgeschlossen, so kann ma durch die Zahl mit größerem absoluten Betrag dividieren und wird auf eine Ur gleichung von der Form

$$(\beta) \qquad |1 - \sigma^m| \leqq |1 - \sigma|^m \qquad (0 < \sigma < 1,\ 0 < m < 1$$

geführt; diese ist aber richtig. Denn setzt man

$$\varphi(x) = \frac{(1-x)^\mu}{1-x^\mu} \qquad (0 \leqq x \leqq 1,\ \mu > 1)$$

so ist wegen

$$\varphi(0) = 1,$$

$$\varphi(1) = \lim_{x \to 1} \frac{(1-x)^\mu}{1-x^\mu} = \lim_{x \to 1} \frac{-\mu(1-x)^{\mu-1}}{-\mu x^{\mu-1}} = 0,$$

$$\varphi'(x) = -\frac{\mu(1-x)^{\mu-1}}{(1-x^\mu)^2}(1 - x^{\mu-1}) < 0$$

im Intervall $\langle 0, 1 \rangle$

oder

$$0 \leqq \varphi(x) \leqq \varphi(0) = 1$$

$$(1-x)^\mu \leqq 1 - x^\mu;$$

und aus dieser Ungleichung geht für $x^\mu = \sigma$, $\frac{1}{\mu} = m$, also $0 \leqq \sigma \leqq 1$, $0 < m <$ gerade (β) hervor.

[9]) Der erste Beweis der folgenden Sätze stammt von G. Peano, Démonstratio de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires, Math. Annalen 37 (1890 S. 182—228. An neueren Beweisen kommen in Betracht: P. Montel, Sur les suite

Satz 10. *Die Funktionen* $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *seien in dem durch die Ungleichungen*

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \qquad y_{\nu 0} - b \leqq y_\nu \leqq y_{\nu 0} + b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$ *stetig. Setzt man*

$$M = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\}$$

und

$$a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

so hat im Intervall $\langle x_0 - a', x_0 + a' \rangle$ *das System gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mindestens ein System stetiger Integrale $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, *welche den Anfangsbedingungen* $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *genügen.*

Satz 11. *Sind die n reellen Funktionen* $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *in dem durch die Ungleichungen*

$$x_0 - a \leqq x \leqq x_0 + a, \qquad -\infty < y_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten unendlichen Bereich $\mathfrak{B}^*$ *stetig und beschränkt, so hat das System von n gewöhnlichen Differentialgleichungen*

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

im Intervall $\langle x_0 - a, x_0 + a \rangle$ *mindestens ein System von Integralen* $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *mit beliebig vorgebbaren Anfangswerten* $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$.

Setzt man weiter voraus, daß in $\mathfrak{B}$, bzw. $\mathfrak{B}^*$ die Funktionen f_ν $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ einer Lipschitz-Bedingung

$$|f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq k \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i| \qquad \begin{pmatrix} \nu = 1, 2, \ldots, n; \\ k \text{ konstant} \end{pmatrix}$$

genügen, so sind die gefundenen Integralsysteme auch die einzigen, die den angegebenen Anfangsbedingungen genügen. Dann kann man Satz 10 und Satz 11 mittels der Methode von Cauchy-Lipschitz oder der Methode der sukzessiven Approximationen gewinnen[10]); dabei braucht man aber nur

---

infinies de fonctions, Annales scientifiques de l'école normale supérieure (3), 24 (1907), S. 233–334, besonders S. 264 ff.; O. Perron, Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen, Math. Annalen 78 (1918), S. 378–384; C. Carathéodory, Vorlesungen über reelle Funktionen (Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner) (1918), S. 672 ff. Hier wird ein noch allgemeinerer Satz bewiesen.

[10]) Vgl. die einschlägigen Lehrbücher.

einen der beiden Sätze zu beweisen, der andere läßt sich dann leicht au dem zuerst gewonnenen herleiten.

Auf den so gewonnenen Satz 11 (mit Lipschitz-Bedingung) aufbauend wollen wir Satz 10 (ohne Lipschitz-Bedingung) neu beweisen. Dabe können wir uns auf das Intervall $\langle x_0, x_0 + a' \rangle$ beschränken, da auf diese Fall der Fall $x \leqq x_0$ mittels der Substitution $x = -\xi$ sofort zurück geführt werden kann.

Nach einem von Weierstraß herstammenden Satz[11]) gibt es n Folge von ganzen rationalen Funktionen $\{p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n$ derart, daß in dem durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad |y_\nu - y_{\nu 0}| \leqq b \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig

$$\lim_{\lambda \to \infty} p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

ist.

Wir setzen die Funktionen f_ν und $p_{\nu\lambda}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots$ über den Bereich $\mathfrak{B}'$ hinaus fort: Ist $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ eine Stelle des durc die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \quad -\infty < y_i < \infty \quad (i = 1, 2, \ldots, n$$

definierten Bereiches $\mathfrak{B}''$, so soll

$$\left.\begin{aligned} f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= f_\nu(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n), \\ p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) &= p_{\nu\lambda}(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) \end{aligned}\right\} (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

sein, wo die Argumente $\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n$ bestimmt sind durch di Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} &\bar{x} = x, \\ &\bar{y}_i = y_i, \quad \text{falls} \quad y_{i0} - b \leqq y_i \leqq y_{i0} + b, \\ &\bar{y}_i = y_{i0} + b, \quad \text{falls} \quad y_i > y_{i0} + b, \\ &\bar{y}_i = y_{i0} - b, \quad \text{falls} \quad y_i < y_{i0} - b, \end{aligned}\right\} (i = 1, 2, \ldots, n$$

Ist

$$M = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\},$$

so ist auch in $\mathfrak{B}''$

$$(20) \qquad M \geqq |f_1|, \ M \geqq |f_2|, \ \ldots, \ M \geqq |f_n|.$$

Auch in $\mathfrak{B}''$ ist gleichmäßig

$$(21) \quad \lim_{\lambda \to \infty} p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

Wegen (20) und (21) gibt es eine Konstante L derart, daß in $\mathfrak{B}''$

$$(22) \qquad |p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)| \leqq L \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots$$

[11]) Literatur bei M. Fréchet-A. Rosenthal, Encyklopädie II, C. 9. c. S. 1147ff.

Wir betrachten jetzt die Kette von Differentialgleichungssystemen

$$(23)\qquad \begin{cases} \dfrac{dy_{\nu 1}}{dx} = p_{\nu 1}(x, y_{1 1}, y_{2 1}, \ldots, y_{n 1}), & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ \dfrac{dy_{\nu 2}}{dx} = p_{\nu 2}(x, y_{1 2}, y_{2 2}, \ldots, y_{n 2}), & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_{\nu \lambda}}{dx} = p_{\nu \lambda}(x, y_{1 \lambda}, y_{2 \lambda}, \ldots, y_{n \lambda}), & (\nu = 1, 2, \ldots, n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Die rechten Seiten sind in $\mathfrak{B}''$ gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt, in $\mathfrak{B}'$ ganze rationale Funktionen ihrer Argumente, in dem Teil von $\mathfrak{B}''$, der nicht zu $\mathfrak{B}'$ gehört, in bezug auf jedes ihrer n letzten Argumente vom Charakter einer Konstanten, d. h. es ist $p_{\nu\lambda}$ für $y_{i\lambda} > y_{i0} + b$ gleich einer Konstanten und für $y_{i\lambda} < y_{i0} - b$ wieder gleich einer (im allgemeinen von der ersten verschiedenen) Konstanten, wenn die übrigen Argumente festgehalten werden; sie besitzen also sicher beschränkte Derivierten nach jeder der n letzten Variablen; also gibt es zu jeder der Zahlen $\lambda = 1, 2, 3, \ldots$ eine numerische Konstante k_λ derart, daß die Lipschitz-Bedingung

$$|p_{\nu\lambda}(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - p_{\nu\lambda}(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq k_\lambda \sum_{i=1}^{n} |y_i - z_i|$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

erfüllt ist. Nach Satz 11 (mit Lipschitz-Bedingung) hat also jedes dieser Differentialgleichungssysteme im Intervall $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ ein und nur ein System stetiger Integrale

$$y_{1\lambda}(x),\ y_{2\lambda}(x),\ \ldots,\ y_{n\lambda}(x) \qquad (\lambda = 1, 2, 3, \ldots)$$

mit den Anfangswerten $y_{\nu\lambda}(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$. Denken wir uns diese Integralsysteme in unsere Kette von Differentialgleichungssystemen eingesetzt, so wird

$$(24)\qquad y_{\nu\lambda}(x) = y_{\nu 0} + \int_{x_0}^{x} p_{\nu\lambda}(t, y_{1\lambda}(t), \ldots, y_{n\lambda}(t))\, dt$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$

und hieraus folgt wegen (22) sofort für das Intervall $\langle x_0, x_0 + a\rangle$:

$$|y_{\nu\lambda}(x_2) - y_{\nu\lambda}(x_1)| \leqq L|x_2 - x_1| \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$y_{\nu 0} - L|x - x_0| \leqq y_{\nu\lambda}(x) \leqq y_{\nu 0} + L|x - x_0|$$
$$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots);$$

die Funktionenmenge $y_{\nu\lambda}(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \lambda = 1, 2, 3, \ldots)$ ist also

gleichgradig stetig und gleichmäßig beschränkt. Mittels des Diagonal verfahrens kann man aus ihr n Teilfolgen

$$y_{\nu\lambda_1}(x),\ y_{\nu\lambda_2}(x),\ \ldots,\ y_{\nu\lambda_\varrho}(x),\ \ldots \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

aussondern, die im Intervall $\langle x_0, x_0 + a\rangle$ gleichmäßig gegen n Grenz funktionen

$$\lim_{\varrho\to\infty} y_{\nu\lambda_\varrho}(x) = y_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n \tag{25}$$

konvergieren[12]). Wegen der Gleichmäßigkeit der Grenzübergänge (21) und (25) folgt aus (24), daß diese Grenzfunktionen im Intervall $\langle x_0, x_0 + a$ dem Integralgleichungssystem

$$y_\nu(x) = y_{\nu 0} + \int_{x_0}^{x} f_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))\, dt \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

also den Anfangsbedingungen

$$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

und dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy_\nu(x)}{dx} = f_\nu(x, y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

genügen.

Dabei bleibt aber nicht notwendig die Stelle $[x, y_1(x), \ldots, y_n(x)$ im ursprünglichen Definitionsbereich $\mathfrak{B}'$ der Funktionen f_ν. Beschränken wir aber x auf das Intervall

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a', \quad \text{wo} \quad a' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

so wird

$$|y_\nu(x) - y_{\nu 0}| \leqq \int_{x_0}^{x} |f_\nu(t, y_1(t), \ldots, y_n(t))|\, dt \leqq Ma' \leqq b;$$

d. h. dann bleiben die Integrale sicher im ursprünglichen Definitionsbereich der Funktionen f_ν. Satz 10 ist damit bewiesen.

---

[12]) Vgl. etwa: M. Fréchet-A. Rosenthal, a. in Anm. [11]) a. O., S. 1144—1146. Ganz ähnliche Überlegungen sind in den in Anm. [9]) genannten drei neueren Arbeiten ausführlich dargestellt.

Kapitel III.

Aufsuchen eines möglichst günstigen Existenzbereiches.

§ 1.

Beweis des allgemeinen Existenztheorems.

1. Herr Perron[13]) hat bewiesen:

Satz 12. *Die Funktion $f(x, y)$ sei stetig in einem Gebiet T, das durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$\omega(x) \leqq y \leqq \Omega(x)$$

definiert ist. Dabei sollen die Funktionen $\omega(x)$ und $\Omega(x)$ den folgenden Forderungen genügen:

1. *Sie sind im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ stetig und genügen den Anfangsbedingungen*

$$\omega(x_0) = \Omega(x_0) = y_0.$$

2. *Die vor- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten $D_+\omega(x)$, $D_-\omega(x)$, $D_+\Omega(x)$, $D_-\Omega(x)$ sind vorhanden und genügen den Ungleichungen*

$$D_\pm\omega(x) \leqq f(x, \omega(x)),$$
$$D_\pm\Omega(x) \geqq f(x, \Omega(x)).$$

Unter diesen Voraussetzungen gibt es im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ mindestens eine Funktion $y = y(x)$, die ganz im Gebiet T bleibt, so daß insbesondere $y(x_0) = y_0$ ist, und die der Differentialgleichung

$$y' = f(x, y)$$

genügt.

Wir wollen diesen Satz auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen ausdehnen:

Satz 13. *Die Funktionen $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ seien stetig in einem Gebiet T, das durch die Ungleichungen*

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$\omega_\nu(x) \leqq y_\nu \leqq \Omega_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert ist. Dabei sollen die Funktionen $\omega_\nu(x)$ und $\Omega_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ den folgenden Forderungen genügen:

---

[13]) O. Perron, Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale der Differentialgleichung $y' = f(x, y)$. Math. Annalen **76** (1915), S. 471—484; ein auf wesentlich demselben Grundgedanken beruhender Beweis auch schon bei G. Peano, Sull' Integrabilità delle equazioni differenziali di primo ordine, Atti della Reale Accademia delle scienze di Torino **21** (1885/86), S. 677—685.

1. *Sie sind im Intervall* $\langle x_0, X\rangle$ *stetig und haben die Anfangswert*

$$\omega_\nu(x_0) = \Omega_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

2. *Die vor- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten* $D_+\omega_\nu(x)$, $D_-\omega_\nu(x)$, $D_+\Omega_\nu(x)$, $D_-\Omega_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *sind vorhanden und ge*

nügen den Ungleichungen

$$\begin{aligned} D_\pm\omega_\nu(x) &\leqq \operatorname*{Min}_{T_\nu(x)}[f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)], \\ D_\pm\Omega_\nu(x) &\geqq \operatorname*{Max}_{T_\nu^*(x)}[f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)] \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

wobei die Bereiche $T_\nu(x)$, *bzw.* $T_\nu^*(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *folgendermaße*

definiert sind:

$$T_\nu(x): \begin{cases} x = x, \\ y_\nu = \omega_\nu(x), \\ \omega_i(x) \leqq y_i \leqq \Omega_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq \nu) \end{cases}$$

bzw.

$$T_\nu^*(x): \begin{cases} x = x, \\ y_\nu = \Omega_\nu(x), \\ \omega_i(x) \leqq y_i \leqq \Omega_i(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq \nu) \end{cases}$$

Unter diesen Voraussetzungen gibt es im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ *wenigsten*

ein System von stetigen Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, *die ganz in*

Gebiet T *bleiben, so daß sie insbesondere den Anfangsbedingunge*

$y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *genügen, und die das System von gewöhn*

lichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

erfüllen.

Gibt es außerdem noch n numerische Konstanten $k_1, k_2, \ldots, k_n$ *derar*

daß für irgend zwei Stellen $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *und* $(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ *de*

Gebietes T

$$(26) \quad |f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) - f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)| \leqq \sum_{\varrho=1}^{n} k_\varrho |y_\varrho - z_\varrho| \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n),$$

so gibt es nur ein System solcher Funktionen.

Beweis. Wir setzen die Funktionen $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n$ in den durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq X, \qquad -\infty < y_\nu < \infty \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$ hinaus fort; es sei für jede Stelle $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ aus $\mathfrak{B}$

$$f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) = f_\nu(\bar{x}, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

wo

$$\left.\begin{array}{lll} \bar{x} = x, & & \\ \bar{y}_i = y_i, & \text{falls} & \omega_i(x) \leqq y_i \leqq \Omega_i(x), \\ \bar{y}_i = \Omega_i(x), & \text{falls} & y_i > \Omega_i(x), \\ \bar{y}_i = \omega_i(x), & \text{falls} & y_i < \omega_i(x), \end{array}\right\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Dann sind die Funktionen f_ν auch in $\mathfrak{B}$ gleichmäßig stetig und gleichmäßig beschränkt und gegebenenfalls gilt auch für zwei Stellen $(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ und $(x, z_1, z_2, \ldots, z_n)$ aus $\mathfrak{B}$ die Lipschitz-Bedingung (26).

Nach Satz 11 (mit, bzw. ohne Lipschitz-Bedingung) gibt es also (ein und nur, bzw. mindestens) ein System stetiger Funktionen $y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ mit den Anfangswerten $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, die das Differentialgleichungssystem

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

befriedigen. Von diesen Funktionen wollen wir nachweisen, daß sie im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ den Ungleichungen

$$\omega_\nu(x) \leqq y_\nu(x) \leqq \Omega_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen.

Es sei ν irgendeine der Zahlen $1, 2, \ldots, n$. Nehmen wir an, es wäre nicht immer $\omega_\nu(x) \leqq y_\nu(x)$, so müßte es mindestens eine Stelle $x = x'$ geben, für welche $\omega_\nu(x') > y_\nu(x')$. Die stetige Funktion

$$\lambda_\nu(x) = \omega_\nu(x) - y_\nu(x)$$

hat im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ ein Maximum m_ν, und zwar ist

$$m_\nu \geqq \lambda_\nu(x') = \omega_\nu(x') - y_\nu(x') > 0.$$

Wir bilden die im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ stetige Funktion

$$v_\nu(x) = \omega_\nu(x) - \frac{m_\nu}{2(X - x_0)}(x - x_0);$$

es ist

$$v_\nu(x_0) = \omega_\nu(x_0) = y_{\nu 0} = y_\nu(x_0),$$

$$D_+ v_\nu(x_0) = D_+ \omega_\nu(x_0) - \frac{m_\nu}{2(X - x_0)} < D_+ \omega_\nu(x_0)$$

$$\leqq f_\nu(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) = D_+ y_\nu(x_0);$$

also in einer hinreichend klein gewählten rechtsseitigen Umgebung der Stelle x_0, etwa für $x_0 < x \leqq x_0 + \delta$

$$v_\nu(x) < y_\nu(x).$$

Wir betrachten eine Stelle $x = x''$, für welche

$$m_\nu = \lambda_\nu(x'') = \omega_\nu(x'') - y_\nu(x'');$$

da $\lambda_\nu(x_0) = 0$, aber $m_\nu > 0$, so ist gewiß $x_0 < x'' \leqq X$. An dieser Stelle $x = x''$ ist

$$v_\nu(x'') - y_\nu(x'') = \omega_\nu(x'') - \frac{m_\nu}{2(X-x_0)}(x''-x_0) - y_\nu(x'')$$

$$\geqq \omega_\nu(x'') - \frac{m_\nu}{2} - y_\nu(x'') = m_\nu - \frac{m_\nu}{2} > 0;$$

demnach ist für $x_0 < x \leqq x_0 + \delta$

$$\mu_\nu(x) = v_\nu(x) - y_\nu(x) < 0,$$

aber

$$\mu_\nu(x'') = v_\nu(x'') - y_\nu(x'') > 0;$$

die stetige Funktion $\mu_\nu(x)$ verschwindet also im Intervall $\langle x_0 + \delta, x''$ einmal; wegen der Stetigkeit gibt es eine *kleinste* Nullstelle ξ von $\mu_\nu(x$ in diesem Intervall. Es ist $\mu_\nu(\xi) = v_\nu(\xi) - y_\nu(\xi) = 0$ oder

$$v_\nu(\xi) = y_\nu(\xi),$$

aber

$$v_\nu(\xi - h) < y_\nu(\xi - h) \qquad (0 < h < \delta$$

also auch

$$D_- v_\nu(\xi) \geqq D_- y_\nu(\xi). \tag{27}$$

Es ist andererseits

$$v_\nu(\xi) - \omega_\nu(\xi) = -\frac{m_\nu}{2(X-x_0)}(\xi - x_0) < 0,$$

also $y_\nu(\xi) = v_\nu(\xi) < \omega_\nu(\xi)$ und

$$f_\nu(\xi, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_\nu(\xi), y_{\nu+1}, \ldots, y_n)$$
$$= f_\nu(\xi, y_1, \ldots, y_{\nu-1}, \omega_\nu(\xi), y_{\nu+1}, \ldots, y_n)$$

für *jedes* Wertesystem $y_1, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_n$; speziell ist also auch weil der Wertevorrat der Funktion f_ν bei der von uns vorgenommene Erweiterung ihrer Definition nicht vergrößert wird,

$$f_\nu(\xi, y_1(\xi), \ldots, y_{\nu-1}(\xi), y_\nu(\xi), y_{\nu+1}(\xi), \ldots, y_n(\xi))$$
$$\geqq \operatorname*{Min}_{T_\nu(\xi)} [f_\nu(\xi, y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

aus unserer Annahme würde also wegen (27) folgen, daß

$$D_- y_\nu(\xi) \leqq D_- v_\nu(\xi) = D_- \omega_\nu(\xi) - \frac{m_\nu}{2(X-x_0)} < D_- \omega_\nu(\xi)$$
$$\leqq \operatorname*{Min}_{T_\nu(\xi)} [f_\nu(\xi, y_1, \ldots, y_n)]$$
$$\leqq f_\nu(\xi, y_1(\xi), y_2(\xi), \ldots, y_n(\xi)),$$

während doch

$$D_- y_\nu(\xi) = f_\nu(\xi, y_1(\xi), y_2(\xi), \ldots, y_n(\xi))$$

sein muß. Wegen dieses Widerspruches ist in der Tat im ganzen Inte vall $\langle x_0, X\rangle$ $\omega_\nu(x) \leqq y_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$, und ebenso zeigt man, da

m Intervall $\langle x_0, X\rangle$ auch ständig $y_\nu(x) \leqq \Omega_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist. Damit ist Satz 13 bewiesen.

2. In Satz 13 sind, was den Existenzbereich betrifft, alle bisher bekannten Existenzsätze enthalten. Wir zeigen zunächst, daß Satz 10 darin enthalten ist.

Sind die Funktionen $f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)$ stetig in dem durch die Ungleichungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + a; \quad |y_\nu - y_{\nu 0}| \leqq b \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Bereich $\mathfrak{B}$ und ist

$$M = \operatorname*{Max}_{\mathfrak{B}} \{|f_1|, |f_2|, \ldots, |f_n|\},$$

so kann man in Satz 13

$$X = x_0 + \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right),$$

$$\omega_\nu(x) = y_{\nu 0} - M(x - x_0),$$

$$\Omega_\nu(x) = y_{\nu 0} + M(x - x_0) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

setzen. Dann ist der Bereich T in $\mathfrak{B}$ enthalten, also auch in T die Stetigkeit der Funktionen f_ν gesichert. Außerdem $\omega_\nu(x_0) = \Omega_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ und

$$D_{\pm}\,\omega_\nu(x) = -M \leqq \operatorname*{Min}_{T_\nu(x)} [f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

$$D_{\pm}\,\Omega_\nu(x) = M \geqq \operatorname*{Max}_{T_\nu^*(x)} [f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)],$$

da die Bereiche $T_\nu(x)$ und $T_\nu^*(x)$ Teilbereiche von T, also auch von $\mathfrak{B}$ sind. Sind also die Voraussetzungen von Satz 10 erfüllt, so lassen sich auch die Voraussetzungen von Satz 13 erfüllen, Satz 10 ist in Satz 13 enthalten. Für $n = 1$ hat dies bereits Herr Perron gezeigt[14]).

Der Vollständigkeit wegen sei wenigstens erwähnt, daß auch der von Herrn Lindelöf[15]) gefundene Existenzbereich in dem hier angegebenen enthalten ist.

3. Ein weiterer Spezialfall ist:

Satz 14. *Die Funktionen* $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ *seien stetig in einem Gebiet* T, *das durch die Ungleichungen*

[14]) A. in Anm. [13]) a. O. Peano hat in seiner dort genannten Arbeit den Existenzbereich nicht genau festgelegt.

[15]) Vgl. die in Anm. [6]) aufgeführte Arbeit, ferner E. Lindelöf: Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude des intégrales réelles des équations différentielles ordinaires, Journal de mathématiques pures et appliquées (4) **10** (1894), S. 117—128.

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$\omega_\nu(x) \leqq y_\nu \leqq \Omega_\nu(x) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

definiert ist. Dabei sollen die Funktionen $\omega_\nu(x)$, $\Omega_\nu(x)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n$ *den folgenden Bedingungen genügen:*

1. *Sie sind im Intervall* $\langle x_0, X\rangle$ *stetig und genügen den Anfang*
bedingungen

$$\omega_\nu(x_0) = \Omega_\nu(x_0) = y_{\nu 0} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

2. *Die vor- und rückwärtsgenommenen Differentialquotienten* $D_+\omega_\nu(x$ $D_-\omega_\nu(x)$, $D_+\Omega_\nu(x)$, $D_-\Omega_\nu(x)$ *sind vorhanden und genügen den Un*
gleichungen

$$\begin{aligned} D_+\omega_\nu(x) &\leqq f_\nu(x, \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)), \\ D_\pm\Omega_\nu(x) &\geqq f_\nu(x, \Omega_1(x), \ldots, \Omega_n(x)) \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

Es sei $f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}, y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_n)$ *in Bezug auf die Argumen*
$y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}, y_{\nu+1}, \ldots, y_n$ *im Gebiet* T *monoton wachsend, d. h. es s*

$$f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_{\nu-1}, y_\nu, y_{\nu+1}, \ldots, y_n) \geqq f_\nu(x, z_1, z_2, \ldots, z_{\nu-1}, y_\nu, z_{\nu+1}, \ldots, z_n)$$

für $y_\varrho \geqq z_\varrho$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho = 1, 2, \ldots, n;\ \varrho \neq \nu)$.

Unter diesen Voraussetzungen gibt es im Intervall $\langle x_0, X\rangle$ *mindeste*
ein System von stetigen Funktionen $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$, *die ga*
im Gebiet T *bleiben, so daß insbesondere* $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n$
ist, und das System von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

befriedigen.

Denn wegen der Monotonievoraussetzung bezüglich der Funktionen $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ ist

$$\begin{aligned} f_\nu(x, \omega_1(x), \ldots, \omega_n(x)) &= \operatorname*{Min}_{T_\nu(x)} [f_1(x, y_1, \ldots, y_n)], \\ f_\nu(x, \Omega_1(x), \ldots, \Omega_n(x)) &= \operatorname*{Max}_{T_\nu^*(x)} [f_1(x, y_1, \ldots, y_n)] \end{aligned} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n$$

also mit den Voraussetzungen von Satz 14 auch die Voraussetzung vo
Satz 13 erfüllt.

Satz 14, in welchem für $n = 1$ wiederum Satz 12 enthalten ist, kan
auch mittels der Methode der Ober- und Unterfunktionen gewonnen werde
und dürfte das allgemeinste sein, was mit dieser Methode bei Systemen vo
gewöhnlichen Differentialgleichungen erreicht werden kann. (Vgl. auch § 2

§ 2.

Kritische Bemerkungen zur Methode der Ober- und Unterfunktionen.

1. Sollen die Differentialgleichungen

$$\frac{dy_\nu}{dx} = f_\nu(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

mit den Anfangsbedingungen $y_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ integriert werden, so besteht die Methode der Ober- und Unterfunktionen darin, daß man die Differentialgleichungen durch die Deriviertenungleichungen

$$D_\pm \varphi_\nu(x) < f_\nu(x, \varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n) \tag{28}$$

ersetzt, die aus jenen entstehen, indem man statt des Gleichheitszeichens ein $<$-Zeichen setzt und außerdem noch zuläßt, daß der vordere und hintere Differentialquotient verschieden sein, die Lösungen der Derivierten-ungleichungen also auch Ecken haben können. Man sucht dann stetige Lösungen von (28) mit den Anfangswerten $\varphi_\nu(x_0) = y_{\nu 0}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$. (Wir wollen uns der Einfachheit wegen auf Unterfunktionen beschränken; für Oberfunktionen gilt Entsprechendes.)

Im Fall *einer einzigen* Differentialgleichung erweist sich dann die Funktion $g(x) = \limsup \varphi(x)$ als Integral der vorgelegten Differential-gleichung. Im Fall *mehrerer* Gleichungen brauchen dagegen die *gleich-zeitig* gebildeten Funktionen $g_\nu(x) = \limsup \varphi_\nu(x)$ kein Integralsystem zu liefern, wenn sie überhaupt existieren. Das wird das in Nr. 3 mit-geteilte Beispiel zeigen.

2. Man könnte auch noch an eine Ausdehnung der Methode der Ober- und Unterfunktionen auf Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen in der Art denken, daß man zunächst aus den Ungleichungen (28) nur die Funktion $g_1(x) = \limsup \varphi_1(x)$ ermittelt und dann unter Festhaltung von $g_1(x)$ durch einen neuen, möglichst ähnlichen Prozeß der Bildung einer oberen Grenzfunktion $g_2(x)$ bestimmt, usf., d. h. daß man die Inte-grale $g_1(x), g_2(x), \ldots, g_n(x)$ *nacheinander* durch Bildung von oberen Limesfunktionen gewinnt, wobei bei der Bildung von $g_\nu(x)$ die bereits vorher gefundenen Funktionen $g_1(x), \ldots, g_{\nu-1}(x)$ berücksichtigt werden. Ein solches Verfahren würde zumindest aber bedingen, daß die so ge-wonnene Funktion $g_1(x)$ tatsächlich in einem Integralsystem vorkommen kann. Das folgende Beispiel zeigt, daß auch diese Bedingung nicht all-gemein erfüllt ist.

3. Beispiel. Das System

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2^2,$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -y_1^2$$

hat als einziges Integralsystem mit den Anfangswerten $y_1(0)=0$, $y_2(0)=$ die Funktionen $y_1(x)=0$, $y_2(x)=0$.

Ein Unterfunktionensystem ist, falls $0<\varepsilon<1$ gewählt wird:

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}-\varepsilon x & \text{für } 0\leqq x\leqq\varepsilon,\\ -\varepsilon^2 & \text{für } \varepsilon\leqq x\leqq X,\end{cases}$$

$$\varphi_2(x)=\begin{cases}-x & \text{für } 0\leqq x\leqq\varepsilon,\\ -\varepsilon-2\varepsilon^4(x-\varepsilon) & \text{für } \varepsilon\leqq x\leqq X.\end{cases}$$

Denn

$$D_\pm\varphi_1(x)=-\varepsilon<0\leqq(-x)^2=[\varphi_2(x)]^2 \qquad \text{für } 0\leqq x\leqq\varepsilon,$$

$$D_\pm\varphi_2(x)=-1<-\varepsilon^2\leqq-(\varepsilon x)^2=-(-\varepsilon x)^2=-[\varphi_1(x)]^2$$
$$\text{für } 0\leqq x\leqq\varepsilon,$$

$$D_\pm\varphi_1(x)=0<(-\varepsilon-2\varepsilon^4(x-\varepsilon))^2=[\varphi_2(x)]^2 \qquad \text{für } \varepsilon\leqq x\leqq X$$

$$D_+\varphi_2(x)=-2\varepsilon^4<-\varepsilon^4=-(-\varepsilon^2)^2=-[\varphi_1(x)]^2 \qquad \text{für } \varepsilon\leqq x\leqq X$$

Da ε beliebig klein sein konnte, ist sicher

$$g_2(x)=\limsup\varphi_2(x)\geqq 0;$$

in Wahrheit ist $g_2(x)=0$; denn wäre für $x=\xi$ einmal $g_2(\xi)>0$, s gäbe es auch eine Unterfunktion $\varphi_2^*(x)$ derart, daß $\varphi_2^*(\xi)>0$; dan gäbe es eine der Ungleichung $0\leqq\bar{x}<\xi$ genügende Zahl $\bar{x}$, so daß

$$D_+\varphi_2^*(\bar{x})\geqq\frac{\varphi_2^*(\xi)-\varphi_2^*(0)}{\xi}=\frac{\varphi_2^*(\xi)}{\xi}>0,$$

während doch

$$D_+\varphi_2^*(\bar{x})<-[\varphi_1(\bar{x})]^2\leqq 0$$

sein muß.

Ein weiteres Unterfunktionensystem ist

$$\bar{\varphi}_1(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}x & \text{für } 0\leqq x\leqq 1,\\ -\frac{1}{2}+\frac{x-1}{2} & \text{für } 1\leqq x\leqq X,\end{cases}$$

$$\bar{\varphi}_2(x)=\begin{cases}-x & \text{für } 0\leqq x\leqq 1,\\ -\frac{1}{2}-(x-1)^3-\frac{1}{2}x & \text{für } 1\leqq x\leqq X;\end{cases}$$

denn die Anfangs- und Stetigkeitsbedingungen sind erfüllt; und es is

$$D_\pm\bar{\varphi}_1(x)=-\tfrac{1}{2}<0\leqq(-x)^2=[\bar{\varphi}_2(x)]^2 \qquad \text{für } 0\leqq x\leqq 1,$$

$$D_\pm\bar{\varphi}_2(x)=-1<-\tfrac{1}{4}\leqq-\tfrac{1}{4}x^3=-\left(-\tfrac{1}{2}x\right)^3=-[\bar{\varphi}_1(x)]^2$$
$$\text{für } 0\leqq x\leqq 1.$$

$$D_+\bar{\varphi}_1(x) = \frac{1}{2} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \leqq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \leqq \frac{1}{2} + (x-1)^3 + \frac{1}{2}x$$

$$\leqq \left[\frac{1}{2} + (x-1)^3 + \frac{1}{2}x\right]^2 = [\bar{\varphi}_2(x)]^2 \qquad \text{für } 1 \leqq x \leqq X,$$

$$D_+\bar{\varphi}_2(x) = -3(x-1)^2 - \frac{1}{2} \leqq -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{1}{2} < -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{1}{4}$$

$$\leqq -\left(\frac{1}{4} - \frac{x-1}{2} + \frac{(x-1)^2}{4}\right) = -[\bar{\varphi}_1(x)]^2 \qquad \text{für } 1 \leqq x \leqq X.$$

Da aber

$$\bar{\varphi}_1(x) = -\frac{1}{2} + \frac{x-1}{2} > 0 \qquad \text{für } x > 2,$$

so ist, wenn es überhaupt existiert, $g_1(x) > 0$ zumindest für $x > 2$, kann also nach dem eingangs Gesagten sicher kein Integral sein. Die Aussagen von Nr. 1 und Nr. 2 sind damit belegt.

4. Zusammenfassend können wir sagen: *Sieht man das Charakteristische der Methode der Ober- und Unterfunktionen in dem in Nr. 1 und Nr. 2 skizzierten einfachen Gedankengang, so führt dieselbe bei einem System von mindestens zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen nicht mehr allgemein zum Ziel*[16]).

[16]) Dies hat für das mit der Methode der Ober- und Unterfunktionen verwandte Verfahren von Peano (Anm. 13) schon Herr Ch.-J. de la Vallée Poussin ohne nähere Begründung behauptet: Ch.-J. de la Vallée Poussin, Mémoire sur l'intégration des équations différentielles, Mémoires couronnés et autres mémoires publiés par l'Académie Royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique **47** (1893), 82 S.

(Eingegangen am 28. Oktober 1926.)

Über die Darstellung von Punktfunktionen im n-dimensionalen euklidischen Raum durch Ebenenintegrale.

Von

Philomena Mader in Leipzig.

In einer Arbeit „über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integrale längs gewisser Mannigfaltigkeiten“ behandelt Herr J. Radon[1] die Aufgabe, eine Funktion

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

durch ihr Ebenenintegral $g(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, s)$ darzustellen, d. i. durch den Wert des Integrales

$$\int f(x)\, do$$

über die Ebene

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \ldots + \xi_n x_n = s$$

genommen.

Hierbei macht sich ein wesentlicher Unterschied zwischen gerader und ungerader Dimensionszahl n geltend. Während $f(x)$ für gerades n als $(n-1)$-ter Differentialquotient nach t des Mittelwertes von $g(\xi_\alpha, s)$ über die Tangentialebenen einer Kugel vom Radius t folgt, führt im Falle eines ungeraden n der $(n-2)$-te Differentialquotient nach t desselben Mittelwertes auf eine Abelsche Integralgleichung für $f(x)$.

Von anderer Seite her bemerkt G. E. Uhlenbeck[2]) denselben Unterschied zwischen gerader und ungerader Dimensionszahl. Bei der Verallgemeinerung einer von Lorentz für $n = 3$ gegebenen Integraldarstellung auf beliebige n gewinnt er für ungerade n eine der Radonschen Formel äqu

[1]) Ber. der math.-phys. Kl. d. sächs. Ges. d. Wiss., Sitzung vom 30. IV. 191 S. 262—277.

[2]) „Over een stelling van Lorentz“ usf. [„Physica“, Ned. Tijdschr. voor Natuu kunde, 5. Jg. (1925), S. 423—428.]

valente, begegnet aber bei Aufstellung einer analogen für gerade n Schwierigkeiten.

Er bemerkt die Verwandtschaft der Sachlage mit den Verhältnissen des Huygensschen Prinzips in n Dimensionen.

Und in der Tat läßt sich die Lösung der Aufgabe auf die von Tedone[3]) zuerst gegebene Lösung des Anfangswertproblems der Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}$$

zurückführen.

Man gewinnt so als eine Anwendung des Tedoneschen Resultates für ungerades n die von Radon und Uhlenbeck gegebene Formel wieder; darüber hinaus die ihr entsprechende, bisher noch nicht gegebene für gerades n.

Der Weg, auf welchem die Darstellung von f durch die Tedoneschen Formeln gelingt, besteht in einer Umformung derselben derart, daß die Lösung F der Wellengleichung durch Superposition von ebenen Wellen dargestellt erscheint, während bei Tedone F durch Superposition von Kugelwellen gebildet wird.

Unter Beachtung der von Herrn G. Herglotz[4]) gegebenen Darstellung des lösenden Kernes hyperbolischer Differentialgleichungen in n Dimensionen kommt man leicht zur Bildung der in Frage kommenden Integrale für ebene Wellen.

Sei

$$f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

eine überall im euklidischen R_n definierte reelle Funktion, die folgende Regularitätsbedingungen erfülle:

a) $f(x)$ sei stetig und n-mal stetig differenzierbar,

b) es gelte für den Betrag von $f(x)$

$$|f(x)| \leqq \frac{A}{r^{n+1}}, \qquad r = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \qquad A = \text{konst.}$$

Dann bilde man das Integral von $f(y)$ über die Ebene

$$Y \equiv y_1 \xi_1 + y_2 \xi_2 + \ldots + y_n \xi_n = s, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1, \tag{2}$$

also das Integral

$$g(\xi_a, s) = \int f(y)\, do_y, \tag{3}$$

---

[3]) Annali di Matematica, 3. Serie, 1 (1898).

[4]) Ber. d. math.-phys. Kl. d. sächs. Ges. d. Wiss., Sitzung vom 3. V. 1926, S. 41—74.

do_y das Oberflächenelement der Ebene Y. Wird dann

$$X \equiv x_1 \xi_1 + x_2 \xi_2 + \ldots + x_n \xi_n \tag{4}$$

gesetzt, so ist der Mittelwert der Ebenenintegrale für alle Tangentia ebenen der Kugel vom Radius $|s|$ und Mittelpunkt (x_a)

$$G(x_a, s) = \frac{1}{\omega_n} \int g(\xi_a, X + s)\, d\omega_\xi, \tag{5}$$

ω_n die Oberfläche, $d\omega_\xi$ das Oberflächenelement der n-dimensionalen Ei heitskugel $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \ldots + \xi_n^2 = 1$.

Mit dieser Funktion $G(x_a, s)$ stelle man hierauf die beiden Integra F_0 und F_1 her, welche im Falle eines geraden und ungeraden n in Fra kommen:

$$F_0(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_a, s) \lg |s - t|\, ds, \tag{6}$$

$$F_1(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x_a, s)\, \mathrm{sign}(s - t)\, ds. \tag{7}$$

Es folgen somit $F_0(x, t)$ und $F_1(x, t)$ allein aus der Kenntnis d Ebenenintegrales $g(\xi_a, s)$.

Weiterhin soll gezeigt werden, daß aus $F_0(x, t)$ und $F_1(x, t)$ d Funktion $f(x)$ als n-ter Differentialquotient von F_0 und F_1 für $t = 0$ folg und zwar wird im Falle eines geraden n F_0, im Falle eines ungeraden F_1 zu wählen sein.

Dazu soll der Zusammenhang von $F_0(x, t)$ und $F_1(x, t)$ mit der v Tedone gegebenen Lösung $F(x, t)$ des Anfangswertproblems der Welle gleichung

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 F}{\partial t^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} + \ldots + \dfrac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}, \\ F = 0, \quad D_t^1 F = F_t = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0 \end{cases} \tag{8}$$

aufgedeckt werden.

Beachtet man, daß die Integrationen nach do_y und ds zusammen ei Integration über den ganzen Raum geben:

$$do_y\, ds = dy = dy_1 \cdot dy_2 \cdot \ldots \cdot dy_n, \tag{9}$$

so gehen die Gleichungen (6) und (7) über in

$$F_0(x, t) = \frac{1}{\omega_n} \int d\omega_\xi \int f(y) \lg |Y - X - t|\, dy, \tag{10}$$

$$F_1(x, t) = \frac{1}{\omega_n} \int d\omega_\xi \int f(y)\, \mathrm{sign}(Y - X - t)\, dy, \tag{11}$$

wofür man auch weiter schreiben kann

$$F_0(x,t) = \int f(x+y)\, K_0(y,t)\, dy, \tag{12}$$

$$F_1(x,t) = \int f(x+y)\, K_1(y,t)\, dy \tag{13}$$

und

$$K_0(x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int \lg |X-t|\, d\omega_\xi, \tag{14}$$

$$K_1(x,t) = \frac{1}{\omega_n} \int \operatorname{sign}(X-t)\, d\omega_\xi. \tag{15}$$

Es handelt sich dann um die Berechnung von K_0 und K_1. Dreht man das Koordinatensystem so, daß die Ebene $X - t = 0$ übergeht in

$$X - t \equiv r\xi - t = 0, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \tag{16}$$

wobei ξ für eine der Koordinatenachsen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — etwa $\xi = \xi_n$ — steht, so erhält man aus Gleichung (14) und (15)

$$K_0(x,t) = \frac{1}{c_n} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \lg \left| \xi - \frac{t}{r} \right| d\xi + \lg r, \tag{17}$$

$$K_1(x,t) = \frac{1}{c_n} \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}} \operatorname{sign} r \left(\xi - \frac{t}{r} \right) d\xi, \tag{18}$$

$$c_n = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n} = \int_{-1}^{+1} (1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\, d\xi. \tag{19}$$

Zur Auswertung von (17) denke man in der komplexen ξ-Ebene die Funktion

$$h(\xi, u) = (\xi^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} \lg \frac{\xi - u}{\xi - u_0}. \tag{20}$$

Für gerades n werde $(\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}}$ eindeutig erklärt außerhalb des Schnittes $(-1, +1)$ durch

$$(\xi^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} \to \xi^{n-3} \quad \text{für} \quad \xi \to \infty, \tag{21}$$

und für $u_0 > 1$, reell werde $\lg \frac{\xi - u}{\xi - u_0}$ eindeutig erklärt außerhalb des Schnittes (u_0, u) durch

$$\lg \frac{\xi - u}{\xi - u_0} \to 0 \quad \text{für} \quad \xi \to \infty. \tag{22}$$

Führt man in der ξ-Ebene die beiden Schlitze (u_0, u), $(-1, +1)$, so liefert die Funktion $h(\xi, u)$, um die beiden Schlitze herumintegriert im Falle

$n \equiv 0, (2)$

$$(23)\qquad \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{\pi}\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\lg\frac{\xi-u}{\xi-u_0}\,d\xi + \int_{u_0}^{u}(\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi + Q_{n-2}(u) - Q_{n-2}(u_0) = 0,$$

wobei $Q_{n-2}(u)$ das Residuum von

$$(24)\qquad (\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\lg\left(1-\frac{u}{\xi}\right) \quad \text{für} \quad \xi=\infty,$$

also ein gerades Polynom in u vom Grade $(n-2)$ ist.

Läßt man jetzt u gegen reelle Werte gehen und beachtet

$$25)\qquad u_0-\xi>0, \quad \lg\frac{\xi-u}{\xi-u_0}=\lg\left|\frac{\xi-u}{\xi-u_0}\right| \pm \frac{\pi i}{2}(1+\operatorname{sign}(\xi-u))$$
$$\text{für } u=u\pm 0\,i,$$

so folgt aus dem Realteil von (23) für

$n \equiv 0, (2),$

$$(26)\qquad \varphi(u)=\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\lg|\xi-u|\,d\xi$$

gesetzt,

$$(27)\qquad -\varphi(u)=P_{n-2}(u), \qquad |u|<1,$$

$$(28)\qquad -\varphi(u)=P_{n-2}(u)+(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\pi\cdot\Theta(u), \qquad u>1,$$

wobei

$$(29)\qquad \Theta(u)=\int_{1}^{u}(\xi^2-1)^{\frac{n-3}{2}}\,d\xi,$$

$$(30)\qquad P_{n-2}(u)=(-1)^{\frac{n}{2}}\cdot\pi\cdot Q_{n-2}(u)+c$$

gesetzt wurde, und die Konstante c zu bestimmen ist durch

$$(31)\qquad \varphi(u)-c_n\lg u\to 0 \quad \text{für} \quad u\to\infty.$$

Im Falle eines ungeraden n gilt,

$$(32)\qquad \psi(u)=\int_{-1}^{+1}(1-\xi^2)^{\frac{n-3}{2}}\operatorname{sign}(\xi-u)\,d\xi$$

gesetzt, sofort

$$(33)\qquad \psi(u)=-c_n+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cdot 2\cdot\Theta(u), \qquad |u|<1,$$

$$(34)\qquad \psi(u)=-c_n\operatorname{sign}u, \qquad |u|>1,$$

wobei wiederum

$$\Theta(u) = \int_1^u (\xi^2 - 1)^{\frac{n-3}{2}} d\xi \tag{35}$$

ist.

Es ergeben sich danach aus den Gleichungen (28) und (33) für $K_0(x,t)$ und $K_1(x,t)$

$$K_0(x,t) = \frac{1}{c_n}\varphi\left(\frac{t}{r}\right) + \lg r, \tag{36}$$

$$K_1(x,t) = \frac{1}{c_n}\psi\left(\frac{t}{r}\right). \tag{37}$$

Nunmehr erhält man aus den Gleichungen (6) und (7) unter Beachtung von (36) und (37), falls

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = s^2 \tag{38}$$

gesetzt wird, und $M(x,s)$ den Mittelwert von f auf der Kugel vom Radius s und Mittelpunkt $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$$M(x,s) = \frac{1}{\omega_n \cdot s^{n-1}} \int f(x+y)\, do_y, \tag{39}$$

bedeutet, für

$n \equiv 0$, (2)

$$F_0(x,t) = \omega_{n-1} \int_0^\infty M(x,s)\left[\varphi\left(\frac{t}{s}\right) + c_n \lg s\right] s^{n-1}\, ds, \tag{40}$$

$n \equiv 1$, (2)

$$F_1(x,t) = \omega_{n-1} \int_0^\infty M(x,s)\,\psi\left(\frac{t}{s}\right) s^{n-1}\, ds. \tag{41}$$

Setzt man hier die Werte für $\varphi\left(\frac{t}{s}\right)$ und $\psi\left(\frac{t}{s}\right)$ aus (28) bzw. (33) ein, so folgt:

$n \equiv 0$, (2)

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} F_0(x,t) = (-1)^{\frac{n-2}{2}} \pi \int_0^t M(x,s)\,\Theta\left(\frac{t}{s}\right) s^{n-1}\, ds + \int_0^\infty M(x,s)\left[c_n \lg s - P_{n-2}\left(\frac{t}{s}\right)\right] s^{n-1}\, ds, \tag{42}$$

$n \equiv 1$, (2)

$$\frac{1}{\omega_{n-1}} F_1(x,t) = (-1)^{\frac{n-1}{2}} 2 \int_0^t M(x,s)\,\Theta\left(\frac{t}{s}\right) s^{n-1}\, ds + \int_0^\infty M(x,s)\left[(-1)^{\frac{n+1}{2}}\,\Theta\left(\frac{t}{s}\right) - c_n\right] s^{n-1}\, ds, \tag{43}$$

wobei die Integrale von 0 bis ∞ beide Male Polynome sind in t von Grade $(n-2)$.

Vergleicht man die so erhaltenen Werte für F_0 und F_1 mit de Tedoneschen Lösung F der Wellengleichung (8):

$$(44) \qquad (n-2)!\ F(x,t) = D_t^{n-2} \int_0^t M(x,s)(t^2-s^2)^{\frac{n-3}{2}} s\,ds,$$

so erkennt man, daß für

$n \equiv 0$, (2)

$$(45) \qquad F(x,t) = A \cdot D_t^{n-1} F_0(x,t), \qquad A = \frac{(-1)^{\frac{n-2}{2}}}{\pi (n-2)!\ \omega_{n-1}},$$

$n \equiv 1$, (2)

$$(46) \qquad F(x,t) = B \cdot D_t^{n-1} F_1(x,t), \qquad B = \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{2 (n-2)!\ \omega_{n-1}},$$

ist, so daß vermöge (8) für $f(x)$ gilt

$n \equiv 0$, (2)

$$(47) \qquad f(x) = A \cdot (D_t^n F_0(x,t))_{t=0},$$

$n \equiv 1$, (2)

$$(48) \qquad f(x) = B \cdot (D_t^n F_1(x,t))_{t=0}.$$

Hiernach erhält man $f(x)$ aus $g(\xi_\alpha, s)$ vermöge Gleichung (6) un (7). Gleichzeitig erscheint durch die Gleichungen (45) und (46) die Lösun des Anfangswertproblems der Wellengleichung auch durch Superpositio ebener Wellen dargestellt.

(Eingegangen am 25. November 1926.)

Untersuchungen über die Grundlagen der Funktionentheorie.

Von

Karl Szilárd in Raab ([Györ] Ungarn).

Einleitung.

In der vorliegenden Arbeit stelle ich mir die Frage: Welche allgemeinen Grundeigenschaften der analytischen Funktionen reichen hin, um die wesentlichen Sätze der Funktionentheorie beweisen zu können? Folgendes Beispiel soll erläutern, wie ich mir eine solche Untersuchung denke:

Es ist folgender Satz bekannt: „Wenn eine analytische Funktion $f(z)$ in der ganzen z-Ebene, auch im unendlich fernen Punkte regulär ist, so ist sie konstant." Dieser Satz wird in der Funktionentheorie mit Hilfe des Cauchyschen Integralsatzes bewiesen. Doch läßt sich der Beweis dieses Satzes allein mit Hilfe der folgenden vier Eigenschaften der Klasse A der analytischen Funktionen führen:

1. Der Definitionsbereich einer $f(z)$ der Klasse A ist ein Gebiet.

2. Alle $f(z) \equiv$ konst. gehören zu A.

3. Eine Funktion $f(z)$ von A ist in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches stetig.

4. Wenn $f(z) \not\equiv$ konst., so liefert sie in jeder Umgebung eines jeden Punktes z_0 ihres Definitionsbereiches *eine gebietstreue* Abbildung auf die Umgebung des entsprechenden Bildungspunktes $\zeta_0 = f(z_0)$.

Über die Frage nach den Verallgemeinerungen der Sätze der Funktionentheorie nenne ich insbesondere folgende Arbeiten:

1. E. Beltrami: Delle variabili complesse sopra une superficie qualunque. (Annali di Matematica, 2. Reihe, Bd. I.)

2. Serge Bernstein: Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard. (Comptes rendus Bd. 151, S. 636.)

(Bernstein beweist die Sätze von Liouville und Picard für ein Klasse von Funktionen, deren Realteil und Imaginärteil einem Syster von partiellen Differentialgleichungen genügen, welches das System de Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen als Spezialfall enthält.)

Bei der Ausarbeitung war mir außer der genannten Arbeit vo S. Bernstein das Buch von G. Julia: Leçons sur les fonctions uniforme à point singulier essentiel isolé (Collection Borel) sehr nützlich.

Ich möchte an dieser Stelle meinem Lehrer, Herrn Prof. Courant der mir dieses Thema zur Arbeit empfohlen und mich mit Ratschläge unterstützt hat, meinen Dank aussprechen.

§ 1.

Stetige Funktionen einer komplexen Veränderlichen[1]).

Ich will an einige bekannte Definitionen erinnern, die im folgende gebraucht werden.

Ein „Gebiet" ist eine ebene Punktmenge, die nur innere Punkte ha von denen je zwei sich durch einen Streckenzug verbinden lassen, d innerhalb der Punktmenge verläuft.

Ein „Bereich" ist eine ebene Punktmenge, die folgende drei Eige schaften hat:

1. Sie besitzt innere Punkte.

2. Das Innere der Punktmenge ist ein Gebiet.

3. Sie ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte ihrer innere Punkte.

Es sei a eine Konstante und $f(z)$ eine stetige Funktion von z, d für die Punkte einer orientierten Kurve Γ definiert ist. Auf Γ sei imm $f(z) \neq a$. Durchläuft der Punkt z die Kurve Γ, so ändert sich das A gument von $[f(z) - a]$ stetig um eine Zahl, die ich mit „$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - a]$ bezeichne. Ist Γ eine geschlossene Kurve, so ist sie ein ganzzahliges Vie faches von 2π.

Satz 1. *In einem Jordanschen Bereiche $\mathfrak{B}$ der z-Ebene sei d stetige Funktion $\zeta = f(z)$ definiert. Die Randkurve von $\mathfrak{B}$ heiße Γ. sei ein Wert, den $f(z)$ auf Γ nicht annimmt. Es sei außerdem*

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - a) \neq 0 .$$

---

[1]) In dieser Arbeit bedeutet z eine unabhängige komplexe Veränderliche, x ihr reellen, y ihren imaginären Bestandteil. Ich schreibe auch $z = (x, y)$.

$\zeta = f(z)$ bedeutet eine Funktion von z, im allgemeinen Sinne genommen. D reellen Teil von ζ bezeichne ich mit u, den imaginären Teil mit v. Es ist a $\zeta = (u, v)$ oder ausführlicher: $\zeta = [u(x, y), v(x, y)]$.

Behauptung. *Es gibt einen Punkt z_0 innerhalb $\mathfrak{B}$, so daß $f(z_0) = a$.*

Beweis. Wenn ein $\varepsilon > 0$ vorgegeben ist, so kann man $\mathfrak{B}$ in endlich viele Jordansche Bereiche $\mathfrak{B}^1, \mathfrak{B}^2, \mathfrak{B}^3, \ldots, \mathfrak{B}^q$ zerlegen, von denen ein jeder einen Durchmesser $< \varepsilon$ hat (Fig. 1). Ihre Begrenzungskurven seien $\Gamma^1, \Gamma^2, \Gamma^3, \ldots, \Gamma^q$. Wenn es auf irgendeiner dieser Kurven einen Punkt z_0 gibt, so daß $f(z_0) = a$, so ist der Beweis erbracht. Wenn nicht, so ist

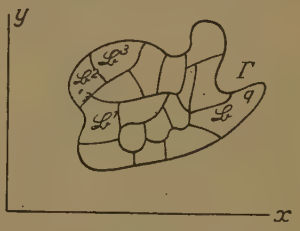


Fig. 1.

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - a] = \sum_{\nu=1}^{\nu=q} \mathrm{Var}_{\Gamma^\nu} \arg [f(z) - a].$$

Es gibt somit unter den Kurven Γ^ν wenigstens eine — sie heiße $\Gamma^{(1)}$ — so daß

$$\mathrm{Var}_{\Gamma^{(1)}} \arg [f(z) - a] \neq 0.$$

Jetzt verfahre man mit dem von $\Gamma^{(1)}$ begrenzten Bereich $\mathfrak{B}^{(1)}$ genau so, wie mit $\mathfrak{B}$, indem man ε durch $\frac{\varepsilon}{2}$ ersetzt usf. Entweder gelangt man so nach endlich vielen Schritten zu einer a-Stelle von $f(z)$ auf dem Rande eines der so gewonnenen Bereiche, oder man erhält eine unendliche Folge ineinandergeschachtelter Bereiche $\mathfrak{B}^{(\nu)}$ von der Höchstbreite $\frac{\varepsilon}{2^{\nu-1}}$, auf deren Berandung $\Gamma^{(\nu)}$ $f(z)$ von a verschieden ist und

$$\mathrm{Var}_{\Gamma^{(\nu)}} \arg [f(z) - a] \neq 0.$$

Offenbar ist dann in dem gemeinsamen Punkt z_0 aller dieser Bereiche $f(z_0) = a$.

Satz 2. *Es seien $f(z)$ und $\varphi(z)$ zwei in dem Jordanschen Bereiche $\mathfrak{B}$ stetige Funktionen und auf der Randkurve Γ*

$$|\varphi(z)| < |f(z)|.$$

Behauptung. $\mathrm{Var}_\Gamma \arg f(z) = \mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) + \varphi(z)]$. Der Beweis wird genau so geführt, wie der des Satzes von Rouché (siehe z. B. Goursat: Cours d'analyse Bd. II, S. 119).

Die vorangehenden Sätze gelten auch, wenn man statt Jordanscher Bereiche solche nimmt, die von endlich vielen Jordanschen Kurven begrenzt sind. (Zum Beweise zerlegt man sie in Jordansche Bereiche.)

§ 2.

Ich betrachte jetzt Funktionen $f(z)$ der komplexen Veränderlichen z, die folgende Eigenschaften haben.

I. *Der Definitionsbereich von $f(z)$ hat innere Punkte und $f(z)$ ist in diesen stetig.*

II. *Die Funktion $f(z)$ nimmt im Inneren ihres Definitionsbereich ihre Werte isoliert an.* (Daraus folgt, daß $f(z) \not\equiv$ konst.)

III. *Liegt z_0 im Innengebiet einer Jordanschen Kurve Γ, die m ihrem Innengebiete im Inneren des Definitionsbereiches liegt, so ist*

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - f(z_0)] > 0$$

wenn z die Kurve Γ im positiven Sinne einmal umläuft. (Auf Γ soll n türlich immer $f(z) \neq f(z_0)$ sein.)

Definition 1. Hat eine Funktion die Eigenschaften I, II und II so heiße sie eine *reguläre Funktion der Klasse Q* [2]).

z_0 sei ein Punkt, in dessen Umgebung $f(z)$ definiert ist. Wenn in ein Umgebung von z_0 $f(z)$ die Eigenschaften I, II, III hat, so heiße s eine *in z_0 reguläre Funktion der Klasse Q*. Liegt der Bereich $\mathfrak{B}$ ga im *Inneren* des Definitionsbereiches von $f(z)$, so sage ich: $f(z)$ ist ei *im Bereiche* $\mathfrak{B}$ reguläre Funktion der Klasse Q. Ich werde in diese § 2 statt „reguläre Funktion der Klasse Q" kurz „regulär" sagen, diese Redeweise hier kein Mißverständnis hervorruft.

Satz 1. *$\zeta = f(z)$ sei regulär in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ des Punktes z Ich behaupte; Das Bild $\mathfrak{U}_1$, das $\zeta = f(z)$ von dieser Umgebung entwir ist ein Gebiet in der ζ-Ebene.*

Beweis. In der z-Ebene beschreibe ich um z_0 einen beliebigen Kre der samt seinem Rande zu $\mathfrak{U}$ gehört, und auf dessen Peripherie Γ imm $f(z) \neq f(z_0)$ ist (s. II). Nach III ist dann $\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - f(z_0)] >$ Da $\zeta_0 = f(z_0)$ nicht auf Γ_1, dem Bilde von Γ liegt, so kann ich in d ζ-Ebene um ζ_0 einen Kreis schlagen derart, daß für alle ζ im Inner desselben

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta] = \mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] \neq 0$$

ist. Nach Satz 1 des Paragraphen 1 werden alle diese ζ von $f(z)$ im I neren des Kreises Γ angenommen. Der Punkt ζ_0 ist also ein inne Punkt der Menge $\mathfrak{U}_1$ der Bildpunkte. Ganz genau so sieht man, daß d Bild eines beliebigen Punktes von $\mathfrak{U}$ ein innerer Punkt von $\mathfrak{U}_1$ ist. besteht also aus lauter inneren Punkten. Mit Hilfe der Stetigkeit v $f(z)$ sieht man, daß je zwei Punkte von $\mathfrak{U}_1$ durch einen Streckenzug v bindbar sind, der *innerhalb* $\mathfrak{U}_1$ verläuft. $\mathfrak{U}_1$ ist also ein Gebiet, w. z. b.

Durch diesen Beweis ist auch der folgende Satz mitbewiesen: We $f(z)$ in einem Gebiete der z-Ebene regulär ist, so ist das (durch $f(z)$ e worfene) Bild dieses Gebietes ein Gebiet in der ζ-Ebene.

Satz 2. *Die Funktion $f(z)$ sei stetig in einer Umgebung $\mathfrak{U}$ d*

[2]) Nicht zu verwechseln mit dem Ausdruck „reguläre analytische Funktion".

Punktes z_0. Aus $\mathfrak{U}$ nehme ich z_0 heraus. In dem so erhaltenen Gebiete sei $f(z)$ regulär.

Ich behaupte: *$f(z)$ ist in z_0 und somit in $\mathfrak{U}$ regulär* [3]).

Beweis. Man denke sich in $\mathfrak{U}$ eine Jordansche Kurve Γ und einen inneren Punkt derselben z_1, so daß $f(z_1)$ auf Γ nicht angenommen wird. Es ist zu zeigen, daß $\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - f(z_1)] > 0$ ist (s. III).

Man kann annehmen, daß Γ nicht durch z_0 hindurchgeht und außerdem, daß $f(z_1) \neq f(z_0)$ ist. (Durch eine kleine Abänderung von Γ bzw. z_1, die den Wert des obigen Ausdrucks nicht ändert, kann man dies sicher erreichen.) Außerdem wird angenommen, daß z_0 im *Inneren* von Γ enthalten ist, da sonst der Satz in den Voraussetzungen enthalten ist. Nun denke man sich einen kleinen Kreis Λ um z_0 geschlagen, auf dem und in dessen Inneren $f(z) \neq f(z_1)$ ist. Jetzt verbinde man Γ und Λ durch einen zwischen diesen Kurven verlaufenden Weg, auf dem $f(z) \neq f(z_1)$ ist, und verstehe unter $-\Lambda + \Gamma$ den aus der positiv orientierten Kurve Γ und dem negativ umlaufenden Λ und dem zweimal in entgegengesetzter Richtung verlaufenden Verbindungsstücke bestehenden geschlossenen Weg. (Siehe Fig. 2.)

Fig. 2.

Nun ist

$$\mathrm{Var}_{-\Lambda+\Gamma} \arg [f(z) - f(z_1)] > 0$$

und

$$\mathrm{Var}_\Lambda \arg [f(z) - f(z_1)] = 0,$$

also

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - f(z_1)] = \mathrm{Var}_{\Gamma-\Lambda} + \mathrm{Var}_\Lambda > 0.$$

Um zu zeigen, daß $f(z)$ in $\mathfrak{U}$ auch die Eigenschaft II besitzt, brauche ich nur zu zeigen, daß der Wert $\zeta_0 = f(z_0)$ in der Umgebung von z_0 nur endlich oft angenommen wird.

Zum Beweise schlage ich um z_0 eine Kurve Γ und schätze die Anzahl der hineinfallenden ζ_0-Stellen ab. Zu diesem Zwecke mache ich um ζ_0 einen kleinen Kreis λ_0, der innerhalb Γ verläuft, und betrachte die außerhalb von λ_0 in Γ hineinfallenden ζ_0-Stellen $z_1, z_2, \ldots, z_k$. Auch um diese denke man sich kleine Kreise $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ geschlagen, die zusammen mit λ_0 sich paarweise ausschließen. Nun beweist man, wie in der Funktionentheorie beim Residuensatz:

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0] = \sum_{\nu=0}^{\nu=k} \mathrm{Var}_{\lambda_\nu} \arg [f(z) - \zeta_0] = A.$$

[3]) Bei gewöhnlichen analytischen Funktionen genügt die *Beschränktheit* von $f(z)$ in der Umgebung von z_0, was hier, wie ich mich durch ein Gegenbeispiel überzeugen konnte, nicht möglich ist.

Da nun die λ_ν wirklich ζ_0-Stellen enthalten, so sind die zugehörigen Va positive ganzzahlige Vielfache von 2π und somit

$$k+1 \leqq \frac{1}{2\pi} A,$$

und damit ist eine Schranke für die Anzahl der ζ_0-Stellen nach oben ge wonnen.

Definition 2. Der Wert $\zeta_0 = f(z_0)$ wird in z_0 *m-fach* angenommen wenn für alle Kreise Γ um z_0, die sonst keine ζ_0-Stellen enthalten,

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - f(z_0)] = 2m\pi.$$

Satz 3. *$\mathfrak{B}$ sei ein Bereich in der z-Ebene, in dessen Innerem un auf dessen Rande die Funktion $f(z)$ regulär ist. Der Rand A soll au einer endlichen Anzahl von Jordanschen Kurven bestehen, und auf ihne soll immer $f(z) + \zeta_0$ sein.*

Ich behaupte: *Die Anzahl der ζ_0-Stellen (die mehrfachen in der en sprechenden Vielfachheit gezählt) im Inneren von $\mathfrak{B}$ ist gleich*

$$\frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}_\Gamma \arg [f(z) - \zeta_0].$$

(A wird, wie immer, von z im positiven Sinne durchlaufen.)

Der Beweis wird so geführt wie der des Residuensatzes der Funk tionentheorie.

Definition 3. Aus einer Umgebung von z_0 nehme ich z_0 heraus. I dem so entstehenden Gebiete sei $f(z)$ regulär. In z_0 selbst sei $f(z)$ nich regulär, sondern es sei $\lim_{|z-z_0| \to 0} |f(z)| = \infty$. *$z_0$ heißt dann ein Pol von $f(z$*

Die Vielfachheit eines Pols z_0 soll folgendermaßen erklärt werde Man denke sich um z_0 eine Umgebung geschlagen, in der $f(z)$ von Nu verschieden bleibt. Nun bilde man $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ und setze $g(z_0) = 0$ Nach Satz 2 ist $g(z)$ in z_0 regulär, und wir definieren die Vielfachheit des Pols durch die Vielfachheit der Nullstelle z_0 von $g(z)$. Für ein z_0 umschließende Jordankurve Γ, in deren Innerem $f(z)$ von Null ver schieden bleibt, ist offenbar

$$\mathrm{Var}_\Gamma \arg f(z) = -2m\pi.$$

Satz 4. *Hat $f(z)$ auf dem Rande A des von endlich vielen Jordan schen Kurven begrenzten Bereiches $\mathfrak{B}$ keinen Pol und keine ζ_0-Stelle, un ist $f(z)$ in $\mathfrak{B}$, abgesehen von endlich vielen Polen, regulär, so ist*

$$M - P = \frac{1}{2\pi} \mathrm{Var}_A \arg [f(z) - \zeta_0],$$

wo M die Anzahl der ζ_0-Stellen, P die der Pole von $f(z)$ in $\mathfrak{B}$ bedeute

Beweis. Die Pole von $f(z)$ sind auch Pole der Funktion $f(z)-\zeta_0$, und wenn $f(z)$ die Eigenschaften I, II, III hat, so hat sie auch $f(z)-\zeta_0$, und der Beweis verläuft von nun an genau so wie in der Funktionentheorie.

Satz 5. *Ist auf dem Rande eines von endlich vielen Jordanschen Kurven begrenzten Bereiches überall*

$$|\varphi(z)|<|f(z)|,$$

sind ferner $f(z)$ und $\varphi(z)+f(z)$ in $\mathfrak{B}$ regulär, so haben $f(z)$ und $f(z)+\varphi(z)$ die gleiche Anzahl von Nullstellen in $\mathfrak{B}$.

Der Satz folgt unmittelbar aus Satz 2 des § 1 und aus Satz 3 dieses Paragraphen.

Satz 6. *$f(z)$ sei regulär in der ganzen endlichen z-Ebene und sei so beschaffen, daß $|f(z)|$ mit $|z|$ gegen Unendlich strebt (Pol im Unendlichen).*

Behauptung. *$f(z)$ nimmt alle Werte an, und zwar einen jeden gleich oft.* (Mehrfache Werte in der entsprechenden Vielfachheit gezählt.)

Beweis. Ich kann annehmen, daß $f(0)=0$ ist. Es sei nun ζ_0 ein beliebiger, von Null verschiedener Wert. Ich behaupte: Der Wert ζ_0 wird genau so oft angenommen wie der Wert 0.

Ich zeichne um den Nullpunkt der z-Ebene eine Kreislinie B, auf der und in deren Außengebiete $0<|\zeta_0|<|f(z)|$ ist. Alle Null- und ζ_0-Stellen von $f(z)$ liegen also im Innengebiete von B. Da auf B immer $0<|\zeta_0|<|f(z)|$ ist, und da $f(z)$ und $f(z)-\zeta_0$ überall regulär sind, so ist nach dem vorigen Satz 5 die Anzahl der Nullstellen von $f(z)$ im Innengebiete von B gleich der von $f(z)-\zeta_0$, d. h. gleich der Anzahl der ζ_0-Stellen von $f(z)$, w. z. b. w.

Satz 7. *$\zeta=f(z)$ sei in einem Jordanschen Bereiche $\mathfrak{B}$ stetig. In dem Gebiete, das aus den inneren Punkten von $\mathfrak{B}$ besteht, sei $f(z)$ regulär. Auf der Randkurve Γ des Bereiches soll die Abbildung, die diese Funktion vermittelt, umkehrbar eindeutig sein. (Hieraus folgt, daß das Bild des Randes Γ ebenfalls eine Jordankurve Γ_1 ist.)*

Behauptung: *$f(z)$ liefert eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{B}$ auf den Jordanschen Bereich in der ζ-Ebene der durch Γ_1 begrenzt ist.*

Der Beweis dieses Satzes wird mit Hilfe der Sätze 1 und 3 dieses Paragraphen in bekannter Weise geführt.

Die vorangehenden Sätze sind bekannt für die regulären analytischen Funktionen. (Betreffs der Sätze 3, 4, 5, 6 vgl. Goursat, Cours d'analyse 2, S. 117—119, betreffs des Satzes 7: Hurwitz-Courant, Funktionentheorie, S. 295.)

Daß es außer den regulären analytischen Funktionen noch andere Funktionen der Klasse Q gibt, zeigt folgendes Beispiel:

$f(z) = [u(x, y), v(x, y)]$, wo $u(x, y)$ und $v(x, y)$ in einem Gebiet definiert sind, stetige Ableitungen haben, und dort

$$\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \geqq 0$$

ist, wo das Gleichheitszeichen nur in isolierten Punkten gilt.

§ 3.

Kompakte Mengen stetiger Funktionen.

Definition 1. Es sei ein Gebiet $\mathfrak{G}$ in der z-Ebene gegeben. In diesem Gebiete seien gewisse stetige Funktionen $f(z)$ definiert[4]). Die Menge dieser Funktionen heißt kompakt, wenn sich aus jeder Folge von Funktionen der Menge eine Teilfolge auswählen läßt, die in jeder beschränkten abgeschlossenen Punktmenge in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert. Eine Konvergenz dieser Art soll im folgenden als gleichmäßige Konvergenz *innerhalb* des Gebietes bezeichnet werden. (Für solche Funktionenmengen findet man in der Literatur auch die Benennung: Normalfolge, Famille normale siehe: Julia, loc. cit.) Wenn ich von gleichmäßiger Konvergenz spreche, so nehme ich immer auch den Fall mit hinein, daß $f(z)$ gleichmäßig gegen die Konstante ∞ strebt.

Satz 1. *Ich nehme im Gebiete $\mathfrak{G}$ eine kompakte Menge stetiger Funktionen. Ich erweitere diese Menge, indem ich alle diejenigen Funktionen hinzunehme, die als Limes einer innerhalb $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergenten Folge aus ihnen erhalten werden können.*

Behauptung. *Die derart erweiterte Funktionenmenge ist ebenfalls kompakt und kann nicht mehr in derselben Art erweitert werden (d. h. wenn $f(z) = \lim_{\nu=\infty} f_\nu(z)$, wo die $f_\nu(z)$ zur erweiterten Menge gehören, so gehört $f(z)$ ebenfalls zu dieser Menge).*

Der einfache Beweis, den der Leser selbst durchführen möge, beruht auf der Möglichkeit, die Funktionen der erweiterten Menge durch solche der ursprünglichen Menge beliebig genau zu approximieren. (Beweise von Sätzen dieser Art finden sich vielfach in dem oben erwähnten Buche von G. Julia.)

Definition 2. Eine Menge von Funktionen, die im Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert sind, heißt abgeschlossen, wenn sie eine jede Funktion enthält, die

[4]) Sonst sollen in diesem Paragraphen die Funktionen keiner weiteren Bedingung unterworfen werden.

ls Limes einer Folge von Funktionen der Menge dargestellt werden kann, ie innerhalb $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert.

Der vorige Satz besagt also, daß, wenn man eine kompakte Menge on stetigen Funktionen durch die Limesfunktionen erweitert, man eine ompakte und abgeschlossene Menge erhält.

Satz 2. *$\mathfrak{A}$ sei eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge in er z-Ebene. In $\mathfrak{A}$ sei eine kompakte und abgeschlossene Menge E von tetigen Funktionen $\zeta = f(z)$ definiert.*

Ich behaupte: *Die Menge derjenigen Punkte ζ in der ζ-Ebene, die urch die Funktionen $f(z)$ der Menge E entworfene Bildpunkte von unkten z aus $\mathfrak{A}$ sind, ist eine abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{B}$.*

Beweis. Es sei ζ_0 irgendein Häufungspunkt von $\mathfrak{B}$, also Limes iner Punktfolge $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ usf. dieser Menge, und es sei $\zeta_\nu = f_\nu(z_\nu)$. Durch Übergang zu einer Teilfolge f_{α_ν} kann man erreichen, daß diese egen eine wohlbestimmte Grenzfunktion f_0 und gleichzeitig die z_{α_ν} gegen inen Punkt z_0 von $\mathfrak{A}$ konvergieren. Dann ist offenbar $\zeta_0 = f_0(z_0)$, und war sowohl im Falle einer endlichen Grenzfunktion wie auch bei $f_0(z) \equiv \infty$.

Aus diesem Satze 2 folgt der

Satz 3. *Gegeben sei eine kompakte Menge von Funktionen $f(z)$, ie in $\mathfrak{G}$ definiert sind. Die Konstante ∞ soll niemals als Limes einer eilfolge aus der Menge erhalten werden können.*

Ich behaupte: *Die Funktionen, die zu dieser Menge gehören, sind in eder abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{A}$ innerhalb $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beschränkt.*

Definition 3. Eine Menge von stetigen Funktionen heißt kompakt n einem Punkte z_0, wenn es um z_0 einen Kreis gibt derart, daß im Inneren desselben die Menge kompakt ist.

Satz 4. *$\mathfrak{G}$ sei ein Gebiet, in dessen Innerem unendlich viele stetige unktionen $f(z)$ definiert sind. Wenn die Menge dieser Funktionen in edem Punkte von $\mathfrak{G}$ kompakt ist, so ist sie kompakt in $\mathfrak{G}$.*

Der Beweis dieses Satzes findet sich in dem Buche von Julia: Fonc- ions uniformes, S. 56.

Kompakte Mengen regulärer analytischer Funktionen sind hauptsächlich von E. Montel betrachtet worden (Annales de l'École Normale Bd. 29, S. 487, 1912.) Der Ausdruck „kompakt" stammt von M. Fréchet Sur quelques points du calcul fonctionnel. Rendiconti di Palermo Bd. 22, . 6, 1906.)

§ 4.

Kompakte Mengen stetiger Funktionen, die gebietstreue Abbildunge vermitteln.

In diesem Paragraphen betrachte ich eine Klasse F von Funktione die in ihrem gemeinsamen Definitionsbereiche $\mathfrak{B}$ die folgenden vier Eige schaften haben:

I. Alle Funktionen $f(z)$ von F sind stetig.

II. Eine Funktion von F, $f(z) \not\equiv$ konst., liefert in jeder Umgebur eines jeden inneren Punktes z von $\mathfrak{B}$ eine gebietstreue Abbildung auf d Umgebung des Punktes $\zeta = f(z)$.

III. Die Funktionen von F bilden im Inneren von $\mathfrak{B}$ eine abg schlossene Menge.

IV. Die Menge F ist in $\mathfrak{B}$ kompakt.

Satz 1. *Die Funktionen von F mögen in $\mathfrak{B}$ nur Werte aus eine festen Bereiche $\mathfrak{B}_1$ annehmen und es sei in einem inneren Punkte z_0 v $\mathfrak{B}$ $f(z_0) = \zeta_0$, ebenfalls ein fester innerer Punkt von $\mathfrak{B}_1$.*

Ich behaupte: *Wenn $\mathfrak{C}$ ein Bereich ist, der innerhalb $\mathfrak{B}$ liegt und im Inneren enthält, so gibt es einen Bereich $\mathfrak{C}_1$ in der ζ-Ebene, d innerhalb $\mathfrak{B}_1$ liegt und ζ_0 im Inneren enthält, derart, daß die Bild von $\mathfrak{C}$ alle zu $\mathfrak{C}_1$ gehören. $\mathfrak{C}_1$ hängt nur von $\mathfrak{C}$ und F ab.*

Beweis. Nach § 3, Satz 2 und § 3, Satz 3 ist die Vereinigungsmeng $\mathfrak{C}'$ der Bilder von $\mathfrak{C}$, die von den verschiedenen Funktionen von F en worfen werden, eine abgeschlossene und beschränkte Menge. Wir wolle jetzt nachweisen, daß sie ganz im *Inneren* von $\mathfrak{B}_1$ liegt. Es sei ζ_1 irgen ein Punkt von $\mathfrak{C}'$, der von ζ_0 verschieden ist, und $f(z)$ eine Funktio die ihn in $z = z_1$ annimmt. Da $f(z)$ nicht konstant sein kann, so bild sie gebietstreu ab und somit ist ζ_1 kein Randpunkt von $\mathfrak{B}_1$. Der B weis, daß $\mathfrak{C}'$ ein Bereich ist, beruht auf dem mengentheoretischen Sat daß die Vereinigung von Bereichen mit einem gemeinsamen inneren Punk nach Hinzufügung der Häufungspunkte der Vereinigungsmenge ebenfal ein Bereich ist. Es kann also $\mathfrak{C}' = \mathfrak{C}_1$ gesetzt werden.

In derselben Weise wie der Satz 1 wird bewiesen

Satz 2. *Es möge die Folge $f_1(z), f_2(z), f_3(z) \ldots$ usf. innerhalb d Gebietes $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren:* $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(z) = f_0(z)$.

Die Werte $f_\nu(z)$, wo z alle inneren Werte aus $\mathfrak{G}$ und ν alle natü lichen Zahlen durchläuft, sollen zum Bereiche $\mathfrak{B}_1$ gehören. z_0 sei e fester innerer Punkt von $\mathfrak{G}$ und $\lim_{\nu=\infty} f_\nu(z_0) = \zeta_0 = f_0(z_0)$ *sei ein inner Punkt von $\mathfrak{B}_1$. Es soll niemals vorkommen, daß $f_\nu(z) \equiv \zeta_1$, wo ζ_1 e Wert auf dem Rande von $\mathfrak{B}_1$ ist.*

Behauptung. *Die Folge* $f_1(z), f_2(z), \ldots$ *usf. ist folgendermaßen beschaffen: Wenn* ν *alle natürlichen Zahlen und* z *alle Werte durchläuft, die zu einer festen abgeschlossenen Punktmenge innerhalb* $\mathfrak{G}$ *gehören, so ist die Menge der Punkte* $f_0(z)$ *und* $f_\nu(z)$ *abgeschlossen und liegt innerhalb* $\mathfrak{B}_1$.

§ 5.

Studium eines Typs von Funktionenklassen.

Ich will die bisherigen Betrachtungen zum Studium einer Klasse K von Funktionen $f(z)$ einer komplexen Veränderlichen z anwenden.

Eine solche Funktionenklasse K besitze folgende Eigenschaften:

I. *Eine Funktion* $f(z)$ *der Klasse K ist in einem Gebiete definiert.*

II. *Die Funktion* $f(z)$ *ist in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches stetig.*

III. *Die Funktionen* $f(z) \equiv$ konst. *gehören zu K.*

IV. *Wenn* $f(z) \not\equiv$ konst., *so nimmt es jeden Wert isoliert an.*

V. *Wenn* $f(z) \not\equiv$ konst., *so liefert es in jeder Umgebung eines jeden Punktes* z_0 *seines Definitionsbereiches eine gebietstreue Abbildung.*

VI. *Wenn* $f(z)$ *und* $g(z)$ *in demselben Gebiete* $\mathfrak{G}$ *definierte Funktionen von K sind, so sind* $f(z)+g(z)$ *und* $f(z)\cdot g(z)$ *ebenfalls in* $\mathfrak{G}$ *definierte Funktionen von K.*

VII. *Schränkt man den Definitionsbereich einer Funktion unserer Klasse ein, so erhält man wieder eine Funktion der Klasse.*

Satz 1. *Die Funktionen der Klasse K* $f(z)$ *und* $g(z)$ *seien in einem Gebiete definiert. Wenn sie in einer Menge von unendlich vielen Punkten, die innerhalb des Gebietes einen Häufungspunkt besitzt, übereinstimmen, so sind sie überhaupt identisch.*

Beweis. Nach III und VI gehört $g(z) - f(z) = \varphi(z)$ ebenfalls zu K, und da ihre Nullstellen im Inneren des Definitionsbereiches einen Häufungspunkt besitzen, so muß sie identisch verschwinden.

Aus Satz 1 folgt, daß wenn zwei Funktionen von K in einem noch so kleinen Gebiet übereinstimmen, daß sie dann notwendig in jedem Gebiete übereinstimmen müssen, das dieses kleine Gebiet enthält. Man kann also genau in entsprechendem Sinne wie in der gewöhnlichen Funktionentheorie von einer „K-Fortsetzung" reden.

Betreffs der Fortsetzung soll nun die Klasse K folgende Eigenschaft haben.

VIII. $\mathfrak{G}_1$ *und* $\mathfrak{G}_2$ *seien zwei Gebiete, die einen gemeinsamen Teil* $(\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2)$ *haben.* $f_1(z)$ *sei in* $\mathfrak{G}_1$ *und* $f_2(z)$ *sei in* $\mathfrak{G}_2$ *definiert. In jedem Punkte von* $(\mathfrak{G}_1 \cdot \mathfrak{G}_2)$ *sollen* $f_1(z)$ *und* $f_2(z)$ *gleich sein. Die eindeutige*

Funktion $\varphi(z)$ die in $\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{G}_2$ in der Weise definiert ist, daß sie in $\mathfrak{G}$ mit $f_1(z)$ und in $\mathfrak{G}_2$ mit $f_2(z)$ übereinstimmt, ist dann mit $f_1(z)$ und $f_2(z)$ eine Funktion von der Klasse K. Wenn ferner $f(z)$ eine Funktion von z ist, die in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert ist, und wenn innerhalb jedes Bereiches $\mathfrak{B}$, der im Inneren von $\mathfrak{G}$ liegt, $f(z)$ zu K gehört, so gehört $f(z)$ zu K in $\mathfrak{G}$.

Genau so wie in der Funktionentheorie kann man von hier aus den Begriff der „Fortsetzung längs einer Kurve" einführen und so zu mehrdeutigen K-Funktionen gelangen. Weiter fordern wir:

IX. *Wenn die Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$ ... usf. einer Klasse in demselben Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert sind und in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig gegen eine Funktion $f(z)$ konvergieren, so ist $f(z)$ auch eine in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion derselben Klasse K.*

X. *Es sei eine Menge M von Funktionen einer Klasse K gegeben, die in einem und demselben Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert sind. Wenn alle Funktionen der Menge in $\mathfrak{G}$ gleichmäßig beschränkt sind, so ist die Menge kompakt.*

Die regulären analytischen Funktionen bilden offenbar eine K-Klasse. Aus der Existenz dieser K-Klasse folgt, daß die angeführten zehn Eigenschaften einander nicht widersprechen.

Man bekommt neue K-Klassen, wenn man Funktionsmengen betrachtet, die die Eigenschaft haben, daß man eine genügend kleine Umgebung eines jeden Punktes $z = (x, y)$ so abbilden kann

$$X = X(x, y), \qquad Y = Y(x, y),$$

daß hierbei die Funktionen unserer Klasse in reguläre analytische Funktionen von $Z = (X, Y)$ übergehen. Dies kommt im wesentlichen auf Betrachtung von analytischen Funktionen auf Riemannschen Flächen hinaus.

Wenn bei einer solchen Transformation das Bogenelement

$$dX^2 + dY^2 \text{ gleich wird } C dx^2 - 2B dx dy + A dy^2$$

(wo die A, B und C Funktionen der reellen Variablen x und y sind), so verwandeln sich die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial X} = \frac{\partial v}{\partial Y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial Y} = -\frac{\partial v}{\partial X}$$

in

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \beta \frac{\partial v}{\partial x} + \gamma \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\alpha \frac{\partial v}{\partial x} - \beta \frac{\partial v}{\partial y}$$

mit

$$\alpha = \frac{A}{\sqrt{AC-B^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{AC-B^2}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sqrt{AC-B^2}},$$

so daß $\alpha\gamma - \beta^2 = 1$ ist.

Umgekehrt kann man stets ein Gleichungssystem von dieser Form auf die Gestalt der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen bringen. (Vgl. Picard, Traité d'analyse Bd. 1, S. 539, 2. Aufl.)

Die Funktionen einer K-Klasse haben die im vorigen Paragraphen vorausgesetzten Eigenschaften. Die dort angeführten Sätze können also benutzt werden und ebenso die Sätze von § 1 und § 3.

Satz 2. *Die Funktionen $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ usf. einer K-Klasse seien in demselben Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert. Sie sollen zu einer dort kompakten Menge von Funktionen gehören. Ferner sollen sie in unendlich vielen Punkten $z_1, z_2, z_3, \ldots$ usf. innerhalb $\mathfrak{G}$ konvergieren, wo die Punkte $z_1, z_2, z_3, \ldots$ usf. sich in wenigstens einem Punkte häufen, der innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt.*

Behauptung. *Die Folge $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ usf. konvergiert dann daselbst gleichmäßig gegen eine Funktion $f_0(z)$ der Klasse K.*

Beweis. Wenn die Folge nicht konvergent wäre, so könnte man wegen der Kompaktheit zwei gleichmäßig konvergente Teilfolgen mit *verschiedenen* Grenzfunktionen aus K bilden. Die Betrachtung der Differenz der letzteren ergäbe dann einen Widerspruch zu Satz 1. Die Gleichmäßigkeit der Konvergenz innerhalb $\mathfrak{G}$ folgt aus der sofort zu beweisenden Tatsache, daß man aus einer nicht gleichmäßig konvergenten Folge stets eine Teilfolge herausheben kann, die keine gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.

Satz 3. *Sind die im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierten Funktionen $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ usf. einer Klasse K gleichmäßig beschränkt und konvergieren sie in unendlich vielen Punkten von $\mathfrak{G}$, die sich in einem inneren Punkte von $\mathfrak{G}$ häufen, so konvergieren sie gleichmäßig innerhalb $\mathfrak{G}$ gegen eine Funktion $f_0(z)$ der Klasse K.* (Für die regulären-analytischen Funktionen ist dieser Satz unter dem Namen „Konvergenzsatz von Vitali-Porter“ bekannt.)

Beweis. Nach X. ist die Menge der betrachteten Funktionen kompakt. Aus Satz 2 folgt die Richtigkeit der Behauptung.

Satz 4. *Es mögen jetzt diejenigen Funktionen von K betrachtet werden, die im Bereiche $\mathfrak{B}$ definiert sind und von ihm Bilder entwerfen, die einem festen beschränkten Bereich $\mathfrak{B}_1$ angehören. Es sei außerdem für einen inneren Punkt z_0 von $\mathfrak{B}$ stets $f(z_0) = \zeta_0$ ebenfalls ein fester innerer Punkt von $\mathfrak{B}_1$.*

Behauptung. *Ist $\mathfrak{C}$ ein Bereich, der ganz innerhalb von $\mathfrak{B}$ lieg so gibt ss einen Bereich $\mathfrak{C}_1$ innerhalb $\mathfrak{B}_1$, der alle Bilder von $\mathfrak{C}$ enthäl*

Beweis. Nach X. ist die betrachtete Funktionenmenge kompak Die Richtigkeit der Behauptung folgt nun aus Satz 1, § 4.

Dieser Satz ist für reguläre analytische Funktionen bekannt. Ma beweist ihn gewöhnlich mit Hilfe des Schwarzschen Lemmas und de Riemannschen Abbildungssatzes. In der Theorie der regulären analyt schen Funktionen bekommt man bei diesem Beweise natürlich mehr, näm lich auch quantitative Beziehungen zwischen $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{C}_1$.

Ich will, wie in der Funktionentheorie, die Voraussetzungen de Sätze 3 und 4 abschwächen, indem ich von den dort vorkommende Funktionen statt der Beschränktheit nur fordere, daß sie zwei verschieden Werte a und b nicht annehmen sollen. Die so erhaltenen neuen Sätz werden dann die Verallgemeinerungen des Konvergenzsatzes von Landau Carathéodory und des Schottkyschen Satzes sei. Für diese Betrachtun ist der ausschlaggebende Satz der folgende:

Satz 5. *Die in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $f(z)$ gehöre zu K. D Werte $\zeta = f(z)$ sollen in ein Gebiet $\mathfrak{G}_1$ der ξ-Ebene fallen. In diese Gebiete $\mathfrak{G}_1$ sei die Funktion $F(\zeta)$ definiert; sie sei dort regulär-analytisc (d. h. eine differentiierbare Funktion von ζ).*

Behauptung. *Die in $\mathfrak{G}$ definierte Funktion $\varphi(z) = F[f(z)]$ i dann ebenfalls eine Funktion der Klasse K.*

Beweis. Ich beweise zunächst folgendes: z_1 sei ein Punkt in $\mathfrak{G}$ Um z_1 gibt es dann einen Kreis $\varkappa$ derart, daß im Inneren dieses Kreise die Funktion $F[f(z)]$ zu K gehört. Dies zeige ich so: Es sei $\zeta_1 = f(z_1)$ Um ζ_1 gibt es einen Kreis $\varkappa_1$, so, daß dort

$$F(\zeta) = a_0 + a_1(\zeta - \zeta_1) + a_2(\zeta - \zeta_1)^2 + \ldots \text{ usf.}$$

gilt, da $F(\zeta)$ eine reguläre analytische Funktion von ζ ist. Ich wähl $\varkappa_1$ so, daß diese Reihe dort gleichmäßig konvergiert. Wegen der Stetig keit von $f(z)$ gibt es um z_1 einen Kreis $\varkappa$ derart, daß für alle z, di innerhalb $\varkappa$ liegen, die Werte $\zeta = f(z)$ ins Innere von $\varkappa_1$ fallen. In $\varkappa$ ist als

$$\varphi(z) = F[f(z)] = a_0 + a_1[f(z) - \zeta_1] + a_2[f(z) - \zeta_1]^2 + \ldots \text{ usf.}$$

Nach III. und VI. gehören die Partialsummen dieser Reihe, die innerhal $\varkappa$ definiert sind, zur Klasse K. Sie konvergieren innerhalb $\varkappa$ gleich mäßig gegen $\varphi(z) = F[f(z)]$. Nach IX. gehört also $\varphi(z)$ innerhalb zur Klasse K. Nun ist die Funktion $F[f(z)]$ in $\mathfrak{G}$ eindeutig und kan aus $\varkappa$ hinaus in jeden Teil von $\mathfrak{G}$ eindeutig fortgesetzt werden (K-Fort setzung). Man sieht somit nach VIII., daß sie *in* $\mathfrak{G}$ eine Funktion de Klasse K ist, w. z. b. w.

Im folgenden ist der Monodromiesatz über die K-Fortsetzung von Vichtigkeit. Ich spreche ihn nur aus, beweise ihn aber nicht, da er genau o bewiesen werden kann, wie der entsprechende Satz der Funktionen-heorie. (Siehe z. B. Bieberbach, Funktionentheorie I, S. 217.)

Satz 6. Monodromiesatz: *$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet und z_1 ein innerer Punkt desselben. Um z_1 soll es einen Kreis geben, in dessen Innerem die Funktion $\varphi(z)$ zu K gehört, und es sei möglich, diese Funktion längs eines beliebigen Weges innerhalb $\mathfrak{G}$ K-fortzusetzen. Die so erhaltenen K-Fortsetzungen bilden dann eine in $\mathfrak{G}$ eindeutig definierte Funktion der Klasse K.*

Satz 7. *$\mathfrak{G}$ sei ein einfach zusammenhängendes Gebiet. In diesem Gebiete seien unendlich viele Funktionen der Klasse K definiert, die in $\mathfrak{G}$ die Werte 0 und 1 niemals annehmen.*

Behauptung. *Diese Funktionen bilden eine in $\mathfrak{G}$ kompakte Menge.*

Diesen Satz beweise ich so, wie Julia den entsprechenden Satz der Funktionentheorie in seinem Buch „Fonctions uniformes ..." (S. 74) beweist.

Beweis. Ich will zeigen, daß, wenn $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... usf. Funktionen aus der Menge sind, sich aus ihnen eine Teilfolge auswählen läßt, die in jeder abgeschlossenen Punktmenge, die innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt, gleichmäßig konvergiert. Ich betrachte dazu die Folge $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... usf. in einem jeden Punkte von $\mathfrak{G}$ und nehme zunächst an, daß es eine Stelle z_0 gibt, wo diese Folge einen von 0, 1 und ∞ verschiedenen Häufungspunkt α besitzt. Den Fall, wo kein solcher Punkt z_0 vorhanden ist, behandele ich später. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit nehme ich an, daß die f_ν in z_0 bereits gegen α konvergieren. $\tau(\zeta)$ sei die inverse Funktion der bekannten Modulfunktion, die das Innere des Einheitskreises auf die universelle Überlagerungsfläche der in 0, 1 und ∞ punktierten Ebene abbildet. (Siehe z. B. Hurwitz-Courant, Funktionentheorie S. 318.) Einer der Werte $\tau(\alpha)$ liegt im *Inneren* eines der Kreisbogenvierecke (Fig. 3) $ABCD$, ABD_1C, AD_2BC (klar). Sagen wir: in $ABCD$.

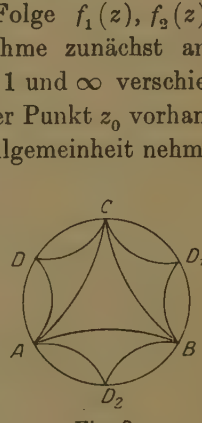


Fig. 3.

Ich betrachte nun eine Funktion $\tau[f_\nu(z)]$ in der Umgebung des Punktes z_0. In einem kleinen Kreise um z_0 ist sie gewiß nach Satz 5 eine bestimmte Funktion der Klasse K, wenn ich dabei noch den Wert $\tau[f_\nu(z_0)]$ festlege; er möge z. B. ins Viereck $ABCD$ fallen. Es ist nun klar, daß dann die Folge der Zahlen: $\tau[f_1(z_0)]$, $\tau[f_2(z_0)]$, $\tau[f_3(z_0)]$, ... gegen denjenigen Wert $\tau(\alpha)$ konvergiert, der *innerhalb* des Vierecks $ABCD$ liegt.

Da $f_\nu(z)$ immer $\neq 0$, $\neq 1$ und $\neq \infty$ ist, so kann ich $\tau[f_\nu(z)]$

längs eines beliebigen Weges, der von z_0 ausgeht, innerhalb $\mathfrak{G}$ fortsetze
Nach Satz 6 kann ich also für alle ν die Funktionen der Klasse
$\tau[f_\nu(z)]$ in $\mathfrak{G}$ eindeutig definieren.

Nun ist immer $|\tau[f_\nu(z)]| < 1$. Nach X. ist also die Menge d
Funktionen $\tau[f_\nu(z)]$ $(\nu = 1, 2, 3, \ldots)$ kompakt in $\mathfrak{G}$. Es läßt sich al
eine Teilfolge $\tau[f_{\nu_1}(z)]$, $\tau[f_{\nu_2}(z)]$, $\tau[f_{\nu_3}(z)]$, ... auswählen, die in
gegen eine Funktion der Klasse K $T(z)$ konvergiert, und zwar gleic
mäßig innerhalb $\mathfrak{G}$. Ich betrachte eine beliebige abgeschlossene Punk
menge $\mathfrak{M}$ innerhalb $\mathfrak{G}$, die z_0 enthält. Die Menge der Bildpunkte $T(z$
$\tau[f_{\nu_1}(z)]$, $\tau[f_{\nu_2}(z)]$, $\tau[f_{\nu_3}(z)]$, ..., wo z alle Punkte der abgeschlossen
Punktmenge $\mathfrak{M}$ durchläuft, ist nach § 4 Satz 2 ebenfalls eine abgeschlosse
Punktmenge $\mathfrak{M}'$, die *innerhalb* des Einheitskreises liegt. Mit Hilfe d
gleichmäßigen Stetigkeit der Modulfunktion in $\mathfrak{M}'$ konstatiert man sofo
die gleichmäßige Konvergenz der $f_{\nu_\nu}(z)$ in $\mathfrak{M}$ selbst.

Es ist noch der Fall übrig, wo für einen jeden Punkt z, der in
liegt, die Zahlenfolge $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z)$, ... keinen Häufungswe
$\alpha \neq 0, \neq 1$ und $\neq \infty$ zuläßt. Für z_0 sei zum Beispiel 1 ein Häufung
wert dieser Folge und ich setze ohne Einschränkung der Allgemeinhe
voraus, daß die Folge $f_1(z_0)$, $f_2(z_0)$, $f_3(z_0)$, ... gegen 1 konvergier
Nun betrachte ich die Funktionen $\log f_\nu(z)$, die ich eindeutig durch d
Forderung $-\pi < J \log f_\nu(z_0) \leqq \pi$ festlege. Nach Satz 5 sind es wied
K-Funktionen. Nun setze ich

$$g_\nu(z) = \frac{\log f_\nu(z) + 2\pi i}{4\pi i}$$

und erhalte so eine Folge von K-Funktionen, die dann offenbar wied
die Werte $0, 1, \infty$ auslassen und in z_0 gegen $\frac{1}{2}$ konvergieren. Durch A
wendung des erstgenannten Falles ergibt sich die Möglichkeit, eine gleic
mäßig konvergente Teilfolge $g_{n_1}(z)$, $g_{n_2}(z)$, $g_{n_3}(z)$, ... auszuwähle
der dann eine gleichmäßig konvergente Folge $f_{n_1}(z)$, $f_{n_2}(z)$, $f_{n_3}(z)$, ..
entspricht. (Man überlegt sich leicht, daß die Grenzfunktion identisc
gleich 1 ist.) Die beiden anderen Fälle erledigt man durch die Betrachtun
von $1 - f_\nu(z)$ bzw. $\frac{1}{f_\nu(z)}$. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Zusatz. *Wenn die Funktionen $f(z)$ der Klasse K, die in einer (nicht notwendig einfach zusammenhängenden) Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert sin dort niemals zwei Werte a und b $(a \neq b)$ annehmen, so ist die Meng dieser Funktionen in $\mathfrak{G}$ kompakt.*

Der Beweis wird mit Hilfe von III., VI., VII. und Satz 4, § geführt.

Mit Hilfe des Satzes 7 beweist man:

Folgerung 1. (*Verallgemeinerung des Schottkyschen Satzes*

$f(z)$ soll *alle* im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierten K-Funktionen durchlaufen, die dort von 0 und 1 verschieden sind und in einem festen Punkte z_0 von $\mathfrak{G}$ den festen Wert a annehmen.

Behauptung. In einer beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge, die innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt, sind alle diese Funktionen *gleichmäßig* beschränkt.

Folgerung 2. (*Verallgemeinerung des Konvergenzsatzes von Landau-Carathéodory.*) In einem Gebiete $\mathfrak{G}$ seien die Funktionen der Klasse K $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ definiert. Es sei für alle ν $f_\nu(z) \neq a$ und $f_\nu(z) \neq b$ $(a \neq b)$. Die Folge $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ soll für unendlich viele Zahlen $z_1, z_2, z_3 \ldots$ konvergieren. Die Zahlen $z_1, z_2, z_3, \ldots$ sollen einen Häufungswert *innerhalb* des Gebietes $\mathfrak{G}$ haben.

Behauptung. *Die Folge $f_1(z)$, $f_2(z)$, $f_3(z), \ldots$ usf. konvergiert gleichmäßig in jeder beschränkten und abgeschlossenen Punktmenge innerhalb $\mathfrak{G}$.*

Studium schlichter Funktionen einer K-Klasse.

Eine Funktion heißt schlicht, wenn sie in ihrem Definitionsbereiche ihre Werte nur einmal annimmt.

Hilfssatz 1. *$\mathfrak{G}$ sei ein Gebiet. $\mathfrak{M}$ sei die Punktmenge, die aus den Häufungspunkten von $\mathfrak{G}$ besteht. In $\mathfrak{M}$ sei eine unendliche Folge von Funktionen $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ definiert. Diese Funktionen seien in $\mathfrak{M}$ stetig und in $\mathfrak{G}$ sollen sie zur Klasse K gehören. Wenn die Folge $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ in der Menge der Randpunkte von $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergiert, aber nicht gegen unendlich, so konvergiert sie gleichmäßig auch in $\mathfrak{M}$.*

Die Richtigkeit dieses Satzes folgt daraus, daß die betrachteten Funktionen das Maximum ihres absoluten Betrages (wegen III. und V.) auf dem Rande von $\mathfrak{G}$ annehmen und aus VI.

Satz 8. *$\zeta = f(z)$ soll alle schlichten Funktionen der Klasse K durchlaufen, die in einem Gebiete $\mathfrak{G}$ definiert sind, für einen festen Punkt z_0 desselben den festen Wert a annehmen und immer ungleich b sind.*

Behauptung. *Die Menge dieser Funktionen ist kompakt.*

Beweis. Um z_0 schlage man einen kleinen Kreis, der innerhalb $\mathfrak{G}$ liegt. Die Menge derjenigen Punkte von $\mathfrak{G}$, die außerhalb dieses Kreises liegen, bezeichne man mit $\mathfrak{R}$. Man schlage ferner um z_0 einen größeren Kreis, der samt Fläche in $\mathfrak{G}$ liegt, so, daß dessen Peripherie k vollständig in $\mathfrak{R}$ hineinfällt. Da in $\mathfrak{R}$ die betrachteten Funktionen die Werte a, b und ∞ auslassen, so bilden sie eine dort kompakte Menge. Man kann also aus jeder Folge von Funktionen, die unseren Bedingungen genügen, eine innerhalb $\mathfrak{R}$ gleichmäßig konvergente Folge herausheben. Die Grenzfunktion kann nicht unendlich sein, da die Bilder, die unsere Funktionen

von k entwerfen, den Punkt a umschließen, den Punkt b dagegen nich und somit die Strecke $a-b$ passieren müssen. Nun kann man sofort a Grund des vorigen Hilfssatzes die gleichmäßige Konvergenz auch i Inneren von k schließen und somit im ganzen Gebiete $\mathfrak{G}$.

Satz 9. *$f(z)$ durchlaufe alle im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierten schlicht Funktionen einer Klasse K, die in einem festen inneren Punkte z_0 von den festen Wert a annehmen und irgendeinen Wert aus einer b schränkten Zahlenmenge $\mathfrak{Z}$ auslassen, die von a eine positive Entfernung ha*

Behauptung: Die Menge dieser Funktionen ist kompakt.

Zum Beweis bemerke man, daß die Menge der Funktionen

$$g(z)=\frac{f(z)-a}{b-a},$$

wo $f(z)$ eine unserer Funktionen und b ein Wert aus $\mathfrak{Z}$ ist, den die nicht annimmt, nach dem vorigen Satze kompakt ist, ferner, daß, wen man die Funktionen einer kompakten Menge mit Konstanten multiplizier deren absolute Beträge eine feste Schranke nicht übersteigen, man wied die Funktionen einer kompakten Menge erhält.

Hilfssatz 2. *In einem Gebiete $\mathfrak{G}$ sei eine Folge $f_1(z)$, $f_2(z$ $f_3(z), \ldots$ usf. schlichter Funktionen einer Klasse K definiert. Die Fol soll innerhalb $\mathfrak{G}$ gleichmäßig konvergieren.*

Behauptung: *Der Limes $f_0(z)$ der Folge ist ebenfalls eine schlich Funktion, oder aber $f_0(z)$ ist konstant.*

Der einfache Beweis dieses Satzes kann dem Leser überlassen werde

Satz 10. *Ich betrachte alle im Gebiete $\mathfrak{G}$ definierten schlicht Funktionen $f(z)$ einer Klasse K, die die Eigenschaften haben:*

1. *In einem festen inneren Punkte z_0 von $\mathfrak{G}$ ist $f(z)=a$, wo a ei feste Konstante ist.*

2. *In einer festen abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$, die innerhalb liegt, ist das Maximum von $|f(z)-a| \geqq M$, wo M eine feste posit Zahl ist.*

Behauptung. Es gibt einen von $\mathfrak{M}$, M, z_0, a und $\mathfrak{G}$ abhängig Kreisbereich um den Punkt a der $\zeta=f(z)$-Ebene, der von dem Bi das $f(z)$ von $\mathfrak{G}$ entwirft, stets vollständig überdeckt wird.

Beweis. Wir machen eine Fallunterscheidung.

Fall 1. Die Funktion $\varphi(z)=f(z)-a$ nimmt alle Werte vom a soluten Betrage 1 an.

Fall 2. $\varphi(z)=f(z)-a$ läßt einen Wert vom absoluten Betra 1 aus.

Im Falle 1 folgt aus der Schlichtheit, daß die Kreisscheibe mit dem Mittelpunkt a und mit dem Radius 1 vom Bild überdeckt wird.

Im Falle 2 ersieht man mit Hilfe des Satzes 9, daß wir es mit einer kompakten Funktionsmenge zu tun haben. Diese Funktionsmenge ist aber auch abgeschlossen, da wegen der zweiten Voraussetzung über unsere Funktionen der Hilfssatz 2 anwendbar ist und die Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Teilfolge der Funktionen $\varphi(z) = f(z) - a$ (wo die $f(z)$ die im Falle 2 betrachteten Funktionen sind) offenbar wieder einen Wert vom Betrage 1 auslassen muß. Betrachtet man also eine Kreislinie um den Punkt z_0, der samt ihrem Innengebiete in $\mathfrak{G}$ liegt, so zeigt der Satz 2, § 3, daß deren Bilder zusammengenommen eine beschränkte und abgeschlossene Punktmenge erfüllen. Wegen der Schlichtheit sind die Funktionen $f(z)$ auf dieser Kreislinie von a verschieden. Der Punkt a hat also von dieser Punktmenge eine positive Entfernung r. Ein Kreis um den Punkt a mit diesem Radius r wird wegen der Schlichtheit und wegen $f(z_0) = a$ durch das Bild von $\mathfrak{G}$ stets vollständig überdeckt.

Genau so wie diesen Satz kann man beweisen: $\mathfrak{G}$ sei ein Gebiet und z_1 und z_2 zwei verschiedene innere Punkte desselben. Ich betrachte alle schlichten Funktionen einer Klasse K, die in $\mathfrak{G}$ definiert sind und für z_1 den Wert a und für z_2 den Wert b $(\neq a)$ haben.

Behauptung: 1. Die Menge dieser Funktionen ist kompakt. 2. Um a gibt es einen Kreis λ_a und um b einen anderen Kreis λ_b derart, daß die Inneren dieser beiden Kreise durch die Bilder von $\mathfrak{G}$ immer vollständig überdeckt werden. Die Radien dieser Kreise hängen nur von $\mathfrak{G}$, z_1, z_2, a, b ab.

Literatur.

1. Beltrami, E.: Delle variabili complesse sopra una superficie qualunque (Annali di matematica, 2. Reihe, 1).

2. Bernstein, Serge: Sur une généralisation des théorèmes de Liouville et de M. Picard (Comptes rendus 151, S. 636).

3. Bieberbach: Funktionentheorie I.

4. Fréchet, M.: Sur quelques points du calcul fonctionnel (Rendiconti di Palermo 22, 1906).

5. Goursat, É.: Cours d'analyse 2, 2. Aufl.

6. Hurwitz-Courant: Funktionentheorie.

7. Julia, G.: Leçons sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé (Collection Borel).

8. Montel, P.: Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionelles dans un domaine (Annales de l'école normale 29).

9. Picard: Traité d'analyse 2, 2. Aufl.

(Eingegangen am 23. Oktober 1925.)

Über die Äquivalenz der Cesàroschen und der Hölderschen Mittel für Integrale bei gleicher reeller Ordnung $k > 0$.

Von

M. Jacob in Wien.

In der Reihentheorie ist es erst Hausdorff[1]), im Zusammenhang m seinen Untersuchungen über das Momentproblem, gelungen, die Höldersch Mittel auch für nichtganzzahlige Ordnungen zu definieren. Mit Hil dieser Methoden hat er sodann die Äquivalenz der C- und H-Mittel f jedes beliebige $k > -1$ beweisen können.

Viel einfacher gestaltet sich die Sachlage, wenn man die obe erwähnten Mittel für Integrale definiert. Sie zeichnen sich gegenüber d Betrachtungen in der Reihentheorie dadurch aus, daß man sowohl für d C-Mittel als auch für die H-Mittel übersichtliche Integraldarstellunge für jedes $k > 0$ findet. Diese Integraldarstellungen geben Anlaß zu zw parallelen Hilfssätzen (Lemma III und III′ dieser Arbeit). Der ers bezieht sich auf die C-Mittel und wurde von M. Riesz[2]) bewiesen. I spielt eine wesentliche Rolle beim Beweise des „second consisten theorem“ in der Theorie der Rieszschen Mittel[3]). Gerade durch d Studium dieses Theorems wurde ich angeregt, einen analogen Hilfssa für die H-Mittel zu beweisen. Auf Grund dieser Hilfssätze ist es da ohne Mühe möglich, den Beweis für die Äquivalenz der C- und H-Mittel f Integrale bei beliebigem $k > 0$ zu erbringen, wenn man die Hardy-Rieszsc Methode beim Beweise des erwähnten Theorems verwendet.

Das soll nun in den folgenden Zeilen dargelegt werden.

---

[1]) F. Hausdorff, Summationsmethoden und Momentfolgen, Math. Zeitschr. 9 (192 S. 74—109.

[2]) M. Riesz, Sur un théorème de la moyenne et ses applications, Acta litt. scien. univ. hung. 1 (1923), p. 114—126.

[3]) G. H. Hardy und M. Riesz, The general theory of Dirichlets series, Cambrid Tracts No. 18, p. 23—32.

§ 1.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Alle folgenden Überlegungen stützen sich auf den bekannten Grenzwertsatz von Toeplitz[4]):

Es sei $s(u)$ eine in $[a, \infty]$ meßbare, beschränkte Funktion. *Es entstehe* $S(u)$ *aus* $s(u)$ *durch die nachstehende Operation*:

1) $$S(x) = \int_a^x \varphi(x, u)\, s(u)\, du,$$

wo $\varphi(x, u)$ *für jedes* x *eine in* $[a, x]$ *integrierbare Funktion von* u *ist. Erfüllt dann der Kern* $\varphi(x, u)$ *die folgenden Bedingungen*:

I) $$\int_a^x |\varphi(x, u)|\, du < M \quad \text{für alle } x,$$

II) $$\lim_{x=\infty} \int_a^x \varphi(x, u)\, du = 1,$$

III) $\lim_{x=\infty} \varphi(x, u) = 0$ *gleichmäßig in jedem endlichen Intervalle* $a \leqq u \leqq y$,

so folgt aus der Existenz des Grenzwertes $\lim_{u=\infty} s(u) = s$, *daß auch der Grenzwert* $\lim_{u=\infty} S(u)$ *vorhanden ist und es ist*:

2) $$\lim_{u=\infty} S(u) = \lim_{u=\infty} s(u) = s.$$

Zusatz: *Ersetzt man die Bedingung* (II) *durch die folgende*:

II*) $$\lim_{x=\infty} \int_a^x \varphi(x, u)\, du = l,$$

so ist

2.1) $$\lim_{u=\infty} S(u) = l \cdot s, \quad \textit{sobald} \quad \lim_{u=\infty} s(u) = s.$$

Eine Operation mit den Bedingungen (I), (II*), (III) wollen wir wie üblich eine Toeplitztransformation nennen, mit den Bedingungen (I), (II), (III) als eine reguläre Transformation bezeichnen.

2. Definition der C-Mittel für Integrale[5]).

Es sei $s(u)$ eine in $[a, \infty]$ [6]) meßbare, in jedem endlichen Intervalle

---

[4]) O. Toeplitz, Prace mat. fiz. 22 (1912), p. 113; L. L. Silverman, Trans. Am. Math. Soc. 17 (1917), S. 284.

[5]) Die Definition der C-Mittel und die daran anschließenden Sätze findet man bei Hardy-Riesz, loc. cit. [3]) S. 23—32. Vgl. auch G. Doetsch, Eine neue Verallgemeinerung der Borelschen Summabilitätstheorie. Diss., Göttingen 1920.

[6]) Im folgenden wird a immer > 0 angenommen.

beschränkte Funktion. Alsdann definiert man das erste C-Mittel von $s(u)$ folgendermaßen:

$$C^{(1)}(x) = \frac{\sigma^{(1)}(x)}{x}, \qquad \sigma^{(1)}(x) = \int_a^x s(u)\,du. \tag{3}$$

Bildet man sukzessive:

$$\sigma^{(k)}(x) = \int_a^x \sigma^{(k-1)}(u)\,du, \qquad \begin{pmatrix}\sigma^{(0)}(u) = s(u)\\ k = 1, 2, \ldots\end{pmatrix} \tag{4}$$

so versteht man unter dem k-ten C-Mittel von $s(u)$ den folgende Ausdruck:

$$C^{(k)}(x) = \frac{\sigma^{(k)}(x)\cdot k!}{x^k}. \tag{5}$$

Die Formel (4) ist identisch mit der nachstehenden, wie man sich durch partielle Integration leicht überzeugen kann:

$$\sigma^{(k)}(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_a^x s(u)(x-u)^{k-1}\,du \tag{4.1}$$

und dadurch geht (5) über in:

$$C^{(k)}(x) = \frac{k}{x^k}\int_a^x s(u)(x-u)^{k-1}\,du. \tag{5.1}$$

Durch die Formeln (4.1) und (5.1) können wir die $\sigma^{(k)}(x)$ und $C^{(k)}(x)$ für alle reelle $k > 0$ erklären, indem wir $(k-1)!$ durch $\Gamma(k)$ ersetzen. Durch (5.1) wird offenbar für jedes $k > 0$ eine reguläre Transformation geliefert.

Wir erwähnen nun folgende bekannte Sätze[7]):

Lemma I. *Es sei r und $k > 0$, dann gilt:*

$$\sigma^{(r+k)}(x) = \sigma^{(r)}(\sigma^{(k)}(x)).$$

Lemma II. (Konsistenzsatz.) *Ist $\lim_{x=\infty} C^{(k)}(x) = g$ vorhanden, so ist $\lim_{x=\infty} C^{(k')}(x) = g$, sobald $k' > k$.*

Lemma III. (Satz von M. Riesz.) *Es sei $a \leqq \xi < x$ und $0 < k < 1$. Setzt man:*

$$g(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_a^\xi s(u)(x-u)^{k-1}\,du,$$

dann ist $g(x,\xi) = \sigma^{(k)}(\tau)$, wo $a \leqq \tau < \xi$.

---

[7]) Vgl. loc. cit. [2]), [3]), [5]).

Daraus folgt:

Lemma III. 1. *Es sei* $a \leqq \xi < x$ *und* $0 < k \leqq 1$, *dann gilt*:

$$\left| \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^{\xi} s(u)(x-u)^{k-1} du \right| \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq \xi} |\sigma^{(k)}(u)|.$$

Lemma III. 2. *Es sei* $a \leqq \xi \leqq x$, $0 < k \leqq 1$ *und* $r > 0$, *dann gilt*:

$$\left| \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^{\xi} \sigma^{(r)}(u)(x-u)^{k-1} du \right| \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq \xi} |\sigma^{(r+k)}(u)|.$$

3. Definition der Hölderschen Mittel für Integrale.

Es sei $s(u)$ wie vorher eine in $[a, \infty]$ meßbare, in jedem endlichen ntervalle beschränkte Funktion. Wir definieren das erste H-Mittel von (u) folgendermaßen:

6) $$H^{(1)}(x) = \frac{1}{x} \int_a^x s(u)\, du.$$

as Verfahren (6) kann man wiederholt anwenden.

7) $$H^{(k)}(x) = \frac{1}{x} \int_a^x H^{(k-1)}(u)\, du.$$

n der Weise gelangen wir zu den H-Mitteln immer höherer Ordnung.

7.1) $$H^{(k)}(x) = \frac{1}{x} \int_a^x \frac{1}{x_{k-1}} \int_a^{x_{k-1}} \dots \frac{1}{x_1} \int_a^{x_1} s(u)\, du\, dx_1 \dots dx_{k-1}$$

$$= \frac{1}{(k-1)!} \frac{1}{x} \int_a^x s(u)(\lg x - \lg u)^{k-1} du.$$

urch die letzte Formel (7.1) sind wir in der Lage die H-Mittel für eliebiges $k > 0$ zu erklären, indem wir $(k-1)!$ durch $\Gamma(k)$ ersetzen.

7.2) $$H^{(k)}(x) = \frac{1}{\Gamma(k) \cdot x} \int_a^x s(u)(\lg x - \lg u)^{k-1} du.$$

urch (7.2) ist offenbar eine reguläre Transformation für jedes $k > 0$ egeben.

Wir beweisen nun folgende Sätze:

Lemma I'. *Es sei* r *und* $k > 0$, *dann gilt*:

$$H^{(r+k)}(x) = H^{(r)}(H^{(k)}(x)).$$

Beweis.

$$H^{(r)}(H^{(k)}(x)) = \frac{1}{\Gamma(r)x}\int_a^x H^{(k)}(y)\,(\lg x - \lg y)^{r-1}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(k)}\,\frac{1}{x}\int_a^x \frac{1}{y}\int_a^y s(u)\left(\lg\frac{y}{u}\right)^{k-1}\left(\lg\frac{x}{y}\right)^{r-1}du\,dy.$$

Das letzte Doppelintegral ist absolut konvergent und nach dem Satze von Fubini ist bekanntlich die Integrationsfolge vertauschbar. Daher ist:

$$H^{(r)}(H^{(k)}(x)) = \frac{1}{\Gamma(r)\Gamma(k)}\,\frac{1}{x}\int_a^x s(u)\int_u^x \left(\lg\frac{y}{u}\right)^{k-1}\left(\lg\frac{x}{y}\right)^{r-1}\frac{dy}{y}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(r+k)}\,\frac{1}{x}\int_a^x s(u)\,(\lg x - \lg u)^{r+k-1}\,du = H^{(r+k)}(x),$$

w. z. b. w.

Lemma II′. (Konsistenzsatz.) *Existiert der Grenzwert* $\lim_{x=\infty} H^{(k)}(x) = g$, *so ist* $\lim_{x=\infty} H^{(k')}(x) = g$, *sobald* $k' > k$.

Diese letzte Behauptung folgt unmittelbar aus dem Lemma I′, da der Übergang von einem H-Mittel k-ter Ordnung zu einem H-Mittel nächst höherer Ordnung mit Hilfe einer H-Transformation vollzogen wird.

Bezeichnung: $\overline{H}^{(k)}(x) = x \cdot H^{(k)}(x)$.

Lemma III′. *Es sei* $a \leqq \xi < x$ *und* $0 < k < 1$. *Setzt man*:

$$\psi(x,\xi) = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_a^\xi s(u)\,(\lg x - \lg u)^{k-1}\,du,$$

dann ist:

$$\psi(x,\xi) = \overline{H}^{(k)}(\tau), \quad \text{wo} \quad a \leqq \tau < \xi.$$

Um dieses Lemma zu beweisen, zeigen wir zunächst, daß

$$\psi(x,\xi) = -\int_a^\xi \overline{H}^{(k)}(\nu)\,h'(\nu)\,d\nu, \tag{8}$$

wo

$$h(\nu) = (h(\nu,\xi,x)) = \frac{1}{\Gamma(k)\,\Gamma(1-k)}\int_\nu^\xi \left(\lg\frac{x}{t}\right)^{k-1}\left(\lg\frac{t}{\nu}\right)^{-k}\frac{dt}{t}. \tag{9}$$

Berücksichtigt man die nachstehende von ν und x unabhängige Formel

$$\frac{1}{\Gamma(k)\,\Gamma(1-k)}\int_\nu^x \left(\lg\frac{x}{t}\right)^{k-1}\left(\lg\frac{t}{\nu}\right)^{-k}\frac{dt}{t} = 1, \tag{10}$$

so geht (9) über in:

$$h(\nu) = 1 - \frac{1}{\Gamma(k)\,\Gamma(1-k)} \int_{\xi}^{x} \left(\lg \frac{x}{t}\right)^{k-1} \left(\lg \frac{t}{\nu}\right)^{-k} \frac{dt}{t}. \tag{9.1}$$

Das Integral auf der rechten Seite von (9.1) stellt eine in $[a, \xi]$ positive, monoton wachsende Funktion von ν dar, welche $\leqq 1$ ist; daher ist $h(\nu)$ in $[a, \xi]$ eine positive, monoton abnehmende Funktion, welche < 1 ist, sobald $\xi < x$ und die für $\nu = \xi$ verschwindet. Somit hat $h'(\nu)$ konstantes Vorzeichen und wird für $\nu = \xi$ unendlich von der Ordnung k. Das Integral auf der rechten Seite von (8) ist also absolut konvergent und es gilt nur seine Identität mit der linken Seite nachzuweisen.

$$-\int_{a}^{\xi} \overline{H}^{(k)}(\nu) h'(\nu)\, d\nu = -\frac{1}{\Gamma(k)} \int_{a}^{\xi} h'(\nu) \int_{a}^{\nu} s(u) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} du\, d\nu \tag{12}$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(k)} \int_{a}^{\xi} s(u) \int_{u}^{\xi} h'(\nu) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} d\nu\, du.$$

Nun ist[8]):

$$-\int_{u}^{\xi} h'(\nu) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} d\nu = \frac{u}{k} \frac{d}{du} \int_{u}^{\xi} h'(\nu) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k} d\nu. \tag{13}$$

Durch partielle Integration erhält man weiter:

$$\frac{u}{k} \frac{d}{du} \int_{u}^{\xi} h'(\nu) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k} d\nu = -u \frac{d}{du} \int_{u}^{\xi} h(\nu) \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} \frac{d\nu}{\nu} \tag{13.1}$$

$$= -\frac{u}{\Gamma(k)\,\Gamma(1-k)} \frac{d}{du} \left(\int_{u}^{\xi} \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} \int_{\nu}^{\xi} \left(\lg \frac{x}{t}\right)^{k-1} \left(\lg \frac{t}{\nu}\right)^{-k} \frac{dt}{t} \frac{d\nu}{\nu} \right)$$

$$= -\frac{u}{\Gamma(k)\,\Gamma(1-k)} \frac{d}{du} \left(\int_{u}^{\xi} \left(\lg \frac{x}{t}\right)^{k-1} \int_{u}^{t} \left(\lg \frac{\nu}{u}\right)^{k-1} \left(\lg \frac{t}{\nu}\right)^{-k} \frac{d\nu}{\nu} \frac{dt}{t} \right).$$

Dieser letzte Ausdruck reduziert sich auf:

$$(\lg x - \lg u)^{k-1},$$

wenn man die Formel (10) berücksichtigt.

Somit ist:

$$\psi(x, \xi) = -\int_{u}^{\xi} \overline{H}^{(k)}(\nu) h'(\nu)\, d\nu.$$

---

[8]) Bezüglich der Differentiation unter dem Integralzeichen vgl. z. B. Ch. J. de la Vallée-Poussin, Cours d'analyse 2, Kap. II (2. Aufl.).

Nach der früheren Bemerkung über die Funktion $h(\nu)$ kann man auf den vorstehenden Ausdruck den ersten Mittelwertsatz der Integralrechnung anwenden und man bekommt:

$$\psi(x,\xi) = \overline{H}^{(k)}(\tau')\cdot h(a), \quad \text{wo} \quad a \leqq \tau' \leqq \xi.$$

Bedenkt man, daß $\overline{H}^{(k)}(a) = 0$, daß $\overline{H}^{(k)}(u)$ eine stetige Funktion ist und daß $0 \leqq h(\nu) < 1$, sobald $\xi < x$, so folgt daraus nach Bolzano die Existenz einer Zahl τ $(a \leqq \tau < \tau')$, so daß

$$\psi(x,\xi) = \overline{H}^{(k)}(\tau), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Daraus folgt:

Lemma III′. 1. *Es sei* $a \leqq \xi \leqq x$ *und* $0 < k \leqq 1$, *dann gilt*:

$$\left| \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^{\xi} s(u)(\lg x - \lg u)^{k-1}\, du \right| \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq \xi} |\overline{H}^{(k)}(u)|.$$

Lemma III′. 2. *Es sei* $a \leqq \xi \leqq x$, $0 < k \leqq 1$ *und* $r > 0$, *dann gilt*:

$$\left| \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^{\xi} H^{(r)}(u)(\lg x - \lg u)^{k-1}\, du \right| \leqq \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq \xi} |\overline{H}^{(k+r)}(u)|.$$

§ 2.
Beweis des Äquivalenzsatzes.

Für den Fall der ganzzahligen Ordnungen ist der Satz bekannt[9]. Wir beschränken uns daher auf den Fall der nichtganzzahligen Ordnungen $k > 0$.

A. Voraussetzung: $H^{(k)}(x) \to g$.
Behauptung: $C^{(k)}(x) \to g$.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir im folgenden $g = 0$ an.

Fall 1. $0 < k < 1$. Es ist zu beweisen, daß

$$\left| \frac{1}{\Gamma(k)} \int_a^{x} s(u)(x-u)^{k-1}\, du \right| = o(x^k). \tag{14}$$

Aus der Voraussetzung $H^{(k)}(x) \to 0$, folgt nach dem Lemma II′, daß $H^{(1)}(x) \to 0$. Man kann daher zu jedem $\varepsilon > 0$ ein ν so wählen, daß

$$|H^{(k)}(x)| < \varepsilon \quad \text{und} \quad |H^{(1)}(x)| < \varepsilon, \quad \text{sobald } x \geqq \nu. \tag{15}$$

[9]) E. Landau, Die Identität des Cesàroschen und Hölderschen Grenzwerts für Integrale. Leipziger Berichte **65** (1913). — M. Watanabe, On the identity of Cesàro and Hölder's limits. Tôhoku Journ. **5** (1914), S. 21–28. — L. L. Silverman, The equivalence of certain regular transformations, Trans. Am. Math. Soc. **26** (1924), S. 101–11

Wir wählen sodann in (14) $x > 3\nu$ und teilen das Integrationsintervall $a, x]$ in drei Teile:

16) $$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_a^x s(u)(x-u)^{k-1}\,du = \int_a^{\nu} + \int_{\nu}^{x/3} + \int_{x/3}^{x} = v_1 + v_2 + v_3.$$

α) $$|v_1| = \left|\frac{1}{\Gamma(k)}\int_a^{\nu} s(u)(x-u)^{k-1}\,du\right|$$

$$\leqq Mx^k \cdot \frac{1}{x}\int_a^{\nu}\left(1-\frac{u}{x}\right)^{k-1} du = o(x^k)$$

$(M = \text{Max von } |s(u)| \text{ in } [a, \nu]).$

β) Durch partielle Integration erhält man:

$$v_2 = \frac{1}{\Gamma(k)}\left[\overline{H}^{(1)}(u)(x-u)^{k-1}\right]_{\nu}^{x/3} + \frac{1}{\Gamma(k-1)}\int_{\nu}^{x/3}\overline{H}^{(1)}(u)(x-u)^{k-2}\,du.$$

Wegen (14) ist:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(k)}\left[\overline{H}^{(1)}(u)(x-u)^{k-1}\right]_{\nu}^{x/3}\right|$$

$$= \left|\frac{1}{\Gamma(k)}H^{(1)}\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{x}{3}:\left(\frac{2x}{3}\right)^{k-1} - \frac{1}{\Gamma(k)}H^{(1)}(\nu)\nu(x-\nu)^{k-1}\right| = o(x^k),$$

$$\frac{1}{\Gamma(k-1)}\int_{\nu}^{x/3} H^{(1)}(u)\cdot u\cdot(x-u)^{k-2}\,du\Bigg| < \varepsilon\left\{\frac{1}{\Gamma(k-1)}\int_{\nu}^{x/3} u(x-u)^{k-2}\,du\right\}$$

$$= o(x^k).$$

Somit ist: $|v_2| = o(x^k)$.

γ) $$v_3 = \frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x/3}^{x} s(u)(x-u)^{k-1}\,du$$

$$= \frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x/3}^{x} s(u)(\lg x - \lg u)^{k-1}\left(\frac{x-u}{\lg x - \lg u}\right)^{k-1} du.$$

Nun ist leicht einzusehen: $\left(\frac{x-u}{\lg x - \lg u}\right)^{k-1} = x^{k-1}\cdot\lambda(x,u)$, wo $\lambda(x,u)$ ne in $\left[\frac{x}{3}, x\right]$ positive, monoton abnehmende, für alle x beschränkte unktion von u ist, d. h. $\lambda(x,u) < K$.

$$v_3 = \frac{1}{\Gamma(k)}\cdot x^{k-1}\int_{x/3}^{x} s(u)(\lg x - \lg u)^{k-1}\lambda(x,u)\,du.$$

Nach dem zweiten Mittelwertsatze ist also:

$$\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x/3}^{x} s(u)\left(\lg\frac{x}{u}\right)^{k-1}\lambda(x,u)\,du = \lambda\left(x,\frac{x}{3}\right)\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x/3}^{\xi} s(u)\left(\lg\frac{x}{u}\right)^{k-1}du$$
$$\left(\frac{x}{3}\leqq\xi\leqq x\right).$$

Nach dem Lemma III'. 1 ist:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{x/3}^{\xi} s(u)\left(\lg\frac{x}{u}\right)^{k-1}du\right| \leqq 2\operatorname*{Max}_{a\leqq u\leqq\xi}|\overline{H}^{(k)}(u)|$$

und somit:

$$|v_3|\leqq 2K\cdot x^{k-1}\operatorname*{Max}_{a\leqq u\leqq\xi}|\overline{H}^{(k)}(u)|.$$

Da aber:

$$\operatorname*{Max}_{a\leqq u\leqq\xi}|\overline{H}^{k}(u)|\leqq\operatorname*{Max}_{a\leqq u\leqq\nu}|\overline{H}^{(k)}(u)|+\operatorname*{Max}_{\nu\leqq u\leqq\xi}|\overline{H}^{(k)}(u)| = M_1+M_2,$$

so ist:

$$|v_3|\leqq x^k\left\{\frac{2KM_1}{x}+\frac{2KM_2}{x}\right\}.$$

M_1 ist eine feste Zahl und somit konvergiert $\frac{2KM_1}{x}$ mit wachsendem x gegen Null. Nach (14) ist aber $M_2<\varepsilon\xi$, sobald $\xi\geqq\nu$ und somit ist:

$$|v_3|\leqq x^k\left\{O\left(\frac{1}{x}\right)+o(1)\right\}=o(x^k).$$

Daraus folgt:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(k)}\int_{a}^{x} s(u)(x-u)^{k-1}du\right|\leqq|v_1|+|v_2|+|v_3|=o(x^k),$$

w. z. b. w.

Fall 2. $k'>1$. Es sei $k'=k+r$, wo $k=[k']$ und $0<r<1$.[10] Es ist zu beweisen:

$$\left|\frac{k+r}{x^{k+r}}\int_{a}^{x} s(u)(x-u)^{k+r-1}du\right|=o(1). \tag{16}$$

Wendet man auf das vorstehende Integral partielle Integration an, so bekommt man die zu beweisende Beziehung:

$$\left|\frac{(-1)^k(k+r)}{x^{k+r}}\int_{a}^{x} H^{(k)}(u)\,E_{(k)}\{(x-u)^{k+r-1}\}\,du\right|=o(1), \tag{16.1}$$

[10]) Setzt man $0<r\leqq 1$, so erhält man aus dem folgenden offenbar einen direkten Beweis von A für alle ganzzahligen Ordnungen.

wo in (16.1) die Operation $E_{(k)}$ folgendermaßen definiert ist:

$$E_{(0)}(v(u)) = v(u), \quad E_{(k)}(v(u)) = u \cdot E'_{(k-1)}(v(u)).$$

Somit ist:

$$E_{(k)}\{(x-u)^{k+r-1}\}$$
$$= (-1)^k e_k u^k (x-u)^{r-1} + \sum_{\varrho=1}^{k-1} (-1)^\varrho e_\varrho u^\varrho (x-u)^{k+r-1-\varrho}$$

(die e_ϱ sind positive, reelle Zahlen).

Dadurch geht (16.1) über in die zu beweisende Formel:

$$(16.2) \quad \left| \frac{e_k (k+r)}{x^{k+r}} \int_a^x H^{(k)}(u) u^k (x-u)^{r-1} du \right.$$
$$\left. + \sum_{\varrho=1}^{k-1} (-1)^{\varrho+k} \frac{e_\varrho (k+r)}{x^{k+r}} \int_a^x H^{(k)}(u) u^\varrho (x-u)^{k+r-1-\varrho} du \right| = o(1).$$

Was nun die Summenausdrücke in (16.2) anbelangt, so bekommt man durch partielle Integration eines jeden Ausdrucks folgende Summe:

$$(17) \quad \sum_{\varrho=1}^{k-1} A_\varrho \frac{1}{x^{k+r}} \int_a^x H^{(k+1)}(u) u^\varrho (x-u)^{r+k-1-\varrho} du$$

Dabei sind A_ϱ reelle Zahlen.

Nach dem Lemma II′ ist nun $H^{(k+1)}(x) \to 0$ und somit konvergieren alle Integrale in (17) mit wachsendem x gegen Null, da sie alle Toeplitztransformationen darstellen.

Es bleibt noch übrig, das erste Integral mit (16.2) abzuschätzen. Aus der Voraussetzung $H^{(k+r)}(x) \to 0$, d. h. aus

$$\frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{x} \int_a^x H^{(k)}(u) (\lg x - \lg u)^{r-1} du \to 0$$

folgt nach den Überlegungen des Falles 1:

$$(18) \quad \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \int_a^x H^{(k)}(u) (x-u)^{r-1} du \right| = o(x^r), \text{ d. h. } |o^{(r)}(H^{(k)}(x))| = o(x^r).$$

Es bleibt also nachzuweisen, daß aus (18):

$$(19) \quad \left| \frac{1}{\Gamma(r)} \frac{1}{x^r} \int_a^x H^{(k)}(u) (x-u)^{r-1} \left(\frac{u}{x}\right)^k du \right| = o(1)$$

folgt.

Wir wählen ein ν so, daß $|\sigma^{(r)}(H^{(k)}(x))| < \varepsilon \cdot x^r$, sobald $x \geqq \nu$ und erhalten nach dem zweiten Mittelwertsatze:

$$\int_a^x H^{(k)}(u)(x-u)^{r-1}\left(\frac{u}{x}\right)^k du = \int_\xi^x H^{(k)}(u)(x-u)^{r-1}\,du \quad (a \leqq \xi \leqq x)$$

Nach dem Lemma III'. 1 ist

$$\left|\frac{1}{\Gamma(r)}\int_\xi^x H^{(k)}(u)(x-u)^{r-1}du\right| \leqq 2 \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq x} |\sigma^{(r)}(H^{(k)}(u))|$$

und somit:

$$\left|\frac{1}{\Gamma(r)}\frac{1}{x^r}\int_a^x H^{(k)}(u)(x-u)^{r-1}\left(\frac{u}{x}\right)^k du\right| \leqq$$

$$\leqq \frac{1}{x^r}\left\{2 \operatorname*{Max}_{a \leqq u \leqq \nu} |\sigma^{(r)} H^{(k)}(u))| + 2 \operatorname*{Max}_{\nu \leqq u \leqq x} |\sigma^{(r)}(H^{(k)}(u))|\right\}$$

$$= O\left(\frac{1}{x^r}\right) + o(1) = o(1), \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Hiermit ist die erste Hälfte des Äquivalenzsatzes vollständig bewiesen: *Immer, wenn der Grenzwert* $\lim_{x=\infty} H^{(k)}(x) = g$ *vorhanden ist, so konvergiert auch* $\lim_{x=\infty} C^{(k)}(x)$ *gegen denselben Grenzwert für jedes* $k > 0$.

Es erübrigt sich noch die Umkehrung des obigen Satzes zu beweisen. Wir gehen aber darauf nicht ein, da der Beweis genau so geführt wird wie oben. Insbesondere ist dieser sofort aus dem Beweise des „second consistency theorem“ [11]) abzulesen, wenn man dort die Voraussetzungen entsprechend modifiziert.

---

[11]) Vgl. loc. cit. [3]) S. 23—32.

(Eingegangen am 2. August 1925.)

Rotationsflächen zweiter Ordnung als Träger kubischer Parabeln eines Strahlengewindes.

Von

Karl Mayrhofer in Wien.

Nachdem M. Chasles bemerkt hatte, daß die Zuordnung zwischen den Punkten und den zugehörigen Schmiegebenen eines kubischen Kegelschnittes eine Korrelation bildet, und K. G. Chr. v. Staudt gezeigt hatte, wie man zu einem beliebigen kubischen Kegelschnitte das Gewinde finden kann, dem diese Kurve als Ordnungskurve angehört, löste M. P. Appell die Aufgabe, die kubischen Kegelschnitte eines gegebenen Gewindes zu berechnen[1]); ferner weiß man, daß die kubischen Kegelschnitte auf gewissen Rotationsflächen zweiter Ordnung liegen[2]). Es wäre nun wissenswert, wie bei gegebenem Gewinde die Rotationsflächen zweiter Ordnung im Raume verteilt sind, die Träger der kubischen Kegelschnitte dieses Gewindes sind. Geometrisch übersichtliche Ergebnisse scheint nur der Fall der kubischen Parabel zu ergeben, was hier kurz mitgeteilt werden soll.

Eine kubische Parabel kann bei Anwendung geeigneter Parameter in kartesischen Koordinaten durch die Gleichungen

$$1) \qquad \begin{cases} x = a_{11}\lambda^3 + a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda + a_{14}, \\ y = a_{21}\lambda^3 + a_{22}\lambda^2 + a_{23}\lambda + a_{24}, \\ z = a_{31}\lambda^3 + a_{32}\lambda^2 + a_{33}\lambda + a_{34} \end{cases}$$

mit

$$2) \qquad |a_{r1}\, a_{r2}\, a_{r3}| \neq 0$$

[1]) M. Chasles, Comptes Rendus 45 (1857), S. 196, Satz 48; K. G. Chr. v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage 3 (1860), S. 313; M. P. Appell, Annales scientiques de l'École normale superieure (2) 5 (1876), S. 245 ff.

[2]) O. Staude, Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte, (1913), 13, 2; § 15.

dargestellt werden[3]). Sollen ihre Tangenten dem allgemeinen Strahlen gewinde

$$p_{12} + k p_{34} = 0 \qquad (k \neq 0) \tag{3}$$

angehören, wo die p_{rs} rechtwinklige Plückersche Linienkoordinaten sind[4]) so müssen die Gleichungen (1) der Pfaffschen Differentialgleichung

$$y\,dx - x\,dy + k\,dz = 0 \tag{4}$$

genügen[5]); die Achse des Gewindes (3) liegt in der Z-Achse. Setzt man

$$A_{rs} = \begin{vmatrix} a_{1r} & a_{1s} \\ a_{2r} & a_{2s} \end{vmatrix},$$

so findet man: Eine kubische Parabel des Gewindes (3) hat als Gleichungen

$$\begin{cases} x = a_{12}\lambda^2 + a_{13}\lambda + a_{14}, \\ y = a_{22}\lambda^2 + a_{23}\lambda + a_{24}, \\ z = -\frac{A_{23}}{3k}\lambda^3 - \frac{A_{24}}{k}\lambda^2 - \frac{A_{34}}{k}\lambda + a_{34}, \end{cases} \tag{5}$$

wo die a_{rs} nur der Einschränkung

$$A_{23} \neq 0 \tag{6}$$

unterliegen. Es gibt also ∞^7 kubische Parabeln, die einem allgemeinen Gewinde angehören. Zur Probe überzeugt man sich, daß die Kurvenschar (5) die Gruppe der Schraubungen um die Gewindeachse gestattet und daß die Torsion in einem Kurvenpunkte, der von der Gewindeachse die Entfernung r hat, bei geeigneter Vorzeichenwahl für jede Kurve den Wert

$$\frac{k}{r^2 + k^2}$$

besitzt[6]).

Nach der Art der durch die Raumkurve dritter Ordnung überhaupt hindurchgehenden Flächen zweiter Ordnung kommen für die kubische Parabel von Rotationsflächen nur das einschalige Rotationshyperboloid und der Rotationskegel in Frage; (der nur analytisch den Rotationsflächen be-

---

[3]) [2]) § 4, (1), (2), 8.

[4]) Betreffs Bezeichnung der Linienkoordinaten s. O. Staude, Analytische Geometrie des Punktes, der geraden Linie und der Ebene, (1905), § 48, (3′).

[5]) Zur Berechnung von (4) s. O. Staude, Analytische Geometrie des Punktpaares, des Kegelschnittes und der Fläche zweiter Ordnung 1 (1910), § 87, (22). Die Gleichung (4) legte bereits Appell der Berechnung der kubischen Kegelschnitte eines Gewindes zugrunde.

[6]) Vgl. K. Zindler, Liniengeometrie 2 (1906), § 44, (56); einem k in unserer Bezeichnung entspricht ein $-k$ bei Zindler; s. [5]) § 57, (20) oder § 87, (22) und K. Zindler, Liniengeometrie 1 (1902), § 2.

uzählende parabolische Zylinder, auf dem jede kubische Parabel liegt, nöge außer acht bleiben [7]). Da ein Gewinde durch eine beliebige Schraubung m seine Achse in sich übergeht, können wir unsere Untersuchung auf Rotaionsflächen beschränken, deren Achsen die X-Achse senkrecht schneiden; wie eicht ersichtlich, könnte man die Einschränkung noch etwas weiter treiben.

Bezeichnet man mit M den Mittelpunkt eines Hyperboloids unserer Teilschar, mit S den Schnittpunkt seiner Achse g mit der X-Achse und mit O den Koordinatenanfang, so ist es durch

$$\overline{OS} = \xi, \quad \overline{SM} = \lambda, \quad \cos(gY) = \beta, \quad \cos(gZ) = \gamma \tag{7}$$

nd durch die reelle bzw. imaginäre Halbachse a bzw. b der rotierenden Hyperbel bestimmt. Analog kann ein Kegel durch (7) und den halben Öffnungswinkel ω, $\left(0 < \omega < \frac{\pi}{2}\right)$, gegeben werden, wenn M seine Spitze ezeichnet.

Die Diskussion der Bedingungen dafür, daß eine kubische Parabel (5) uf einer unserer Rotationsflächen liegt, ergibt folgende Resultate:

Von den ursprünglichen ∞^5 Rotationshyperboloiden bzw. ∞^4 Rotationsegeln sind nur ∞^3 bzw. ∞^2 Träger von je ∞^2 kubischen Parabeln des ewindes, und zwar sind die ∞^3 Hyperboloide durch

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{a}{b}\right)^2, \tag{8}$$

$$\left(\frac{3\beta^2}{10k\gamma}\lambda^2 + \frac{3}{5}\xi - \frac{3k(\gamma^2-\beta^2)}{10\beta\gamma} + \frac{\beta b}{\gamma}\right)\left(\frac{3\beta^2}{10k\gamma}\lambda^2 + \frac{3}{5}\xi - \frac{3k(\gamma^2-\beta^2)}{10\beta\gamma} - \frac{\beta b}{\gamma}\right) = 0$$

nd die ∞^2 Kegel durch

$$\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^2 = \tan^2\omega \tag{10}$$

nd jene Relation, die aus (9) für $b = 0$ folgt, gekennzeichnet. Die Gleihungen (8) und (10) sagen aus, daß die Achsen der gesuchten Rotationsächen zur Gewindeachse weder parallel noch senkrecht sind; ferner folgt us (10), daß alle Kegel eine zur Gewindeachse parallele Erzeugende haben, aß also die Rotationskegel gleicher Achsenrichtung kongruent und nach 8) zugleich die asymptotischen Kegel der Hyperboloide jener Achsenchtung sind. Setzen wir

$$\frac{\beta}{\gamma} = \text{konst.}, \tag{11}$$

etrachten wir also Flächen, deren Achsen in derselben Ebene liegen, so rdnet (9) jedem Punkte dieser Ebene gerade eine Rotationsfläche zu, die n zum Mittelpunkt bzw. zur Spitze und die durch ihn gehende Gerade r Achse hat. Für die Kegel sagt (9) aus: Die Scheitel der Rotationsegel unserer Schar, deren Achsen in einer Ebene (11) liegen und die

[7]) [2]) § 9, 4.

Träger einer kubischen Parabel des Gewindes (3) sind, erfüllen die (doppel zu zählende) Parabel

$$\lambda^2 = -\frac{2k\gamma}{\beta^3}\left[\xi - \frac{k(\gamma^2-\beta^2)}{2\beta\gamma}\right], \tag{12}$$

wo ξ, λ die laufenden Koordinaten sind. Dreht sich die Ebene (11) un die X-Achse, so beschreibt die Parabel (12) die Fläche

$$y^4 + 2kxyz + k^2(y^2 - z^2) = 0. \tag{13}$$

Nur die Punkte dieser Fläche sind Scheitel von Kegeln der betrachtete Schar. Sie besitzt zwei Mäntel, die sich längs der X-Achse durchdringe und von denen der eine durch eine Spiegelung an der Z-Achse in de andern übergeht. Die Achsen der Kegel, deren Scheitel in der X-Achs liegen, beschreiben die Fläche

$$2xyz + k(y^2 - z^2) = 0. \tag{14}$$

Sie ist der Ort jener Achsen, für welche die beiden im allgemeinen ge trennten Kegel zusammenfallen. Sie besitzt wieder zwei Mäntel, die sic längs der X-Achse durchdringen und durch Spiegelung an der Gewind achse ineinander übergehen. Ihre beiden Mäntel berühren jene von (1 längs der X-Achse, weshalb sie die Fläche (13) in der Umgebung d X-Achse approximiert. Die Rechnung zeigt noch, daß die Kegel, dere Scheitel in der X-Achse liegen, die Nullebene ihres Scheitels berühre Die Gewindestrahlen bestimmen also jene Achsen, für die die beiden i allgemeinen getrennten Kegel zusammenfallen.

Setzt man in (9)

$$b = \text{konst.} \neq 0,$$

so erkennt man: Die in der Ebene (11) liegenden Mittelpunkte kongruent Hyperboloide ordnen sich längs zwei kongruenten Parabeln an, dere Gleichungen die beiden Bestandteile von (9) sind; zieht sich das Hype boloid auf einen Kegel zusammen, so rücken diese Parabeln in die Parab (12) ein. Die Kehlkreise der Hyperboloide, deren Mittelpunkte eine Gera einer Ebene (11) erfüllen, beschreiben eine Fläche, die durch Rotati zweier Parabeln um diese Gerade entsteht; die Gleichungen der beid Parabeln erhält man aus (9), wenn man b mittels (8) durch a ausdrück und λ, a als laufende Koordinaten ansieht.

Durch Anwendung der Gruppe der Schraubungen können wir nu leicht die aufgeworfene Frage ganz allgemein beantworten.

Für die Anregung zu dieser Untersuchung bin ich Herrn Profess K. Zindler in Innsbruck zu bestem Danke verpflichtet.

(Eingegangen am 1. August 1925.)

Concerning the Sum of a Countable Infinity of Mutually Exclusive Continua.

By

John Robert Kline in Philadelphia.

A set is said to be connected if it cannot be expressed as the sum f two mutually exclusive sets neither of which contains a limit point f the other one. Sierpiński[1]) has shown that a closed connected set space of n-dimensions cannot be separated into a countable infinity f closed point sets such that no two of them have a point in common. her thesis, Dr. Anna Mullikin[2]) gave an example of a connected set space of two dimensions which is not closed and which is the sum of countable infinity of mutually exclusive closed connected sets.

In Dr. Mullikin's example all the sets are of diameter greater than ity. In a question I was considering recently, the question arose whether was possible to have an open connected set in space of two dimensions ich is the sum of a countable infinity of closed connected sets in case is further stipulated that, given any ϵ $[\epsilon > 0]$, only a finite number the sets are of diameter greater than ϵ. The purpose of the present te is to show that this question may be answered in the negative.

Lemma A. *Suppose $M_1, M_2, \ldots, M_n$ is a finite collection of sed connected point sets while $P_1, P_2, \ldots$ is a countable infinity of points ch that for no i is P_i in $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$. Under these conditions $+ M_2 + \ldots + M_n + P_1 + P_2 + \ldots$ is not connected.*

Proof. Now P_1 cannot be a limit point of $M_1 + M_2 + \ldots + M_n$, e sum of a finite number of closed sets. Hence there exists a circle C ving P_1 as centre and containing within or on it no point of $M_1 \ldots M_n$. ke a second circle K having P_1 as centre and radius equal to onehalf

[1]) W. Sierpiński, *Un théorème sur les continues*, Tohoku Mathematical Journ. 13.

[2]) Cf. Anna Mullikin, *Certain Theorems Relating to Plane Connected Point Sets*, nsactions of the American Mathematical Society 24 (1922), p. 145.

that of C. If the set M which consists of $M_1+M_2+\ldots+M_n+P_1+P_2+\ldots$ is connected, then every circle having its centre at P_1 and lying betwee C and K must contain at least one point of M. The circles having P_1 as centre and lying between C and K form a non-denumerable set. Bu the points of M lying between C and K must form a denumerable s as they must all belong to $P_1+P_2+\ldots$. Hence we are led to a contr diction if we suppose M is connected.

Theorem A. *Let S be a set of points in a two dimensional Euclidea plane which is the sum of $S_1, S_2, \ldots$, a countable infinity of clos connected sets no two of which have a point in common and such tha given any ϵ $[\epsilon > 0]$, there are at most a finite number of sets $S_1, S_2, \ldots$ having a diameter greater than ϵ. Under these conditions is not connected.*

Proof. Suppose our theorem were not true. Then there exists countable infinity of continua $S_1+S_2+\ldots$ satisfying all the conditio of the hypothesis of our theorem and such that their sum S is connecte Let δ $[\delta \neq 0]$ be a positive number which is less than one-tenth of t diameter of S. By Lemma A there is at least one set whose diamet is less than δ and greater than zero. Let S_1' be the set of $S_1, S_2, \ldots$ of lowest subscript which satisfies this condition.

Let n_1 be an integer such that $S_1, S_2, \ldots, S_{n_1}$ contains all the se of diameter greater than or equal to $\delta/2$. Let ξ_1 be a number less th the distance from S_1' to any one of the sets $S_1, S_2, \ldots, S_{n_1}$, differe from S_1', while r_1 is a positive number less than $\xi_1/9$ and also less th $\delta/2$. Put about each point of S_1' as centre a circle of radius less th $\frac{1}{2}r_1$, such that there is within or on each circle no point of a set, differe from S_1', whose diameter is greater than or equal to $r_1/2$. Thus there within or on each circle of the set no point of $S_1+S_2+\ldots+S$ other than points of S_1'. Now as the set S_1' is closed, then by t Heine Borel Theorem, there is a finite subset $\{K_1\}$ of these circles co taining all points of S_1' in their interiors. Hence, by a theorem R. L. Moore[3]), there is a simple closed curve J_1 containing in its inter all points of the interiors of the circles $\{K_1\}$ and such that every po of J_1 is a point of one of the circles of $\{K_1\}$. Now, by our constructi there is on J_1 no point of a set of subscript $\geqq 1$ and $\leqq n_1$. N from these facts it follows that, if W_1 denotes J_1 plus all points $S_1, S_2, \ldots$ which have a point in common with J_1, then (1) W_1 is diameter less than $\left(\delta + 2\frac{\delta}{4} + 2\frac{\delta}{4}\right)$, (2) no point of $S_1+S_2+\ldots+S$

[3]) Cf. R. L. Moore, *Concerning the Foundations of Plane Analysis Situs*, Tra actions of the American Mathematical Society 17 (1916), p. 155, Theorem 41.

ithout J_1 is on W_1, and every point of $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_1}$, which is ithout W_1, is at a distance from W_1 greater than or equal to $\xi_1 - 2\frac{\xi_1}{9}$, 3) the set W is closed.

Let n_2 be an integer such that (1) n_2 is greater than $2n_1$ and 2) $S_1, S_2, \ldots, S_{n_2}$ contains all sets of diameter greater than or equal to $\delta/4$. et ξ_2 be a number less than the distance from the closed set W_1 to any one f the closed set $S_1, S_2, \ldots, S_{n_2}$, which are without J_1 and have no points in ommon with W_1. Let r_2 be a number less than the least of the following umbers $\delta/2^2$, $\xi_1/9^2$ and $\xi_2/9$. Put about each point of W_1 as centre a ircle of radius less than $\frac{1}{2}r_2$ and such that (1) no circle contains within r on it neither a point of $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_2}$, which is not within J_1 nd does not belong to W_1 while (2) no circle contains on or within it point of a set of diameter greater than or equal to $r_2/2$, lying without J_1 and not in W_1. Then as before we obtain from these circles a simple losed curve J_2 enclosing W_1. Let W_2 denote J_2 plus all points of sets elonging to $S_1, S_2, \ldots$ having points in common with J_2. It is clear hat no points of J_2 belong to $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_2}$ and that W_2 is such hat (1) the diameter of W_2 is less than $\left(\delta + 4\frac{\delta}{4} + 4\frac{\delta}{8}\right)$, (2) every oint of $S_1, S_2, \ldots, S_{n_1}$ without J_1 and not on W_2 is at a distance greater han or equal to $\xi_1 - (2\xi_1/9 + 2\xi_1/9^2)$ from W_2 while every point of $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_2}$ without J_2 and not on W_2, is at a distance greater han or equal to $\xi_2 - 2\xi_2/9$ from W_2.

Continue this process. In general let n_m be a positive integer uch that (1) n_m is greater than $2^{m-1}n_1$ and (2) $S_1, S_2, \ldots, S_{n_m}$ contains ll sets of $S_1, S_2, \ldots$ of diameter $> \delta/2^m$. Let ξ_m be a number less han the distance from the closed set W_{m-1} to any one of the closed ets $S_1, S_2, \ldots, S_{n_m}$ which are without J_{m-1} and not in W_{m-1}. Let r_m e a number less than any one of the following $m+1$ numbers $\delta/2^m$, $\xi_1/9^m$, $\xi_2/9^{m-1}$, $\ldots$, $\xi_m/9$. Put about each point of W_m as centre circle of radius less than $\frac{1}{2}r_m$ such that (1) no circle contains within r on it a point of $S_1, S_2, \ldots, S_{n_m}$ which is not within J_{m-1} or in W_{m-1} nd (2) there is within or on no circle of the set a point of a set of iameter greater than or equal to $r_m/2$ lying without J_{m-1} and not in W_{m-1}. Thus as before we obtain from these circles a simple closed urve J_m enclosing W_{m-1}. Let W_m denote J_m plus all points of $S_1, S_2, \ldots$ which have points in common with J_m. It is clear that no point of W_m elongs to $S_1 + S_2 + \ldots + S_{n_m}$ and that W_m is such that (1) its diameter is ess than $\left(\delta + 4\frac{\delta}{4} + 4\frac{\delta}{8} + \ldots + 4\frac{\delta}{2^{m+1}}\right)$; (2) every point of $S_1, S_2, \ldots, S_{n_1}$

$(i = 1, 2, \ldots, m)$, which is without J_i and not in W_m is at a distanc greater than $\xi_i - (2\xi_i/9 + 2\xi_i/9^2 + \ldots + 2\xi_i/9^{m-i+1})$ from W_m.

Let H_1 denote a point which belongs to $S_1, S_2, \ldots$ which is withi J_x for some integer of x while H_2 denotes all other points of $S_1, S_2, \ldots$ Clearly no point of H_1 is a limit point of H_2.

Suppose P of the S_y, which lies outside of J_x, for every x, wer a limit point of $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ a set of points such that P_{n_i} lies in J_{n_i} Let j be an integer such that $2^j n_1 > y$. Than P is distant from th curve of J_{j+k} by a distance greater than or equal to

$$\xi_j - (2\xi_j/9 + 2\xi_j/9^2 + \ldots + 2\xi_j/9^{k+1}) \text{ for every } k.$$

Hence the distance from P to any point of $P_{n_1}, P_{n_2}, \ldots$ is greather tha or equal to $\frac{3\xi_j}{4}$. Hence no point of H_2 is a limit point of H_1 and th supposition that $S_1 + S_2 + \ldots$ is connected has led to a contradiction

University of Pensylvania, Philadelphia, Pennsylvania.

(Eingegangen am 23. August 1925.)

Flächentreue Abbildungen der Flächen auf die Ebene.

Von

D. Grawe in Kiew.

Im zweiten Bande dieser Zeitschrift ist eine Abhandlung von Herrn Scheffers erschienen, in welcher sich der folgende Absatz findet:

„Ohne Kenntnis der Gaußischen Bemerkung hat der Russe D. A. Grawe in der Abhandlung ‚Sur la construction des cartes géographiques', Journal des Mathématiques, 5. Serie, 1. Bd., 1896, S. 317—361, insbes. S. 319, dieselbe Darstellung wie Gauß gefunden." (Math. Zeitschr. 2, S. 181—182.)

Die Gaußische Bemerkung lautet wie folgt:

„Aufgabe. Die Punkte in der Ebene so in eine zweite Ebene zu übertragen, daß jeder unendlich kleinen Figur in der einen Ebene eine von gleichem Inhalt in der anderen entspreche.

Es seien die Koordinaten in der einen Ebene x und y,
die korrespondierenden in der anderen ξ und η.

Die allgemeine Auflösung ist dann folgende.

Es sei u eine willkürliche Funktion von x und ξ; man mache

$$y = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \eta = -\frac{\partial u}{\partial \xi}.$$

Diese Auflösung ist vollkommen richtig und allgemein und läßt sich leicht geometrisch versinnlichen." (Gauß, Werke 8, S. 373.)

Die Behauptung des großen Mathematikers über die vollkommene Allgemeinheit dieser Auflösung ist nicht ganz richtig. Um dies deutlicher zu erklären, betrachten wir die Aufgabe der flächentreuen Abbildung einer Rotationsfläche auf die Ebene.

Es seien x, y die rechtwinkligen Koordinaten in der Ebene und u, v solche Koordinaten der Fläche, für welche das Quadrat des Linienelementes die Form

$$ds^2 = [\lambda(u)]^2 (du^2 + dv^2)$$

annimmt. Dann hängt die Lösung unserer Aufgabe von der Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = \Omega$$

ab, wo $\Omega = k[\lambda(u)]^2$ bedeutet.

Wenn wir anstatt der Veränderlichen u die andere $\int \Omega\, du$ einführen so bekommen wir endgültig die Gleichung

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = 1. \tag{1}$$

Man kann diese Gleichung umformen, indem man für unabhängige Veränderliche x und v annimmt.

Die Grundgleichungen der Abbildung sind

$$x = \varphi(u, v), \tag{2}$$

$$y = \psi(u, v). \tag{3}$$

Lösen wir die Gleichung (2) in bezug auf u

$$u = \varphi_{-1}(x, v)$$

auf und substituieren in (3)

$$y = \psi[\varphi_{-1}(x, v), v] = \omega(x, v). \tag{4}$$

Außerdem haben wir die Identität

$$x = \varphi[\varphi_{-1}(x, v), v]. \tag{5}$$

Differentiation von (5) nach x liefert

$$1 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial x}{\partial u} = \frac{1}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}$$

und die nach v

$$0 = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial v}, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = -\frac{\dfrac{\partial u}{\partial v}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}.$$

Ähnlich folgt aus (4)

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial y}{\partial x}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}},$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial v} = \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial v}, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{\partial \omega}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\dfrac{\partial u}{\partial v}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}}.$$

etzt man diese Ausdrücke in (1) ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{\frac{\partial u}{\partial x}}\left[\frac{\partial \omega}{\partial v}-\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\frac{\partial u}{\partial x}}\right]+\frac{\frac{\partial u}{\partial v}}{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2}\frac{\partial y}{\partial x}=1$$

nd endlich

6)
$$\frac{\partial \omega}{\partial v}=\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Die allgemeinste Lösung dieser Gleichung (6) ist

$$y=f_x'(x,v), \qquad u=f_v'(x,v),$$

o $f(x,v)$ eine willkürliche Funktion ist.

Die Auflösung der Gleichung (2) in bezug auf u ist nicht möglich, enn x nur von einer Veränderlichen v abhängt. In diesem Falle bekommen wir

7)
$$x=V, \qquad y=-\frac{u}{V'}+W,$$

o V und W willkürliche Funktionen von v allein sind.

Die Ergänzungsformeln (7) sind für die vollkommene Allgemeinheit er Lösung der Aufgabe unentbehrlich.

In analoger Weise läßt sich die allgemeinste Aufgabe für willkürliche lächen behandeln.

Kiew, 12. Dezember 1925.

(Eingegangen am 22. Dezember 1925.)

Vereinfachung eines Blichfeldtschen Beweises aus de Geometrie der Zahlen.

Von

Robert Remak in Berlin.

In seiner Arbeit „A new principle in the geometry of numbers wi some applications“ [1]) gelingt es Herrn Blichfeldt durch Anwendung ein neuen Prinzips, die Minkowskische Abschätzung für das Minimum ein eigentlich definiten quadratischen Form mit ganzzahligen Veränderliche (geometrisch, für den kürzesten Abstand zweier Gitterpunkte eines Punkl gitters) wesentlich zu verbessern. Ich will im folgenden diesen Bewe dadurch vereinfachen, daß ich die m-gliederige Summe auf S. 232 unten sein Arbeit, mit deren Gliederzahl er zur Grenze übergeht, durch ein Integr ersetze. (Der Gesichtspunkt der Arithmetisierung, der Veranlassung gebe könnte, umgekehrt ein Integral durch eine Summe zu ersetzen, mag einer Arbeit, in der ohnedies Integrale vorkommen, ausscheiden.) En sprechend muß sein Theorem I auf S. 228 unten und dessen Verallgeme nerung auf S. 231 oben durch ein etwas allgemeineres Theorem erset werden, das sich nicht mehr nur auf eine Anzahl von Gitterpunkte sondern auf eine Summe von Funktionswerten in Gitterpunkten in eine Bereich bezieht.

Es seien $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ n Veränderliche (Koordinaten im n-dimensi nalen Raume), $b(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, abgekürzt $b(\xi)$, eine beschränkte, i Riemannschen Sinne integrierbare Funktion der Veränderlichen,

$$|b(\xi)| < B, \tag{1}$$

die außerhalb eines beschränkten Bereiches $|\xi| \leqq X$ verschwinde, d. h.

$$b(\xi) = 0 \tag{2}$$

falls ein

$$|\xi_\nu| > X. \tag{3}$$

[1]) Transactions of the American Mathematical Society 15 (1914), S. 227–235

Es seien $x_1, x_2, \ldots, x_n$, abgekürzt x, positive oder negative ganze rationale Zahlen oder 0 (Koordinaten eines Punktgitters im n-dimensionalen Raume). Man bilde

4) $$A(\xi) = \sum_{\substack{x=-\infty \\ (n)}}^{\infty} b(\xi + x);$$

(n) deutet an, daß es sich um eine n-fache Summe handelt. Es ist zu beachten, daß auf der rechten Seite nur endlich viele Summanden $\neq 0$ sein können. Deren Anzahl ist kleiner als

$$(2X+2)^n.$$

Es sei

5) $$W = \int_{\substack{-\infty \\ (n)}}^{\infty} b(\xi)\, d\xi,$$

wo (n) das n-fache Integral andeute. Es ist

$$|W| < B \cdot (2X+2)^n,$$

also ist W endlich. Es ist

$$W = \sum_{\substack{x=-\infty \\ (n)}}^{\infty} \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} b(\xi + x)\, d\xi .$$

Es ist dies eine Zerlegung des endlichen Integrals in endlich viele Teilintegrale. Wegen der endlichen Anzahl der von 0 verschiedenen Summanden darf man Summation und Integration vertauschen und erhält

$$W = \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} \sum_{\substack{x=-\infty \\ (n)}}^{\infty} b(x+\xi)\, d\xi = \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} A(\xi)\, d\xi .$$

Wäre ständig $A(\xi) < W$, so wäre

$$W = \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} A(\xi)\, d\xi < \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} W\, d\xi = W \cdot \int_{\substack{0 \\ (n)}}^{1} d\xi = W \cdot \left(\int_0^1 d\xi \right)^n = W.$$

Also erhält man einen Widerspruch. Es gibt also Werte $\bar{\xi}$, für die

$$A(\bar{\xi}) \geqq W.$$

Man erhält also

Hilfssatz I. *Wenn $b(\xi)$, $A(\xi)$ und W durch* (1) *bis* (5) *definiert sind, so läßt sich ein Wertsystem $\bar{\xi}$ so bestimmen, daß*

$$A(\bar{\xi}) \geqq W.$$

Es sei $F(\xi)$ eine eigentlich definite quadratische Form in den n Veränderlichen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, d. h. es sei

$$F(\xi) \geqq 0,$$

$F(\xi) = 0$ nur, wenn $\xi = 0$, d. h. sämtliche Veränderliche $\xi_\nu = 0$.

Hilfssatz II. *Sind L Wertsysteme $\xi^{(\varkappa)}$ gegeben, so ist*

$$\sum_{\varkappa<\lambda}^{L} F(\xi^{(\varkappa)} - \xi^{(\lambda)}) \leqq L \cdot \sum_{\varkappa=1}^{L} F(\xi^{(\varkappa)}). \tag{6}$$

Beweis. Man bezeichne die Bilinearform mit den beiden Variablenreihen $\xi^{(\varkappa)}$ und $\xi^{(\lambda)}$ mit $F(\xi^{(\varkappa)}, \xi^{(\lambda)})$. Es ist

$$\sum_{\varkappa<\lambda}^{L} F(\xi^{(\varkappa)} - \xi^{(\lambda)}) + F\left(\sum_{\varkappa=1}^{L} \xi^{(\varkappa)}\right)$$

$$= \sum_{\varkappa<\lambda}^{L} \{F(\xi^{(\varkappa)}) - F(\xi^{(\varkappa)}, \xi^{(\lambda)}) - F(\xi^{(\lambda)}, \xi^{(\varkappa)}) + F(\xi^{(\lambda)})\}$$

$$+ \sum_{\substack{\varkappa=1 \\ \lambda=1}}^{L} F(\xi^{(\varkappa)}, \xi^{(\lambda)}) = L \cdot \sum_{\varkappa=1}^{L} F(\xi^{(\varkappa)}).$$

Da aber $F\left(\sum_{\varkappa=1}^{L} \xi^{(\varkappa)}\right) \geqq 0$, so folgt hieraus die zu beweisende Ungleichung (6).

Es sei M das Minimum von $F(x)$ für alle ganzzahligen Wertsysteme x außer $x = 0$. Nach der Definition der eigentlich definiten quadratischen Form ist $M > 0$. Es sei ferner B eine positive Konstante. Für ein bestimmtes Wertsystem ξ bezeichne $L(\xi)$ die Anzahl der ganzzahligen Wertsysteme x im Gebiete

$$F(x - \xi) \leqq B,$$

die, wie bekannt, endlich ist. Man bezeichne diese Wertsysteme mit $\varkappa = 1, 2, \ldots, L(\xi)$ und setze

$$\sum_{\varkappa=1}^{L(\xi)} F(x^{(\varkappa)} - \xi) = G(\xi).$$

Man beachte ferner, daß

$$(x^{(\varkappa)} - \xi) - (x^{(\lambda)} - \xi) = x^{(\varkappa)} - x^{(\lambda)}.$$

Dann erhält man aus Hilfssatz II:

$$\frac{L(\xi) \cdot (L(\xi)-1)}{2} M \leqq \sum_{\varkappa<\lambda}^{L(\xi)} F(x^{(\varkappa)} - x^{(\lambda)}) \leqq L(\xi) \cdot \sum_{\varkappa=1}^{L(\xi)} F(x^{(\varkappa)} - \xi) = L(\xi) \cdot G(\xi)$$

Wenn $L(\xi) = 0$, so steht beiderseits 0. Es sei $L(\xi) \geqq 1$; dann kann man $L(\xi)$ wegheben und erhält

$$\frac{L(\xi)-1}{2} \cdot M \leqq G(\xi). \tag{7}$$

Jetzt wende man Hilfssatz I an auf die spezielle Funktion

$$b(\xi) = \mathrm{Max}(0, B - F(\xi)),$$

welche eben für $F(\xi) \geqq B$ verschwindet. Dann wird

$$A(\xi) = L(\xi) \cdot B - G(\xi). \tag{8}$$

Ferner wird

$$W = \int_{\substack{F(\xi) \leqq B \\ (n)}} (B - F(\xi))\, d\xi . \tag{9}$$

Aus (7) folgt

$$\frac{L(\xi)-1}{2} \cdot M + L(\xi) \cdot B - G(\xi) \leqq L(\xi) \cdot B$$

oder mit Rücksicht auf (8)

$$\frac{L(\xi)-1}{2} \cdot M + A(\xi) \leqq L(\xi) \cdot B .$$

Nach Hilfssatz I kann man einen speziellen Wert $\bar{\xi}$ von ξ so finden, daß $A(\bar{\xi}) \geqq W$, also

$$\frac{L(\bar{\xi})-1}{2} M + W \leqq L(\bar{\xi}) \cdot B . \tag{10}$$

Es ist wegen (8)

$$L(\bar{\xi}) \cdot B - G(\bar{\xi}) \geqq W,$$

also wegen $W > 0$, $G(\bar{\xi}) \geqq 0$

$$L(\bar{\xi}) \cdot B \geqq W + G(\bar{\xi}) > 0.$$

Da $B > 0$, ist mithin

$$L(\bar{\xi}) \geqq \frac{W}{B} + \frac{G(\bar{\xi})}{B} .$$

Sowie also

$$W > B, \tag{11}$$

ist

$$L(\bar{\xi}) \geqq \frac{W}{B} > 1 ,$$

folglich

$$L(\bar{\xi}) \geqq 2.$$

Sowie (11) gilt, ist nach (10)

$$\frac{L(\bar{\xi})-1}{2} \cdot M \leqq L(\bar{\xi}) \cdot B - W < (L(\bar{\xi}) - 1) \cdot B .$$

Da $L(\bar{\xi}) - 1 \geqq 1$, darf man durch $L(\bar{\xi}) - 1$ kürzen und erhält

$$M < 2B . \tag{12}$$

Um auf Grund von (9) W auszuwerten, gehe man folgendermaßen vor: Es sei

$$F(\xi) = \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 ,$$

wo die v_μ Linearformen in den ξ_ν seien. Die Determinante der Linearformen sei Δ. Dann ist die Determinante der quadratischen Form $F(\xi)$

$$D = \Delta^2 .$$

Es wird nach (9)

$$(13) \qquad W = \int\limits_{\substack{\sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \leqq B \\ (n)}} \left(B - \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2\right) \frac{dv}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}(B \cdot J_1 - J_2),$$

wo J_1 und J_2 zur Abkürzung eingeführt sind. Es ist bekanntlich das Volumen der n-dimensionalen Kugel vom Radius 1

$$\int\limits_{\substack{\sum_{\mu=1}^{n} w_\mu^2 \leqq 1 \\ (n)}} dw = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)} = K,$$

wo K zur Abkürzung der numerischen Konstanten steht. Setzt man

$$w_\mu = \frac{v_\mu}{\sqrt{B}},$$

so wird

$$J_1 = \int\limits_{\substack{\sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \leqq B \\ (n)}} dv = B^{\frac{n}{2}} \cdot K.$$

Zur Abkürzung bezeichne man das Integrationsgebiet

$$\sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \leqq B \qquad \text{mit } G,$$

ebenso

$$\sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \leqq B - \beta \qquad \text{mit } g,$$

$$B - \beta \leqq \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \leqq B \qquad \text{mit } G - g.$$

Es wird

$$J_1 = \int_G dv = B^{\frac{n}{2}} K,$$

$$\frac{dJ_1}{dB} = \frac{n}{2} \cdot B^{\frac{n}{2}-1} K = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \{J_1(B) - J_1(B-\beta)\} = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \int_{G-g} dv.$$

Ferner wird

$$\frac{dJ_2}{dB} = \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \int_{G-g} \sum_{\mu=1}^{n} v_\mu^2 \, dv \geqq \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \int_{G-g} (B-\beta) \, dv$$

$$= \lim_{\beta \to 0} (B-\beta) \cdot \lim_{\beta \to 0} \frac{1}{\beta} \int_{G-g} dv = B \cdot \frac{dJ_1}{dB}.$$

Ganz ebenso erhält man durch Benutzung der oberen Grenze

$$\frac{dJ_2}{dB} \leqq B \cdot \frac{dJ_1}{dB},$$

also

$$\frac{dJ_2}{dB} = B \cdot \frac{dJ_1}{dB} = \frac{n}{2} B^{\frac{n}{2}} K.$$

Hieraus erhält man durch Integration, da $J_2(B=0)=0$ zu setzen ist,

$$J_2 = \frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+1} \cdot B^{\frac{n}{2}+1} \cdot K = \frac{n}{n+2} \cdot B^{\frac{n}{2}+1} \cdot K,$$

also

$$W = \frac{1}{A} \cdot B^{\frac{n}{2}+1} \cdot K \cdot \left(1 - \frac{n}{n+2}\right) = \frac{1}{\sqrt{D}} \cdot B^{\frac{n}{2}+1} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)}$$

weil

$$1 - \frac{n}{n+2} = \frac{2}{n+2} = \frac{1}{1+\frac{n}{2}}\Bigg).$$

Die Bedingung (11) oder auch $\frac{W}{B} > 1$ lautet jetzt

$$\frac{1}{\sqrt{D}} \cdot B^{\frac{n}{2}} \cdot \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)} > 1$$

oder

$$B > \frac{1}{\pi}\left[\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} \sqrt[n]{D} = B_0,$$

worin B_0 zur Abkürzung eingeführt ist. Da aber, wenn $B = B_0 + \varepsilon$, nach (11) und (12)

$$M < 2(B_0 + \varepsilon),$$

und dies für beliebig kleine $\varepsilon > 0$ gilt, so ist

$$M \leqq 2 B_0$$

oder

$$M \leqq \frac{2}{\pi}\left[\Gamma\left(2+\frac{n}{2}\right)\right]^{\frac{2}{n}} \cdot \sqrt[n]{D}.$$

Das ist aber das Blichfeldtsche Ergebnis [2]).

[2]) loc. cit. S. 233 oben. An der Herleitung des Theorems über Linearformen auf S. 233 ändert sich nichts.

(Eingegangen am 15. Oktober 1925.)

Sur la solution du problème biharmonique pour l'air extérieure à une ellipse.

Par

Nicolas Muschelišvili (Mouskhelichvili) à Tiflis.

Dans la note „Über eine partikuläre Lösung des biharmonischen Pro blems für den Außenraum der Ellipse" M. Pöschl[1]) donne la solution d problème d'analyse, auquel on est conduit par le problème de tractio d'une plaque élastique douée d'un trou elliptique.

On s'assure aisément (voir plus bas) que le problème en questio se réduit immédiatement au cas très particulier du *„problème biharmo nique fondamental"* qui s'énonce comme il suit:

Déterminer la solution U de l'équation biharmonique $\Delta\Delta U = 0$ tell que ses dérivées partielles $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ soient régulières et uniformes dans u certain domaine S, limité par un seul contour simple C, vérifiant le conditions aux limites

$$(1) \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = u(s), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = v(s) \quad (\text{sur } C),$$

$u(s)$, $v(s)$ désignant les fonctions données de l'arc s de C. De plus, si l domaine S est infini («problème extérieur»), on suppose que $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial}$ *restent bornées à l'infini.*

[On peut démontrer que ce problème ne peut admettre plus d'un seule solution, si l'on considère comme identiques les solutions ne diffé rant que par une constante additive.]

Or, dans mon article «Sur l'intégration de l'équation biharmonique»[2]

[1]) Math. Zeitschr. 11 (1921), S. 89—96. Ce volume manquant dans la bibli thèque de notre Université, je dois à l'obligeance de M. M. Timpe et Pöschl d'avo obtenu cet article.

[2]) Bull. de l'Académie de Russie 1919, pp. 663—686.

'ai exposé une méthode qui permet de trouver effectivement la solution générale de ce problème pour une classe assez vaste des domaines.

Cette méthode fut ensuite developpée en détail dans ma thèse[3]) et appliquée à un grand nombre d'exemples de la théorie de l'élasticité.

En particulier ma méthode s'applique à l'aire extérieure à une ellipse et conduit aux formules très simples que je me permets de reproduire ici.

Toute fonction biharmonique U peut toujours être mise sous la forme[4])

2) $$U = \frac{1}{2}\{z\overline{\varphi}_1(\bar{z}) + \bar{z}\varphi_1(z) + \psi_2(z) + \overline{\psi}_2(\bar{z})\},$$

$\varphi_1(z)$, $\psi_2(z)$ étant les fonctions de la variable complexe $z = x + iy$ et, d'une façon générale, $\overline{\varphi}(\bar{z})$ désignant l'expression conjuguée de $\varphi(z)$ (en particulier $\bar{z} = x - iy$).

En posant

3) $$z = \omega(\zeta) = b\left(\zeta + \frac{a}{\zeta}\right) \qquad (b > 0, a > 1),$$

on obtient la représentation conforme de l'aire S, extérieure à l'ellipse

4) $$\frac{x^2}{b^2(a+1)^2} + \frac{y^2}{b^2(a-1)^2} = 1,$$

sur le cercle $|\zeta| \leqq 1$.

Soit de plus

$$\psi_1(z) = \frac{d\psi_2(z)}{dz}, \quad \varphi(\zeta) = \varphi_1(\omega(\zeta)), \quad \psi(\zeta) = \psi_1(\omega(\zeta)).$$

Cela posé, la solution du problème fondamental sera donnée par les formules[5])

5) $$\varphi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u+iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' - \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (u+iv)\frac{d\zeta'}{\zeta'},$$

$$\psi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u-iv}{\zeta'-\zeta}\,d\zeta' - \frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2-a}\varphi'(\zeta),$$

---

[3]) Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique. Tiflis 1922, édition de l'Université.

[4]) Comparez E. Goursat, Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$, Bull. de la Soc. Math. de France 26 (1898), pp. 236—237. Cf. aussi mes travaux cités.

[5]) Dans mon article (l. c. [2])) je donne les formules pour le cas où $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ sont assujeties à la condition de s'annuler à l'infini. Elles coïncident avec les formules (5) du texte si $\int_\gamma (u+iv)\frac{d\zeta'}{\zeta'} = 0$. Cette dernière égalité exprime la condition *nécessaire et suffisante* pour qu'il existe la solution vérifiant la condition nommée. Les formules (5) sont données en toute généralité dans ma thèse (l. c. [3])), p. 115.

les intégrales étant prises suivant la circonférence γ ($|\zeta| = 1$), $\zeta = \varrho e^{i}$ désignant le point à l'intérieur de γ, ζ' — le point variable sur γ e enfin, u et v étant des fonctions de l'arc de γ qui sont égales au fonctions données $u(s)$ et $v(s)$ de la formule (1) en des points corr spondants de C.

$\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ une fois detérminées, on calculera $\psi_2(z)$ par une qu drature et on déterminera U (à une constante près) au moyen de (2).

Or, dans la plupart d'applications il n'est nullement necéssaire de remonter à la fonction U elle-même ni de rétablir les variabl initiales (x, y).

Au contraire, il est souvent beaucoup plus commode d'introdui les coordonnées ϱ et ϑ, définies par la relation $x + iy = \omega(\zeta)$, $\zeta = \varrho e$ $(0 < \varrho \leqq 1,\ 0 \leqq \vartheta < 2\pi)$, qui correspondent aux coordonnées polaires s le plan des ζ; $\omega(\zeta)$ désigne la fonction qui représente S sur le cerc $|\zeta| \leqq 1$.

[Dans le cas particulier de l'aire, extérieure à une ellipse, on $\omega(\zeta) = b\left(\zeta + \frac{a}{\zeta}\right)$, d'où

$$x = b\left(\varrho + \frac{a}{\varrho}\right)\cos\vartheta, \quad y = b\left(\varrho - \frac{a}{\varrho}\right)\sin\vartheta$$

et les courbes $\varrho = \text{const.}$, $\vartheta = \text{const.}$ sont des ellipses et des hyperbol homofocales.]

Si, par exemple, U représente la fonction d'Airy pour le problèm d'élasticité à deux dimensions, l'on aura, pour définir les composantes $\widehat{\varrho\varrho}$ $\widehat{\vartheta\vartheta}$, $\widehat{\varrho\vartheta}$ des tensions et les composantes u_ϱ, u_ϑ des déplacements (l notations étant celles de Love), les formules qu'on déduit aisément[6]):

$$(6)\quad |\omega'(\zeta)|(u_\varrho - iu_\vartheta) = -\frac{1}{2\mu}\frac{\zeta}{\varrho}\omega'(\zeta)\left\{\psi(\zeta) + \frac{\overline{\omega}(\bar{\zeta})}{\omega'(\zeta)}\varphi'(\zeta) - \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}\overline{\varphi}(\bar{\zeta})\right\}$$

$$(7)\quad \widehat{\varrho\varrho} - i\widehat{\varrho\vartheta} = \Phi(\zeta) + \overline{\Phi}(\bar{\zeta}) - \frac{\zeta^2}{\varrho^2}\frac{1}{\overline{\omega}'(\bar{\zeta})}\{\Psi(\zeta)\omega'(\zeta) + \Phi'(\zeta)\overline{\omega}(\bar{\zeta})$$

$$(8)\quad \widehat{\varrho\varrho} + \widehat{\vartheta\vartheta} = 2\{\Phi(\zeta) + \overline{\Phi}(\bar{\zeta})\},$$

où l'on a posé

$$(9)\quad \Phi(\zeta) = \frac{\varphi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}, \quad \Psi(\zeta) = \frac{\psi'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}.$$

---

[6]) Cf. l. c. [3]), pp. 126—127. La formule (6) du texte se rapporte au cas de déf mation plane. Dans le cas de la plaque mince („verallgemeinerter ebener Spannun zustand") on doit remplacer λ par $\lambda' = \frac{2\lambda\mu}{\lambda + 2\mu}$.

Ces formules, analogues à celles de M. Kolossoff[7]) sont très commodes pour les calculs effectifs.

Passons maintenant au problème traité par M. Pöschl (l. c. [1]), § 3, p. 92). Si U_0 ($=\psi$ d'après les notations de M. Pöschl) désigne la fonction d'Airy, relative à ce problème $\left(\frac{\partial U_0}{\partial x}=\frac{\partial U_0}{\partial y}=0 \text{ sur } C\right)$ et si l'on pose

$$U = U_0 - \frac{p}{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2, \tag{10}$$

le problème se réduit au problème biharmonique fondamental[8]) (1) avec

$$u(s) = -p(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)\cos\alpha, \quad v(s) = -p(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)\sin\alpha,$$

les accents ($'$) se rapportant, d'une façon générale, aux points du contour. Pour appliquer les formules (5) remarquons que

$$u + iv = -p(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha)e^{i\alpha} = -pe^{i\alpha}\frac{z'e^{-i\alpha}+\bar{z}'e^{i\alpha}}{2}$$
$$= -\frac{p}{2}(z' + \bar{z}'e^{2i\alpha})$$

d'où, en remplaçant z' par $b\left(\zeta' + \frac{a}{\zeta'}\right)$ et en remarquant que $\bar{\xi}' = e^{-i\vartheta} = \frac{1}{\zeta'}$,

$$u + iv = -\frac{pb}{2}\left[\zeta' + \frac{a}{\zeta'} + e^{2i\alpha}\left(\frac{1}{\zeta'} + a\zeta'\right)\right],$$
$$u - iv = -\frac{pb}{2}\left[\frac{1}{\zeta'} + a\zeta' + e^{-2i\alpha}\left(\zeta' + \frac{a}{\zeta'}\right)\right].$$

En substituant ces valeurs dans (5) et en appliquant les règles élémentaires du calcul des résidus, on obtient presque sans calculs

$$\varphi(\zeta) = -\frac{pb}{2}\left(1 + ae^{2i\alpha}\right)\zeta,$$
$$\psi(\zeta) = -\frac{pb}{2}\left(a + e^{-2i\alpha}\right)\zeta + \frac{\zeta(1+a\zeta^2)}{\zeta^2 - a}\cdot\frac{pb}{2}(1 + ae^{2i\alpha}). \tag{11}$$

Pour trouver les fonctions $\varphi_0(\zeta)$ et $\psi_0(\zeta)$ relatives à la fonction $U_0 = U + \frac{p}{2}(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2$ il suffit d'ajouter à $\varphi(\zeta)$ et $\psi(\zeta)$ respectivement les expressions[9])

---

[7]) Cf. G. Kolossoff, Über einige Eigenschaften des ebenen Problems etc., Zeitschr. f. Math. u. Phys. 62 (1914) S. 384—409.

[8]) Il n'est nullement évident *à priori*, que $\frac{\partial U}{\partial x}$ et $\frac{\partial U}{\partial y}$ doivent être uniformes dans S. Or, on démontre aisément qu'il en est bien ainsi. Ce fait tient uniquement à ce que la résultante générale des tensions appliquées au contour est nulle. Cf. l. c. [2]), p. 683 et l. c. [3]), p. 131. La même remarque s'applique à l'hypothèse que fait M. Pöschl en supposant sa fonction ψ uniforme.

[9]) Les fonctions $\varphi_1(z)$ et $\psi_1(z)$ qui correspondent à la fonction biharmonique $(x\cos\alpha + y\sin\alpha)^2$ sont, comme on voit immédiatement, $\frac{p}{4}z$ et $\frac{p}{2}e^{-2i\alpha}z$.

$$\frac{pb}{4}\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right) \quad \text{et} \quad e^{-2i\alpha}\frac{pb}{2}\left(\zeta+\frac{a}{\zeta}\right),$$

et notre problème est complètement résolu: d'après les formules (6), (7) (8) on obtiendra les tensions et les déplacements par un calcul tout fait élémentaire. On peut aussi calculer immédiatement la fonction U elle même; l'expression obtenue coïncide (à des notations près) avec celle de M. Pöschl[10]) (l. c., p. 93, form. (14)).

La solution pour le cas particulier $\alpha = \frac{\pi}{2}$ fut donnée par M. Kolossoff dans sa thèse[11]) et fut ensuite reproduite dans son article cité plus haut[12]).

Il est à remarquer que contrairement à l'affirmation de M. Pösch la solution de M. Kolossoff est tout à fait exacte[13]).

En superposant les solutions pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \frac{\pi}{2}$, M. Pöschl (l. c., § 4 obtient la solution du problème de traction uniforme („Allseitiger Zug" de la plaque avec un trou elliptique. Dans ma thèse[14]) j'ai obtenu la solution pour le cas, qui est le même en substance, directement au moyen des formules (5).

En revenant aux formules générales (5), remarquons qu'elles donnent entre autres, le moyen d'obtenir presque sans calculs la solution du problème, relative au cas où le bord du trou est sollicité par des forces finies quelconques, appliquées en des *points isolés*. Il faut pour cela supposer les fonctions $u(s)$ et $v(s)$ discontinues aux points d'application des forces.

---

[10]) Pour faciliter la comparaison je donne ici l'expression de mes grandeurs a, b, ϱ, ϑ en fonctions des grandeurs c, ξ_0, ξ, η de M. Pöschl:

$$a = e^{2\xi_0},\ b = \frac{c}{2}e^{-\xi_0},\ \varrho = e^{\xi_0-\xi},\ \vartheta = -\eta.$$

[11]) G. Kolossoff, Sur une application de la théorie des fonctions de la variable complexe au problème de l'élasticité à deux dimensions, Dorpat, 1909, pp. 25—(en russe).

[12]) l. c. [7]), p. 404.

[13]) L'affirmation de M. Pöschl (l. c. [1]), note de la p. 93) est fondée sur le fait que sa formule (15) ne coïncide pas, pour $\alpha = 0$, avec celle de M. Kolossoff (l. c. p. 404). Or, le cas traité par M. Kolossoff correspond à $\alpha = \frac{\pi}{2}$ *et non* à $\alpha =$ Pour $\alpha = \frac{\pi}{2}$ les formules de ces auteurs coïncident complètement (à des notations près). Il faut ajouter, pour éviter tout malentendu, que la formule (15) de M. Pösc contient une erreur d'impression (ou un *lapsus calami*). A savoir, elle doit être remplacée par la suivante:

$$\widehat{\eta\eta} = p\cdot\frac{\mathfrak{Sin}\,2\xi_0 - \cos 2\alpha + e^{2\xi_0}\cos 2(\eta-\alpha)}{\mathfrak{Cof}\,2\xi_0 - \cos 2\eta}.$$

[14]) l. c. [3]), p. 133.

La solution s'exprime au moyen de fonctions élémentaires: Il faut outefois remarquer, que les formules (5) cessent d'être directement appli-uables si la résultante générale des forces agissant sur le contour n'est as nulle.

Un artifice simple[15]) permet, d'ailleurs, de tourner la difficulté.

Tiflis, 17 novembre 1925.

---

[15]) Cf. l. c. [3]), p. 683. Je profite de l'occasion pour corriger une omission dans article cité. A savoir, on doit remplacer A et B dans les formules (45) de la . 683 par $(-A)$ et $(-B)$, et dans les formules qui suivent on doit supposer que e bord (+) de la coupure (qui part du point s_0 du contour pour aboutir à l'infini) oit celui qui reste *à gauche*, lorsqu'on se meut dans le sens $s_0 \to \infty$. Les inté-rales dans ces formules sont prises dans le sens positif (laissant S à gauche).

(Eingegangen am 3. Dezember 1925.)

Über n-fache Orthogonalsysteme in V_n.

Von

J. A. Schouten in Delft.

Einleitung.

Im Jahre 1895 hatte Ricci[1]) sich die Frage vorgelegt, wann durch eine in V_n gegebene Kongruenz $n-1$ gegenseitig senkrechte Systeme von ∞^1 V_{n-1} gelegt werden können, und es war ihm anscheinend gelungen bis zu den notwendigen und hinreichenden Bedingungen vorzudringen. Im Jahre 1923 stellte sich dann Eisenhart[2]), unbekannt mit der Arbeit Riccis, die nahe verwandte Frage, wann ein gegebenes Tensorfeld V_{n-1}-normale Hauptrichtungen besitzt, eine Frage, die ebenfalls in meinem 1924 erschienenen *Ricci-Kalkül*[3]) unter Verwendung der Riccischen Resultate erörtert wan Beim Vergleich zeigte sich, daß die Resultate nicht übereinstimmten. Bei einer genaueren Untersuchung fand ich nun, daß in der Riccischen Rechnung ein Fehler steckt, so daß seine Bedingungen zwar notwendig, aber noch nicht hinreichend sind und daß diese sich zu einem hinreichenden System ergänzen lassen durch Hinzufügung einiger Gleichungen zweiter Ordnung. Andererseits stellte sich aber auch heraus, daß die Eisenhartschen Bedingungen zwar, bis auf eine kleine Ungenauigkeit in der Formulierung, notwendig und hinreichend sind, daß sie aber viel mehr enthalten als nötig ist, darunter insbesondere auch Gleichungen dritter Ordnung.

Die vorliegende Arbeit bringt in ihrem ersten Teil die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß bei einer V_{n-1}-normalen Kongruenz zu jedem in einem Punkte P gegebenen System von $n-1$ Haupt

[1]) Dei sistemi di congruenze ortogonali in una varietà qualunque. Mem. Acc. Linc. (5) 2, pp. 276–322.

[2]) Orthogonal systems of hypersurfaces in a general Riemann space. Trans. Amer. Math. Soc. 25, pp. 259–280.

[3]) Der Ricci-Kalkül [Berlin: Julius Springer, 1924], weiterhin zitiert als R. K.

richtungen $n-1$ Systeme von ∞^1 V_{n-1} konstruiert werden können, die in P senkrecht zu den gewählten Hauptrichtungen und in jedem anderen Punkte senkrecht zu irgendwelchen Hauptrichtungen sind. Die nicht vollständig integrablen Fälle z. B. der, wo nur ein einziges System von V_{n-1}-normalen Hauptrichtungen möglich ist, während doch die Hauptrichtungen nicht alle eindeutig bestimmt sind, werden nicht behandelt. Auch die ursprüngliche Riccische Fragestellung, wobei die gegebene Kongruenz nicht V_{n-1}-normal ist, kommt nicht zur Sprache. Der zweite Teil bringt die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß es bei einem gegebenen Tensorfeld zu jedem in einem Punkte P gegebenen System von n Hauptrichtungen ein n-faches Orthogonalsystem gibt, das in P mit den gewählten Hauptrichtungen und in jedem anderen Punkte mit irgendwelchen Hauptrichtungen zusammenfällt. Auch hier wird also nur der vollständig integrable Fall besprochen.

Die verwendeten Formeln.

Die wichtigsten differentialgeometrischen Formeln, die im folgenden zur Verwendung gelangen, sollen hier zusammengestellt werden.

Zwei Kongruenzen v^ν und w^ν sind dann und nur dann V_2-bildend, wenn

(a) $$v^\lambda \nabla_\lambda w^\nu - w^\lambda \nabla_\lambda v^\nu = \alpha v^\nu + \beta w^\nu,$$ [4]

wo α und β beliebige Werte annehmen können.

n gegenseitig senkrechte Kongruenzen bilden ein *Orthogonalnetz*. Sind i_j^ν $(j = 1, \ldots, n)$ die Einheitsvektoren dieser Kongruenzen, so sind die Kongruenzen $\underset{x}{i}^\nu$ $(x = 1, \ldots, k)$ dann und nur dann V_k-bildend und gleichzeitig $\underset{u}{i}^\nu$ $(u = k+1, \ldots, n)$ dann und nur dann V_k-normal, wenn

(b) $$\underset{x}{i}^\lambda \underset{y}{i}^\mu \nabla_{[\mu} \underset{u}{i}_{\lambda]} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x, y = 1, \ldots, k \\ u = k+1, \ldots, n \end{pmatrix}.$$ [5]

Daraus ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß *alle* n Kongruenzen V_{n-1}-normal sind

(c) $$\underset{j}{i}^\lambda \underset{k}{i}^\mu \nabla_\mu \underset{l}{i}_\lambda = 0\,.$$ [6]

Die Kongruenzen bilden dann ein *Orthogonalsystem*.

Für jede beliebige Kongruenz i^ν gilt

(d) $$\nabla_\mu i_\lambda = h_{\mu\lambda} + k_{\mu\lambda} + i_\mu u_\lambda; \quad h_{\mu\lambda} = h_{\lambda\mu}; \quad k_{\mu\lambda} = -k_{\lambda\mu},$$ [7]

[4]) R. K. S. 107.
[5]) R. K. S. 109, (26b).
[6]) R. K. S. 191, (131).
[7]) R. K. S. 177.

in welcher Gleichung $h_{\mu\lambda}$ und $k_{\mu\lambda}$ in der $R_{n-1} \perp i^\nu$ liegen und u_λ der zu i^ν senkrechte Krümmungsvektor der Kongruenz ist. Die Kongruenz ist dann und nur dann V_{n-1}-normal, wenn $k_{\mu\lambda}$ verschwindet:

$$\text{(e)} \qquad \nabla_\mu i_\lambda = h_{\mu\lambda} + i_\mu u_\lambda ; \qquad h_{\mu\lambda} = h_{\lambda\mu} .$$ [8])

A. Orthogonale Systeme von V_{n-1} durch eine gegebene V_{n-1}-normale Kongruenz.

§ 1.

Kanonische Kongruenzen.

In einer V_n sei eine V_{n-1}-normale Kongruenz $\underset{n}{i}{}^\nu$ gegeben. Es ist die Frage zu erörtern, wann diese Kongruenz zu einem Orthogonalsystem gehört, d. h. wann es möglich ist durch diese Kongruenz $n-1$ gegenseitig orthogonale Systeme von V_{n-1} zu legen. Die V_{n-1} seien die äquiskalären V_{n-1} der Felder $\overset{a}{p}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$. Für die Gradienten dieser Felder schreiben wir kurz

$$\text{(1)} \qquad \nabla_\mu \overset{a}{p} = \overset{a}{p}_\mu .$$

$\underset{n}{i}{}^\nu$ ist dann mit jeder der Kongruenzen $\overset{a}{p}{}^\nu$ V_2-bildend. Die V_2 sind eben die Schnittgebilde der zu den anderen $n-2$ Kongruenzen orthogonalen V_{n-1}. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß $\underset{n}{i}{}^\nu$ und $\overset{a}{p}{}^\nu$ V_2-bildend sind, lautet aber nach (a):

$$\text{(2)} \qquad \underset{n}{i}{}^\mu \nabla_\mu \overset{a}{p}_\lambda - \overset{a}{p}{}^\mu \nabla_\mu \underset{n}{i}_\lambda = \alpha \underset{n}{i}_\lambda + \beta \overset{a}{p}_\lambda ,$$

wo α und β beliebige Werte annehmen dürfen. Da aber $\overset{a}{p}_\lambda$ Gradientvektor ist und $\underset{n}{i}{}^\nu \perp \overset{a}{p}{}^\nu$ ist

$$\text{(3)} \qquad \underset{n}{i}{}^\mu \nabla_\mu \overset{a}{p}_\lambda = \underset{n}{i}{}^\mu \nabla_\lambda \overset{a}{p}_\mu = - \overset{a}{p}_\mu \nabla_\lambda \underset{n}{i}{}^\mu ,$$

so daß (2) gleichwertig ist mit

$$\text{(4)} \qquad - 2 \overset{a}{p}{}^\mu \nabla_{(\mu} \underset{n}{i}_{\lambda)} = \alpha \underset{n}{i}_\lambda + \beta \overset{a}{p}_\lambda .$$

Da $\underset{n}{i}{}^\nu$ Einheitsvektor und V_{n-1}-normal ist, hat $\nabla_\mu \underset{n}{i}_\lambda$ nach (e) die Form

$$\text{(5)} \qquad \nabla_\mu \underset{n}{i}_\lambda = h_{\mu\lambda} + \underset{n}{i}_\mu u_\lambda .$$

---

[8]) R. K. S. 177.

4) ist also gleichwertig mit

6) $$-2\overset{a}{p}^{\mu} h_{\mu\lambda} - \overset{a}{p}^{\mu} u_{\mu} \underset{n}{i}_{\lambda} = \alpha \underset{n}{i}_{\lambda} + \beta \overset{a}{p}_{\lambda},$$

oder

7) $$-2\overset{a}{p}_{\mu} h_{\mu\lambda} = \beta \overset{a}{p}_{\lambda}.$$

Diese Gleichung bringt aber zum Ausdruck, daß $\overset{a}{p}^{\nu}$ in einem Hauptgebiet des Tensors $h_{\mu\lambda}$ liegt. Eine Kongruenz in einem Hauptgebiet von $h_{\mu\lambda}$ heißt nach Ricci eine zu $\underset{n}{i}^{\nu}$ gehörige *kanonische Kongruenz*. Die gestellte Frage ist also gleichwertig mit der Frage, ob es $n-1$ V_{n-1}-normale kanonische Kongruenzen gibt.

§ 2.

Eindeutig bestimmte Hauptrichtungen.

Wir nehmen nun zunächst an, daß die Hauptrichtungen von $h_{\mu\lambda}$ eindeutig bestimmt sind, daß also jedes Hauptgebiet nur eine Richtung enthält. Das Orthogonalnetz $\underset{a}{i}^{\nu}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$ sei in diesen Richtungen gelegt, d. h. es gelte die Gleichung

8) $$\underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu} h_{\mu\lambda} = 0 \qquad (a \neq b).$$

Dann ist $h_{aa} \neq h_{bb}$ für $a \neq b$. Anwendung der Operation $\underset{n}{i}^{\omega} \nabla_{\omega}$ auf diese Gleichung liefert

9) $$\underset{n}{i}^{\omega} \left(\nabla_{\omega}\, \underset{a}{i}^{\lambda}\right) \underset{b}{i}^{\mu} h_{\mu\lambda} + \underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{n}{i}^{\omega} \left(\nabla_{\omega}\, \underset{b}{i}^{\mu}\right) h_{\mu\lambda} + \underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu}\, \underset{n}{i}^{\omega} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0 \quad (a \neq b)$$

oder

10) $$(h_{bb} - h_{aa}) \underset{n}{i}^{\omega}\, \underset{b}{i}^{\lambda} \nabla_{\omega}\, \underset{a}{i}_{\lambda} + \underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu}\, \underset{n}{i}^{\omega} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0 \qquad (a \neq b).$$

Die Kongruenzen $\underset{a}{i}^{\nu}$ sind nach (c) dann und nur dann V_{n-1}-normal, wenn

α_0) $$\underset{b}{i}^{\lambda}\, \underset{n}{i}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \underset{a}{i}_{\lambda} = 0$$

β_0) $$\underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \underset{c}{i}_{\lambda} = 0 \qquad (a, b, c \neq),$$

denn der Ausdruck

11) $$\underset{n}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \underset{a}{i}_{\lambda}$$

verschwindet infolge (5) und (8). Nehmen wir an, (α_0) sei erfüllt, so geht (10) über in

A_0) $$\underset{a}{i}^{\lambda}\, \underset{b}{i}^{\mu}\, \underset{n}{i}^{\omega} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0 \qquad (a \neq b).$$

Diese $^1/_2(n-1)(n-2)$ Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß die Hauptgebiete der Komponente des Tensors $\overset{n}{i}{}^{\omega} \nabla_\omega h_{\mu\lambda}$ senkrecht zu $\overset{n}{i}{}^{\nu}$ die Hauptrichtungen von $h_{\lambda\mu}$ enthalten.

Eine zweite notwendige Bedingung wird erhalten, indem der Operator $\overset{c}{i}{}^{\omega} \nabla_\omega$, $a, b, c \neq$ auf (8) angewandt wird. Dann entsteht

$$(12) \quad \overset{c}{i}{}^{\omega}(\nabla_\omega \overset{a}{i}{}^{\lambda}) \overset{b}{i}{}^{\mu} h_{\mu\lambda} + \overset{a}{i}{}^{\lambda} \overset{c}{i}{}^{\omega}(\nabla_\omega \overset{b}{i}{}^{\mu}) h_{\mu\lambda} + \overset{a}{i}{}^{\lambda} \overset{b}{i}{}^{\mu} \overset{c}{i}{}^{\omega} \nabla_\omega h_{\mu\lambda} = 0 \quad (a, b, c \neq)$$

oder

$$(13) \quad (h_{bb} - h_{aa}) \overset{c}{i}{}^{\omega}(\nabla_\omega \overset{a}{i}{}_{\lambda}) \overset{b}{i}{}^{\lambda} + \overset{a}{i}{}^{\lambda} \overset{b}{i}{}^{\mu} \overset{c}{i}{}^{\omega} \nabla_\omega h_{\mu\lambda} = 0 \quad (a, b, c \neq)$$

Gilt (β_0), so folgen aus (13) die $^1/_2(n-1)(n-2)(n-3)$ Gleichungen

$$(B_0) \quad \boxed{\overset{a}{i}{}^{\lambda} \overset{b}{i}{}^{\mu} \overset{c}{i}{}^{\omega} \nabla_\omega h_{\mu\lambda} = 0} \quad (a, b, c \neq)$$

Gehen wir nun, umgekehrt, in der Annahme, daß $h_{\mu\lambda}$ keine unbestimmten Hauptrichtungen hat, aus von (A_0) und (B_0). Aus (A_0) und (10) folgt dann (α_0), da $h_{bb} - h_{aa}$ sicher nicht Null ist. Ebenso folgt (β_0) aus (B_0) und (13). *Die Bedingungen* (A_0) *und* (B_0) *sind also notwendig und hinreichend.*

§ 3.

Nicht eindeutig bestimmte Hauptrichtungen. Bedingungen (A), (B) und (C).

Wir gehen jetzt zu dem Fall über, wo Hauptgebiete von $h_{\mu\lambda}$ mit mehr als einer Dimension vorhanden sind. Wir wählen irgendwelche $n-1$ gegenseitig senkrechte Hauptrichtungen und legen das Orthogonalnetz $\overset{a}{i}{}^{\nu}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$ in diesen Richtungen. Es gilt dann immer noch (8) und auch die mit (8) äquivalente Gleichung

$$(8a) \quad \overset{n}{i}{}^{\lambda} \overset{b}{i}{}^{\mu} \nabla_\mu \overset{a}{i}{}_{\lambda} = 0 \quad (a, b = 1, \ldots, n-1; a \neq b)$$

es ist aber nur dann $h_{aa} \neq h_{bb}$, wenn $\overset{a}{i}{}^{\nu}$ und $\overset{b}{i}{}^{\nu}$ zu zwei verschiedenen Hauptgebieten von $h_{\mu\lambda}$ gehören.

Gibt es $n-1$ gegenseitig und zu $\overset{n}{i}{}^{\nu}$ senkrechte V_{n-1}-normale Kongruenzen $\overset{a}{j}{}^{\nu}$ $(a = 1, \ldots, n-1)$, so liegen diese nach § 1 jedenfalls in den Hauptgebieten von $h_{\mu\lambda}$. (Die j^ν seien wie die i^ν Einheitsvektoren.) Für die j^ν gilt ferner

$$(14a) \quad \overset{b}{j}{}^{\lambda} \overset{n}{i}{}^{\mu} \nabla_\mu \overset{a}{j}{}_{\lambda} = 0$$

$$(14b) \quad \overset{a}{j}{}^{\lambda} \overset{b}{j}{}^{\mu} \nabla_\mu \overset{c}{j}{}_{\lambda} = 0 \quad (a, b, c \neq)$$

Diese Gleichungen gelten aber nicht mehr für die innerhalb der Hauptgebiete beliebig gewählten Kongruenzen $\overset{\nu}{i}_a$. Eine spezielle Folgerung aus (14) ist

(15a) $$\overset{\lambda}{i}_n \overset{\mu}{j}_b \nabla_{[\mu} \overset{\lambda]}{j}_c = 0$$

(15b) $$\overset{\lambda}{j}_a \overset{\mu}{j}_b \nabla_{[\mu} \overset{\lambda]}{j}_c = 0 \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \neq; & h_{aa} \neq h_{cc} \\ & h_{bb} \neq h_{cc} \end{pmatrix}.$$

(15) bringt zum Ausdruck (vgl. (b), S. 707), daß jede Kongruenz j^ν, die in einem bestimmten k-dimensionalen Hauptgebiet liegt, V_{n-k}-normal ist, und daß die V_{n-k} gebildet werden durch die Kongruenzen $\overset{\nu}{i}_n$ und j^ν senkrecht zu diesem Hauptgebiet. Dann sind aber die zum betrachteten Hauptgebiet gehörigen Kongruenzen i^ν ebenfalls senkrecht zu diesen V_{n-k}, während die Kongruenzen $\overset{\nu}{i}_n$ und i^ν senkrecht zum Hauptgebiet in den V_{n-k} liegen und diese bestimmen. Daraus folgt aber

(α) $$\overset{\lambda}{i}_n \overset{\mu}{i}_b \nabla_{[\mu} \overset{\lambda]}{i}_c = 0$$

(β) $$\overset{\lambda}{i}_a \overset{\mu}{i}_b \nabla_{[\mu} \overset{\lambda]}{i}_c = 0 \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \neq; & h_{aa} \neq h_{cc} \\ & h_{bb} \neq h_{cc} \end{pmatrix}.$$

Die letzte Gleichung läßt für $h_{aa} \neq h_{bb}$ eine weitere Folgerung zu; es ist dann

(16) $$\overset{\lambda}{i}_a \overset{\mu}{i}_b \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_c = \overset{\lambda}{i}_b \overset{\mu}{i}_a \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_c = -\overset{\lambda}{i}_c \overset{\mu}{i}_a \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_b = -\overset{\lambda}{i}_a \overset{\mu}{i}_c \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_b$$
$$= \overset{\lambda}{i}_b \overset{\mu}{i}_c \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_a = \overset{\lambda}{i}_c \overset{\mu}{i}_b \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_a = -\overset{\lambda}{i}_a \overset{\mu}{i}_b \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_c,$$

oder

(17) $$\overset{\lambda}{i}_a \overset{\mu}{i}_b \nabla_\mu \overset{\lambda}{i}_c = 0 \qquad (a, b, c \neq;\ h_{aa}, h_{bb}, h_{cc} \neq).$$

Es ist zu beachten, daß das System der Gleichungen (α), (β) für jede beliebige Wahl der i^ν innerhalb der Hauptgebiete gilt, sobald seine Lösung für eine einzige bestimmte Wahl feststeht. Dies folgt unmittelbar aus der geometrischen Bedeutung.

Aus (5), (α), (β) folgt, daß die Kongruenzen eines k-dimensionalen Hauptgebietes im Falle der Existenz der $n-1$ gesuchten V_{n-1}-normalen Kongruenzen nicht nur V_{n-k}-normal, sondern auch V_k-bildend sind, und zusammen mit $\overset{\nu}{i}_n$ sowohl V_{n-k-1}-normal als V_{k+1}-bildend, oder noch allgemeiner, daß die Kongruenzen einiger Hauptgebiete mit $k_1, k_2, \ldots$ Dimensionen $k_1 + k_2 + \ldots = k$, V_{n-k}-normal und V_k-bildend und zusammen mit $\overset{\nu}{i}_n$ V_{n-k-1}-normal und V_{k+1}-bildend sind.

Nehmen wir an, (α) sei erfüllt, so folgt aus (8a) und (10)

$$(A) \qquad \boxed{i^{\lambda}_{a}\, i^{\mu}_{b}\, i^{\omega}_{n} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0} \qquad (a \neq b;\ h_{aa} \neq h_{bb})$$

Gilt (β), so folgt zunächst aus (13) und (17) für $h_{aa}, h_{bb}, h_{cc} \neq$

$$(B) \qquad \boxed{i^{\lambda}_{a}\, i^{\mu}_{b}\, i^{\omega}_{c} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0} \qquad (a, b, c \neq;\ h_{aa}, h_{bb}, h_{cc} \neq)$$

Ist aber $h_{aa} = h_{bb} \neq h_{cc}$, so folgt aus (13) durch zyklische Permutation

$$(18) \quad \begin{gathered} -(h_{cc} - h_{aa})\, i^{\omega}_{a} (\nabla_{\omega} i_{\lambda}) i^{\lambda}_{b} + i^{\lambda}_{b}\, i^{\mu}_{c}\, i^{\omega}_{a} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0, \\ (h_{aa} - h_{cc})\, i^{\omega}_{b} (\nabla_{\omega} i_{\lambda}) i^{\lambda}_{a} + i^{\lambda}_{c}\, i^{\mu}_{a}\, i^{\omega}_{b} \nabla_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0, \\ (a, b, c \neq;\ h_{aa} = h_{bb} \neq h_{cc}). \end{gathered}$$

Bei Subtraktion entsteht infolge (β)

$$(C) \qquad i^{\lambda}_{c}\, i^{\omega}_{a}\, i^{\mu}_{b} \nabla_{[\omega} h_{\mu]\lambda} = 0 \qquad (a, b, c \neq;\ h_{aa} = h_{bb} \neq h_{cc})$$

Umgekehrt folgen nun auch (α) und (β) aus (A), (B) und (C). In der Tat, aus (A), (8a) und (10) folgt (α). Ebenso folgt (β) für h_{aa}, h_{bb} und h_{cc} ungleich aus (B) und (13) und für $h_{aa} = h_{bb} \neq h_{cc}$ aus (C) und (18). Gelten also (α), (β) bzw. (A), (B), (C) für irgendeine und in folgedessen für jede Wahl der i^{ν}_{a} innerhalb der Hauptgebiete von $h_{\mu\lambda}$, so gelten (A), (B), (C) bzw. (α), (β) für jede solche Wahl. (A), (B) und (C) bilden also die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß jedes k-dimensionale Hauptgebiet V_{n-k}-normal ist. Die geometrische Bedeutung von (A) und (B) ist folgende:

Bei einer Verrückung senkrecht zu irgend m Hauptgebieten von $h_{\mu\lambda}$ ist die Komponente des Zuwachses von $h_{\mu\lambda}$ in dem Gebiet, das durch diese m Hauptgebiete bestimmt ist, ein Tensor, dessen Hauptgebiete diese m Hauptgebiete von $h_{\mu\lambda}$ enthalten[9]).

§ 4.

Die Bedingungen (A), (B) und (C) nicht hinreichend.

Es sei jetzt untersucht, inwiefern die für die innerhalb der Hauptgebiete beliebig gewählten Kongruenzen i^{ν}_{a} aufgestellten notwendigen Bedingungen (α), (β) oder (A), (B), (C) auch hinreichend dafür sind, daß sich $n-1$ V_{n-1}-normale Kongruenzen j^{ν} bilden lassen. Wir wählen ein

[9]) Für die geometrische Bedeutung der Bedingung (C), die wir später doch durch eine andere ersetzen werden, siehe R. K. S. 195.

bestimmtes Hauptgebiet und nennen die Kongruenzen in diesem Hauptgebiet $\overset{x}{i}{}^{\nu}$ $(x, y = 1, \ldots, k)$, die übrigen $\overset{u}{i}{}^{\nu}$ $(u, v = k+1, \ldots, n-1)$. Aus (α) und (β) folgt dann

$$\overset{n}{i}{}^{\lambda}\,\overset{u}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{x}{i}_{\lambda]} = 0, \tag{19}$$

$$\overset{u}{i}{}^{\lambda}\,\overset{v}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{x}{i}_{\lambda]} = 0 \qquad (u \neq v), \tag{20}$$

$$\overset{x}{i}{}^{\lambda}\,\overset{y}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{u}{i}_{\lambda]} = 0 \qquad (x \neq y), \tag{21}$$

$$\overset{n}{i}{}^{\lambda}\,\overset{x}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{u}{i}_{\lambda]} = 0. \tag{22}$$

Die Gleichungen (19), (20) sind der analytische Ausdruck dafür, daß die $\overset{u}{i}{}^{\nu}$ zusammen mit $\overset{n}{i}{}^{\nu}$ V_{n-k}-bildend sind, anders gesagt, daß die $n-k$ Gleichungen

$$\begin{aligned} &\overset{n}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0, \\ &\overset{u}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0 \qquad (u = k+1, \ldots, n-1) \end{aligned} \tag{23}$$

genau k unabhängige Lösungen besitzen. Ebenso bringen (21), (22) zum Ausdruck, daß die $\overset{x}{i}{}^{\nu}$ zusammen mit $\overset{n}{i}{}^{\nu}$ V_{k+1}-bildend sind. Die Gradienten der Lösungen von (23) liegen alle in dem gewählten Hauptgebiet. Wir wählen eine beliebige Lösung und legen $\overset{1}{j}{}^{\nu}$ in der Richtung ihres Gradienten. In beliebiger Weise wählen wir dazu $k-1$ Kongruenzen $\overset{y}{k}{}^{\nu}$ $(y = 2, \ldots, k)$ senkrecht zueinander und zu $\overset{1}{j}{}^{\nu}$ im betrachteten Hauptgebiet. Diese $k-1$ Kongruenzen sind im allgemeinen *nicht* V_{n-1}-normal. Nun ist zu untersuchen, ob die $\overset{u}{i}{}^{\nu}$ zusammen mit $\overset{n}{i}{}^{\nu}$ und $\overset{1}{j}{}^{\nu}$ V_{n-k+1}-bildend sind, anders gesagt, ob die Gleichungen

$$\begin{aligned} &\overset{n}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0, \\ &\overset{u}{i}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0 \qquad (u = k+1, \ldots, n-1), \\ &\overset{1}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

genau $k-1$ unabhängige Lösungen besitzen und also ein vollständiges System bilden. Wäre dies der Fall, so könnte eine zweite Kongruenz $\overset{2}{j}{}^{\nu}$ in der Richtung des Gradienten einer Lösung von (24) gelegt werden, und man könnte, in dieser Weise fortfahrend, zu jedem System von $n-1$ in einem bestimmten Punkte innerhalb der Hauptgebiete vorgegebenen gegenseitig senkrechten Richtungen ein System von $n-1$ gegenseitig und

zu $\overset{i}{n}{}^{\nu}$ senkrechten V_{n-1}-normalen Kongruenzen konstruieren. Dies ist der von Ricci angegebene Weg. Dazu wäre notwendig und hinreichend, daß

$$(25)\qquad \begin{aligned} &\alpha) && \overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{i}{u}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda]} = 0 \\ &\beta) && \overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda]} = 0 \\ &\gamma) && \overset{i}{u}{}^{\lambda}\,\overset{i}{v}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda]} = 0 \\ &\delta) && \overset{i}{u}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda]} = 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} u, v = k+1, \ldots, n-1 \\ y = 2, \ldots, k \end{pmatrix}$$

Die erste und dritte Bedingung sind identisch erfüllt infolge der für jede Wahl der $\overset{i}{x}{}^{\nu}$ geltenden Gleichungen (19) und (20). Da $\overset{j}{1}{}^{\nu}$ V_{n-1}-normal ist und alle betrachteten Kongruenzen gegenseitig senkrecht sind und in Hauptrichtungen von $h_{\mu\lambda}$ liegen, folgt

$$(26)\qquad \begin{aligned} \overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda} &= -\,\overset{k}{y}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{i}{n}{}_{\lambda} = 0\,, \\ \overset{j}{1}{}^{\lambda}\,\overset{i}{n}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda} &= -\,\overset{k}{y}{}^{\lambda}\,\overset{i}{a}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{j}{1}{}_{\lambda} = -\,\overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{k}{y}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{j}{1}{}_{\lambda} \\ &= \overset{j}{1}{}^{\lambda}\,\overset{k}{y}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{i}{n}{}_{\lambda} = 0\,, \end{aligned}$$

so daß auch die dritte Bedingung erfüllt ist. *Die vierte Bedingung läßt sich aber nicht mehr aus* (α) *und* (β) *ableiten.*

Ricci hat gemeint die Vollständigkeit des Systems (24) auf folgende Weise erschließen zu können. $\overset{i}{n}{}^{\nu}$ und $\overset{j}{1}{}^{\nu}$ sind V_2-bildend, anders gesagt, die Gleichungen

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\alpha) && \overset{i}{n}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0\,, \\ &\beta) && \overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,s = 0 \end{aligned}$$

besitzen genau $n-2$ unabhängige Lösungen. In der Tat ist infolge (22) und (25 β)

$$(28)\qquad \begin{aligned} \overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{i}{u}{}_{\lambda]} &= 0\,, \\ \overset{i}{n}{}^{\lambda}\,\overset{j}{1}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{k}{y}{}_{\lambda]} &= 0\,. \end{aligned}$$

Unter diesen Lösungen gibt es zunächst die jedenfalls vorhandenen $n-k-1$ Lösungen von (27 α), deren Gradientvektoren in den anderen Hauptgebieten liegen, und die wir $\overset{z}{u}$ ($u = k+1, \ldots, n-1$) nennen wollen. k ebenfalls stets vorhandene Lösungen von (27 α), deren Gradientvektoren im betrachteten Hauptgebiet fallen, seien $\overset{\sigma}{x}$ ($x = 1, \ldots, k$). Die $k-1$

anderen Lösungen $\underset{y}{s}$ $(y = 2, \ldots, k)$ von (27α) und (27β) sind also Funktionen der z und σ

(29) $$\underset{y}{s} = \underset{y}{s}(z, \sigma).$$

Ricci bemerkt nun[10]), daß es nicht möglich ist, die σ aus diesen Gleichungen zu eliminieren, da $\underset{y}{s}$, $\underset{u}{z}$ $n-2$ unabhängige Lösungen darstellen. Die s bleiben also $k-1$ unabhängige Lösungen von (27α), wenn die z in (29) durch beliebige Konstanten ersetzt werden. Aber, und dies ist übersehen worden, die in dieser Weise gebildeten Lösungen *sind nicht auch notwendig Lösungen von* (27β). In der Tat, die Gleichung

(30) $$\underset{n}{i^\mu} \nabla_\mu s = \sum_x \underset{n}{i^\mu} \frac{\partial s}{\partial \underset{x}{\sigma}} \nabla_\mu \underset{x}{\sigma} = 0$$

bleibt richtig, wenn in den $\frac{\partial s}{\partial \sigma}$, die im allgemeinen Funktionen der σ *und* der z sind, die z durch Konstanten ersetzt werden, da jeder einzelne Vektor $\nabla_\mu \underset{x}{\sigma}$ senkrecht zu $\underset{n}{i^\nu}$ ist. Die Gleichung

(31) $$\underset{1}{j^\mu} \nabla_\mu s = \sum_x \underset{1}{j^\mu} \frac{\partial s}{\partial \underset{x}{\sigma}} \nabla_\mu \underset{x}{\sigma} = 0$$

bleibt aber im allgemeinen nicht richtig, da die $\nabla_\mu \underset{x}{\sigma}$ nicht einzeln senkrecht zu $\underset{1}{j^\nu}$ sind.

Wir sehen also, daß der von Ricci angegebene Weg nicht gangbar ist und daß (A), (B), (C) zwar ein notwendiges, aber kein hinreichendes System von Bedingungen darstellt.

§ 5.

Die Forderung der vollständigen Integrabilität. Bedingung (D).

Es gilt also die Bedingungen abzuleiten, die (A), (B), (C) zu einem hinreichenden System ergänzen. Dabei wollen wir mit Ricci fordern, daß sich zu einem k-dimensionalen Hauptgebiet nicht nur ein einziges System von V_{n-1}-normalen gegenseitig und zu $\underset{n}{i^\nu}$ senkrechten Kongruenzen konstruieren läßt, sondern daß sich zu jedem in irgendeinem Punkte P gegebenen System von $n-1$ gegenseitig senkrechten, in den Hauptgebieten gelegenen Richtungen ein solches Kongruenzensystem konstruieren läßt.

Sind $\underset{x}{j^\nu}$ $(x = 1, \ldots, k)$ bzw. $\underset{u}{j^\nu}$ $(u = k+1, \ldots, n-1)$ die gesuchten

[10]) A. a. O. Fußnote zu S. 311.

V_{n-1}-normalen Kongruenzen in dem betrachteten Hauptgebiet bzw. senkrecht zu diesem Gebiet, so sind die gesuchten Bedingungen die Integrabilitätsbedingungen der für alle Hauptgebiete aufgestellten Gleichungen

$$\begin{aligned}
&\alpha) && \overset{i}{n}{}^{\lambda}_{y}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{[\mu}\, \overset{j}{x}{}_{\lambda]} = 0 \\
&\beta) && \overset{i}{n}{}^{\lambda}_{u}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{[\mu}\, \overset{j}{x}{}_{\lambda]} = 0 \\
&\gamma) && \overset{j}{u}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{[\mu}\, \overset{j}{x}{}_{\lambda]} = 0 \qquad \begin{pmatrix} x, y, z \neq \\ u \neq v \end{pmatrix} \\
&\delta) && \overset{j}{u}{}^{\lambda}_{y}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{[\mu}\, \overset{j}{x}{}_{\lambda]} = 0 \\
&\varepsilon) && \overset{j}{v}{}^{\lambda}_{z}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{[\mu}\, \overset{j}{x}{}_{\lambda]} = 0
\end{aligned} \tag{32}$$

sofern diese nicht schon aus (A), (B), (C) folgen. Infolge (α), (β) bleiben also nur (32α), (32δ) und (32ε). Wählen wir nun die Kongruenzen $\overset{i}{x}{}^{\nu}$, $\overset{i}{u}{}^{\nu}$ beliebig gegenseitig senkrecht in den Hauptgebieten, so folgt aus der aufgestellten Forderung, daß es ein System j^{ν} gibt, das in einem beliebigen vorgegebenen Punkt P mit $\overset{i}{a}{}^{\nu}$ zusammenfällt $(a = 1, \ldots, n-1)$. Allgemein gilt dann

$$\overset{i}{x}{}^{\nu} = \sum_{y} \overset{xy}{\alpha}\, \overset{j}{y}{}^{\nu} \qquad (x, y = 1, \ldots, k) \tag{33}$$

wo $\overset{xy}{\alpha}$ Funktionen von x^{ν} sind. Daraus folgt

$$\overset{i}{u}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{i}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{i}{x}{}_{\lambda} = \sum_{y} \overset{i}{u}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{i}{}^{\mu} \overset{xy}{\alpha} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{y}{}_{\lambda} \qquad (u \neq v) \tag{34}$$

In P fallen nun $\overset{i}{u}{}^{\nu}$ und $\overset{i}{v}{}^{\nu}$ zusammen mit $\overset{j}{u}{}^{\nu}$ und $\overset{j}{v}{}^{\nu}$ während infolge der für alle Hauptgebiete gültigen Gleichungen (32)

$$\begin{aligned}
\overset{j}{u}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{y}{}_{\lambda} &= -\overset{j}{y}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{u}{}_{\lambda} = -\overset{j}{v}{}^{\lambda}_{y}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{u}{}_{\lambda} = \overset{j}{u}{}^{\lambda}_{y}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{v}{}_{\lambda} \\
&= \overset{j}{y}{}^{\lambda}_{u}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{v}{}_{\lambda} = -\overset{j}{v}{}^{\lambda}_{u}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{y}{}_{\lambda} = -\overset{j}{u}{}^{\lambda}_{v}\, \overset{j}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{j}{y}{}_{\lambda} = 0
\end{aligned} \tag{35}$$

Infolgedessen verschwindet der Ausdruck rechts in (34) in P und, da P allgemein gewählt werden kann, in jedem Punkte. Da aber die $\overset{i}{a}{}^{\nu}$ beliebig gewählt sind, ist allgemein

$$\boxed{\overset{i}{b}{}^{\lambda}_{c}\, \overset{i}{}^{\mu} \nabla_{\mu}\, \overset{i}{a}{}_{\lambda} = 0} \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \neq \\ h_{aa} + h_{bb} = h_{cc} \end{pmatrix} \tag{δ}$$

eine Gleichung, die neben (β) und (17) zu betrachten ist.

Die geometrische Bedeutung der Gleichungen (8) und (δ) ist, daß die

V_k des betrachteten Hauptgebietes *Mannigfaltigkeiten mit lauter Nabelpunkten* sind. Ist nämlich C'^{ν}_{λ} der Einheitsaffinor dieser Mannigfaltigkeiten

$$C'^{\nu}_{\lambda} = \sum_{x} i_{\lambda}\, i^{\nu}, \tag{36}$$

so ist der Krümmungsaffinor der V_k

$$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} V_{\alpha} C'^{\nu}_{\beta} = -\sum_{u} C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \left(V_{\alpha}\, i_{u\beta}\right) i^{\nu}_{u} - C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \left(V_{\mu}\, i_{n\beta}\right) i^{\nu}_{n} \tag{37}$$

und die genannten Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß alle Bestimmungszahlen von $H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ mit zwei ungleichen vorderen Indizes in bezug auf jedes Orthogonalsystem verschwinden, d. h. daß $H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\lambda\mu}$ die Form hat

$$H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\mu\lambda} = \frac{1}{n} C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} g_{\alpha\beta}\, g^{\gamma\delta} H^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\gamma\delta}. \tag{38}$$

Aus (13) und (δ) folgt

$$\boxed{i^{\lambda}_{a}\, i^{\mu}_{b}\, i^{\omega}_{c} V_{\omega} h_{\mu\lambda} = 0} \qquad \begin{pmatrix} a, b, c \neq \\ h_{aa} + h_{bb} = h_{cc} \end{pmatrix}. \tag{D}$$

Umgekehrt folgt (δ) aus (D) und (13). Offenbar ist (C) eine Folge von (D). Es ist zu beachten, daß (δ) und (D) im Gegensatz zu (α), (β) und (A), (B), (C) nicht allgemein gelten, sobald sie für irgendeine Wahl der ν gelten. Wo wir im folgenden (D) als Bedingung einführen, soll stets gemeint sein, daß die Gültigkeit von (D) für jede Wahl des Systems der i^{ν}_{a} verlangt wird. Statt (D) läßt sich dann auch die aus (38) folgende vom Bezugssystem freie Gleichung

$$\boxed{C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda}\left(V_{\alpha} C'^{\nu}_{\beta} - \frac{1}{n} g_{\alpha\beta}\, g^{\varepsilon\eta} C'^{\gamma\delta}_{\varepsilon\eta} V_{\gamma} C'^{\nu}_{\delta}\right)} \tag{D'}$$

verwenden. Bei Einführung von (D) statt (C) ändert sich die geometrische Deutung auf S. 712. Die Gleichungen (A), (B) und (D) bringen zum Ausdruck, *daß der Zuwachs von $h_{\mu\lambda}$ bei einer beliebigen Verrückung dx^{ν} in der Ebene einer Hauptrichtung und i^{ν}_{n} stets ein Tensor ist, dessen Komponente senkrecht zu i^{ν}_{n} und dx^{ν} Hauptgebiete hat, die sämtliche Hauptgebiete der zu dx^{ν} senkrechten Komponente von $h_{\mu\lambda}$ enthalten.*

§ 6.

Die Bedingungen (E), (F) und (G).

Infolge (8a) ist (32α) gleichwertig mit

$$(39\alpha) \qquad \boxed{\overset{\lambda}{y}\,\overset{\mu}{n}\,i\,\nabla_\mu \overset{}{x}\,j_\lambda = 0}\,.$$

Ersetzen wir (C) durch (D), so wird (32δ) gleichwertig mit

$$(39\beta) \qquad \boxed{\overset{\lambda}{y}\,\overset{\mu}{u}\,j\,\nabla_\mu \overset{}{x}\,j_\lambda = 0}\,, \qquad x, y \neq .$$

Schließlich ist, unter allen Umständen (Beweis wie (17)), (32ε) gleichwertig mit

$$(39\gamma) \qquad \boxed{\overset{\lambda}{y}\,\overset{\mu}{z}\,j\,\nabla_\mu \overset{}{x}\,j_\lambda = 0}\,, \qquad x, y, z \neq .$$

Zur Ableitung der Integrabilitätsbedingungen von (39α, β) bringe wir diese Gleichungen zunächst auf eine einfachere Form. Es sei B_λ^ν de Einheitsaffinor der V_{n-k} von $\overset{\nu}{n}\,i$ und $\overset{\nu}{u}\,i$

$$(40) \qquad B_\lambda^\nu = \overset{}{n}\,i_\lambda\,\overset{\nu}{n}\,i + \sum_u \overset{}{u}\,j_\lambda\,\overset{\nu}{u}\,j$$

und B'^ν_λ der Einheitsaffinor der V_{n-k-1} von $\overset{\nu}{u}\,i$

$$(41) \qquad B'^\nu_\lambda = \sum_u \overset{}{u}\,j_\lambda\,\overset{\nu}{u}\,j\,.$$

Dann sind (39α, β) gleichwertig mit

$$(42) \qquad C'^\alpha_\lambda\, B^\beta_\mu\, \nabla_\beta \overset{}{x}\,j_\alpha = 0$$

oder

$$(43) \qquad B^\beta_\mu\, \nabla_\beta \overset{}{x}\,j_\lambda = \overset{}{x}\,j_\alpha B^\beta_\mu\, \nabla_\beta\, C'^\alpha_\lambda\,.$$

Die Integrabilitätsbedingungen von (43) lauten

$$(44) \qquad B^{\gamma\delta}_{[\omega\mu]}\, \nabla_\gamma\, B^\beta_\delta\, \nabla_\beta \overset{}{x}\,j_\lambda = B^{\gamma\delta}_{[\omega\mu]}\, \nabla_\gamma \overset{}{x}\,j_\alpha B^\beta_\delta\, \nabla_\beta\, C'^\alpha_\lambda\,.$$

Da aber[11])

$$(45) \qquad B^{\gamma\delta}_{[\omega\mu]}\, \nabla_\gamma\, B^\beta_\delta = 0\,,$$

gehen diese Gleichungen über in

$$(46) \qquad B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]}\, \nabla_\gamma\, \nabla_\beta \overset{}{x}\,j_\lambda = B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} (\nabla_\gamma \overset{}{x}\,j_\alpha)\, \nabla_\beta\, C'^\alpha_\lambda + \overset{}{x}\,j_\alpha B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]}\, \nabla_\gamma\, \nabla_\beta\, C^{\ \alpha}$$

[11]) R. K. S. 182 (80).

oder

47) $$\frac{1}{2} B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} K_{\gamma\beta\lambda}^{\cdot\cdot\nu} \underset{x}{j}_{\nu} = -\frac{1}{2} \underset{x}{j}_{\alpha} B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} K_{\gamma\beta\delta}^{\cdot\cdot\alpha} C'^{\delta}_{\lambda} + \frac{1}{2} \underset{x}{j}_{\alpha} B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} K_{\gamma\beta\lambda}^{\cdot\cdot\delta} C'^{\alpha}_{\delta}$$
$$+ B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} \Big\{ (\nabla_{\gamma} \underset{x}{j}_{\alpha}) \sum_{y} (\nabla_{\beta} \underset{y}{j}_{\lambda}) \underset{y}{j}^{\alpha} + (\nabla_{\gamma} \underset{x}{j}_{\alpha}) \sum_{y} \underset{y}{j}_{\lambda} \nabla_{\beta} \underset{y}{j}^{\alpha} \Big\}.$$

Nun enthält $\underset{u}{i}^{\nu} \nabla_{\gamma} \underset{x}{j}_{\alpha}$ infolge (14a), (δ) und (39β) nur $\underset{n}{i}_{\alpha}$ und $\underset{u}{i}_{\alpha}$, so daß 47) unter Mitberücksichtigung von (8) übergeht in

48) $$\frac{1}{2} B^{\gamma\beta}_{\omega\mu} C'^{\alpha}_{\lambda} K_{\gamma\beta\alpha}^{\cdot\cdot\nu} \underset{x}{j}_{\nu} = B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} \Big\{ \sum_{y} \underset{y}{j}_{\lambda} (\nabla_{\gamma} \underset{x}{j}_{\alpha}) \underset{n}{i}^{\alpha} \underset{n}{i}^{\delta} (\nabla_{\beta} \underset{y}{j}_{\delta}) \Big\}$$
$$= B^{\gamma\beta}_{[\omega\mu]} \Big\{ \sum_{y} \underset{y}{j}_{\lambda} \underset{x}{j}^{\alpha} \underset{y}{j}^{\delta} h_{[\gamma[\alpha} h_{\beta]\delta]} \Big\} = 0.$$

Die Integrabilitätsbedingungen lauten also schließlich

49) $$B^{\gamma\beta}_{\omega\mu} C'^{\alpha\delta}_{\lambda\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta} = 0,$$

und diese Gleichung läßt sich zerlegen in

E) $$\boxed{B'^{\gamma\beta}_{\omega\mu} C'^{\alpha\delta}_{\lambda\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta} = 0},$$

F) $$\boxed{B'^{\gamma}_{\omega} C'^{\alpha\delta}_{\lambda\nu} K_{\gamma\mu\alpha\delta} \underset{n}{i}^{\beta} = 0}.$$

(E) und (F) sind offenbar gleichwertig mit

E_1) $$\boxed{K_{uvxy} = 0},$$

F_1) $$\boxed{K_{unxy} = 0},$$

gültig in bezug auf jedes *ausgezeichnete*, d. h. $\underset{n}{i}^{\nu}$ enthaltende und übrigens ganz innerhalb der Hauptgebiete von $h_{\mu\lambda}$ gelegene Orthogonalnetz.

Die Gleichung (39γ) ist dann und nur dann vollständig integrabel, wenn die V_k k-fache Orthogonalsysteme in jeder Richtung und Lage zulassen. Dies ist aber für $k \leqq 3$ immer der Fall, für $k > 3$ nur, wenn die V_k konform-euklidisch sind[11a]). Ist also $K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ die Krümmungsgröße der V_k, $g'_{\lambda\mu}$ der Fundamentaltensor und $C'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\omega\mu\lambda}$ die (für $k \leqq 3$ identisch verschwindende) Konformkrümmungsgröße:

50) $$C'_{\omega\mu\lambda\nu} = K'_{\omega\mu\lambda\nu} - \frac{4}{k-2} g'_{[\omega[\lambda} L'_{\mu]\nu]};$$

$$L'_{\mu\lambda} = -K'^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{\nu\mu\lambda\nu} + \frac{1}{2(k-1)} g'_{\mu\lambda} K'^{\cdot\cdot\cdot\mu\nu}_{\nu\mu\nu},$$

[11a]) R. K. S. 196.

so lauten die Integrabilitätsbedingungen von (39γ)

$$(G) \qquad \boxed{C'_{\omega\mu\lambda\nu} = 0}$$

Nach einem bekannten Satze[12]) ist (G) gleichwertig mit der Forderung, daß die orthogonalen Bestimmungszahlen von $K'_{\omega\mu\lambda\nu}$ mit mehr als drei ungleichen Indizes in bezug auf jedes orthogonale Bezugssystem verschwinden:

$$(51) \qquad K_{xyzp} = 0 \qquad (x, y, z, p = 1, \ldots, k; \quad x, y, z, p \neq)$$

Da aber (Gaußsche Gleichung, R. K. S. 198)

$$(52) \qquad K'_{\omega\mu\lambda\nu} = C'^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} \left\{ K_{\alpha\beta\gamma\delta} + 2 \sum_{u} (V_{[\alpha} \overset{i}{\underset{u}{}}_{|\gamma]}) V_{\beta]} \overset{i}{\underset{u}{}}_{\delta]} \right\},$$

verschwinden infolge (δ) auch alle orthogonalen Bestimmungszahlen von $C'^{\alpha\beta\gamma\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} K_{\alpha\beta\gamma\delta}$ mit mehr als drei ungleichen Indizes. (G) ist also auch gleichwertig mit

$$(G_1) \qquad K_{xyzp} = 0 \qquad (x, y, z, p = 1, \ldots, k; \quad x, y, z, p \neq)$$

gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz. Diese Gleichung bringt zum Ausdruck, daß $C'^{\alpha\beta}_{\mu\lambda} \overset{i}{\underset{x}{}}^{\omega} \overset{i}{\underset{p}{}}^{\nu} K_{\omega\mu\lambda\nu}$ in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz nur Bestimmungszahlen mit zwei gleichen Indizes besitzt. Infolgedessen ist (G) gleichwertig mit

$$(G_2) \qquad K_{xyyp} = K_{xzzp} \qquad (x, y, z, p = 1, \ldots, k; \quad x, y, z, p \neq)$$

ebenfalls gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz.

§ 7.

Die abschließende Bedingung (H).

Die Untersuchung ist damit noch nicht beendet; zwar sichern (A), (B), (D), (E), (F) und (G) die vollständige Integrabilität von $(39\alpha, \beta)$ und (39γ), es ist aber noch nicht sicher, daß sich die zu irgendwelchen n vorgegebenen Hauptrichtungen in einem Punkte P gehörigen Lösungen von $(39\alpha, \beta)$ so konstruieren lassen, daß sie auch Lösungen von (39γ) sind.

Wir fangen an mit der V_k durch P und konstruieren zunächst ein infolge (G) stets existierendes Orthogonalsystem $\overset{j}{\underset{x}{}}^{\nu}$ in dieser V_k, das in P die vorgeschriebenen Richtungen besitzt. Die Gleichungen $(39\alpha, \beta)$ bringen zum Ausdruck, daß das geodätische Differential von $\overset{j}{\underset{x}{}}^{\nu}$ bei einer Ver-

[12]) R. K. S. 171.

rückung in einer Richtung senkrecht zur V_k des betrachteten Hauptgebietes, senkrecht zu diesem Hauptgebiet ist. Ausgehend von einem beliebigen Punkte Q der V_k durch P und fortschreitend nach einem Punkte Q', $QQ' \perp V_k$, konstruiert man also den Vektor $\underset{x}{j}^{\nu}$ in Q', indem man den Vektor $\underset{x}{j}^{\nu}$ in Q pseudoparallel verschiebt und den in dieser Weise erhaltenen Vektor auf V_k in Q' projiziert. In dieser Weise fortschreitend bekommt man in jedem Punkte der V_n ein System von k Vektoren $\underset{x}{j}^{\nu}$. Daß der Prozeß integrabel ist, ist gesichert durch die Integrabilitätsbedingungen (A), (B), (D), (E), (F). Ist nun aber das in solcher Weise in jeder V_k der V_n induzierte Orthogonalnetz auch ein Orthogonalsystem, d. h. genügt es der Gleichung (39γ)? In den Punkten der V_k durch P ist (39γ) erfüllt, notwendig und hinreichend ist also, daß diese Gleichung bei allen Verrückungen senkrecht zum betrachteten Hauptgebiet erhalten bleibt. Die Gleichung

$$(\underset{y}{j}^{\lambda} + \delta \underset{y}{j}^{\lambda})(\underset{z}{j}^{\mu} + \delta \underset{z}{j}^{\mu}) V_{\mu} (\underset{x}{j}^{\lambda} + \delta \underset{x}{j}^{\lambda}) = 0 \qquad (x, y, z \neq) \tag{53}$$

soll also eine Folge sein von (39) für jede Verrückung senkrecht zum betrachteten Hauptgebiet. Infolge (8), (14b), (39) ist (53) gleichwertig mit

$$B^{\alpha}_{\omega}(V_{\alpha}\underset{y}{j}^{\lambda})\underset{z}{j}^{\mu} V_{\mu}\underset{x}{j}_{\lambda} + B^{\alpha}_{\omega}\underset{y}{j}^{\lambda}(V_{\alpha}\underset{z}{j}^{\mu})V_{\mu}\underset{x}{j}_{\lambda} + \underset{y}{j}^{\lambda}\underset{z}{j}^{\mu} B^{\alpha}_{\omega} V_{\mu} V_{\alpha}\underset{x}{j}_{\lambda} = 0 \tag{54}$$

$$(x, y, z \neq)$$

oder

$$B^{\alpha}_{\omega} V_{\alpha}\underset{y}{j}^{\lambda}\underset{z}{j}^{\mu} V_{\mu}\underset{x}{j}_{\lambda} - \underset{y}{j}^{\lambda}\underset{z}{j}^{\mu} B^{\alpha}_{\omega} V_{\alpha} V_{\mu}\underset{x}{j}_{\lambda} + \underset{y}{j}^{\lambda}\underset{z}{j}^{\mu} B^{\alpha}_{\omega} V_{\mu} V_{\alpha}\underset{x}{j}_{\lambda} = 0 \tag{55}$$

$$(x, y, z \neq)$$

oder, infolge (39γ), auch mit

$$B^{\alpha}_{\omega} K_{\alpha\mu\lambda\nu}\underset{x}{j}^{\mu}\underset{y}{j}^{\lambda}\underset{z}{j}^{\nu} = 0 \qquad (x, y, z \neq). \tag{56}$$

Diese Gleichungen bringen zum Ausdruck, daß jede orthogonale Bestimmungszahl von $\underset{M}{i}^{\gamma} C'^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta}$ $(M = k+1, \ldots, n)$ mit drei ungleichen Indizes in bezug auf jedes beliebige orthogonale Bezugssystem verschwindet. Dies ist aber dann und nur dann der Fall, wenn diese Größe geschrieben werden kann in der Form

$$g_{\varepsilon\eta} C'^{\varepsilon\,\eta\,u}_{\lambda[\mu}\overset{u}{v}_{\nu]}, \tag{57}$$

wo $\overset{u}{v}_{\nu}$ ein beliebiger Vektor der V_k ist. $B^{\gamma}_{\omega} C'^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta}$ soll also die Form haben:

$$B^{\gamma}_{\omega} C'^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta} = g_{\varepsilon\eta} C'^{\varepsilon\,\eta}_{\lambda[\mu} P_{\nu]\omega}. \tag{58}$$

Daraus folgt bei Überschiebung mit $g^{\lambda\mu}$

$$\frac{k-1}{2} P_{\nu\omega} = B^{\gamma}_{\omega} C'^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} K_{\gamma\beta\alpha\delta} g^{\lambda\mu}, \tag{59}$$

so daß die Integrabilitätsbedingungen schließlich folgende von der speziellen Wahl des orthogonalen Bezugssystems freie Gestalt annehmen:

$$\boxed{B^{\gamma}_{\omega} K_{\gamma\beta\alpha\delta} \left\{ C'^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} - \frac{2}{k-1} C'^{\delta}_{[\nu} g'_{\mu]\lambda} g'^{\beta\alpha} \right\} = 0} \quad . \tag{H}$$

Aus (56) folgt, daß (H) gleichwertig ist mit

$$\boxed{K_{uxyz} = 0} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z = 1, \ldots, k; \; u = k+1, \ldots, n; \\ x, y, z \neq \end{pmatrix} \tag{H_1}$$

oder auch mit

$$\boxed{K_{uxxz} = K_{uyyz}} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z = 1, \ldots, k; \; u = k+1, \ldots, n; \\ x, y, z \neq \end{pmatrix}, \tag{H_2}$$

die beiden letzten Gleichungen gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalsystem.

Mit (H) ist nun ein System von notwendigen und hinreichenden Bedingungen erreicht. Um auch (E), (H) bequem geometrisch formulieren zu können, beweisen wir die Notwendigkeit dieser Bedingungen noch auf einem kürzeren Wege. Sind $\overset{\nu}{j}_1, \ldots, \overset{\nu}{j}_{n-1}$ irgendwelche V_{n-1}-normale Kongruenzen innerhalb der Hauptgebiete, und schreiben wir $\overset{\nu}{i}_n = \overset{\nu}{j}_n$, so ist

$$\overset{\lambda}{k}\, \overset{\mu}{j}\, \nabla_{\mu} \overset{\lambda}{j}_{l} = 0 \qquad (j, k, l = 1, \ldots, n; \; j, k, l \neq). \tag{60}$$

Wird auf diese Gleichung $\overset{\omega}{i}\, \nabla_{\omega}$ $(i = 1, \ldots, n; \; i \neq j, k, l)$ angewendet, so folgt

$$\overset{\lambda}{k}\, \overset{\mu}{j}\, \overset{\omega}{i}\, \nabla_{\omega} \nabla_{\mu} \overset{\lambda}{j}_{l} = 0 \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n; \; i, j, k, l \neq), \tag{61}$$

also, da die Kongruenzen j^{ν} in jedem Punkte jede Lage innerhalb der Hauptgebiete einnehmen können,

$$\boxed{K_{ijkl} = 0} \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n; \; i, j, k, l \neq), \tag{J}$$

gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz. (J) enthält mehr als (E) bis (H), z. B. auch noch Gleichungen der Form

$$K_{xuyv} = 0 \quad (x, y = 1, \ldots, k; \; u, v = k+1, \ldots, n-1; \; x \neq y; \; u \neq v), \tag{62}$$

und bringt zum Ausdruck, daß die orthogonalen Bestimmungszahlen von $K_{\omega\mu\lambda}{}^{\nu}$ in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz verschwinden, so-

ern sie vier ungleiche Indizes aufweisen. Da Orthogonalität konformnvariant ist, liegt es nahe, der umfassenden Bedingung (J) eine Form zu geben, die nur die Konformkrümmungsgröße

(63) $$C_{\omega\mu\lambda\nu} = K_{\omega\mu\lambda\nu} - \frac{4}{n-2} g_{[\omega[\lambda} L_{\mu]\nu]}$$

enthält. Diese Form entsteht durch Überschiebung von (63) mit $\overset{\omega}{i}\ \overset{\mu}{i}\ \overset{\lambda}{i}\ \overset{\nu}{i}$:

(J_1) $$\boxed{C_{ijkl} = 0} \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n;\ i, j, k, l \neq).$$

Sie ist gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz und bringt zum Ausdruck, daß für die orthogonalen Bestimmungszahlen von $C_{\omega\mu\lambda\nu}$ mit vier ungleichen Indizes derselbe Satz gilt. Wir haben also folgenden Satz erhalten:

Zu einer V_{n-1}-normalen Kongruenz $\overset{\nu}{i}$ läßt sich dann und nur dann zu jedem in einem beliebigen Punkte P gegebenen System von Hauptrichtungen von $h_{\mu\lambda}$ (Definition S. 709) *ein Orthogonalsystem konstruieren, das $\overset{\nu}{i}$ enthält und übrigens in P mit diesen Richtungen und in jedem anderen Punkte mit beliebigen Hauptrichtungen von $h_{\mu\lambda}$ zusammenfällt, wenn die Bedingungen* (A), (B), (D) bis (H) *erfüllt sind, oder geometrisch ausgedrückt, wenn*

1. *der Zuwachs von $h_{\mu\lambda}$ bei einer beliebigen Verrückung in der Ebene einer Hauptrichtung und $\overset{\nu}{i}$ eine Komponente senkrecht zu dx^ν und $\overset{\nu}{i}$ hat, deren Hauptgebiete die Hauptgebiete der zu dx^ν senkrechten Komponente von $h_{\mu\lambda}$ enthalten* (*Bedingungen* (A), (B), (D)), *und*

2. *die orthogonalen Bestimmungszahlen von $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ (oder auch $C_{\omega\mu\lambda\nu}$) mit mehr als drei ungleichen Indizes in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz* (Definition S. 719) *verschwinden* (*Bedingung* (J)).

Hat $h_{\mu\lambda}$ nur eindeutig bestimmte Hauptrichtungen, so genügen (A) *und* (B), *gibt es nur zweidimensionale Hauptgebiete, so genügen* (A), (B), (D), (E) *und* (F), *und ist die Dimensionenzahl keines der Hauptgebiete größer als drei, so genügen* (A), (B), (D), (E), (F) *und* (H).

B. Tensorfeld mit V_{n-1}-normalen Hauptrichtungen.

§ 1.

Eindeutig bestimmte Hauptrichtungen.

Es sei ein Tensorfeld $T_{\lambda\mu}$ in V_n gegeben. Wir nehmen zunächst an, daß $T_{\lambda\mu}$ nur eindeutig bestimmte Hauptrichtungen hat, und legen die Kongruenzen $\overset{\nu}{i}$ $(j = 1, \ldots, n)$ in diese Richtungen:

(64) $$\overset{\lambda}{i}\ \overset{\mu}{i}\ T_{\mu\lambda} = 0 \qquad (j, k = 1, \ldots, n;\ j \neq k).$$

Die Hauptrichtungen sind dann und nur dann V_{n-1}-normal, wenn

$$(\beta_0^*) \qquad \boxed{i^\lambda_k\, i^\mu_l\, \nabla_\mu\, i_{j\lambda} = 0} \qquad (j, k, l = 1, \ldots, n;\ j, k, l \neq).$$

Differentiation von (64) ergibt

$$(65) \qquad i^\omega_l (\nabla_\omega i^\lambda_j)\, i^\mu_k\, T_{\mu\lambda} + i^\lambda_j\, i^\omega_l (\nabla_\omega i^\mu_k)\, T_{\mu\lambda} + i^\lambda_j\, i^\mu_k\, i^\omega_l \nabla_\omega T_{\mu\lambda} = 0$$

oder

$$(66) \qquad (T_{kk} - T_{jj})\, i^\omega_l\, i^\lambda_k \nabla_\omega\, i_{j\lambda} + i^\lambda_j\, i^\mu_k\, i^\omega_l \nabla_\omega T_{\mu\lambda} = 0$$

$$(j, k, l = 1, \ldots, n;\ j, k, l \neq).$$

(β_0^*) ist also gleichwertig mit

$$(\mathrm{B}_0^*) \qquad \boxed{i^\lambda_j\, i^\mu_k\, i^\omega_l \nabla_\omega T_{\mu\lambda} = 0} \qquad (j, k, l = 1, \ldots, n;\ j, k, l \neq).$$

Hat also $T_{\lambda\mu}$ eindeutig bestimmte Hauptrichtungen, so ist (B_0^*) die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese V_{n-1}-normal sind.

§ 2.

Nicht eindeutig bestimmte Hauptrichtungen. Bedingungen (B^*) und (C^*).

Hat $T_{\lambda\mu}$ Hauptgebiete mit mehr als einer Dimension, so wählen wir irgendwelche n gegenseitig senkrechte Hauptrichtungen und legen die Kongruenzen i^ν_j in diese Richtungen. Es gilt dann immer noch (64); T_{jj} ist aber nur dann $\neq T_{kk}$, wenn i^ν_j und i^ν_k zu verschiedenen Hauptgebieten gehören. (β_0^*) gilt nicht mehr, dagegen gilt

$$(\beta^*) \qquad \boxed{i^\lambda_j\, i^\mu_k \nabla_{[\mu}\, i_{l]\lambda} = 0} \qquad (j, k, l \neq;\ T_{jj} \neq T_{ll};\ T_{kk} \neq T_{ll}).$$

Der Beweis verläuft wie in A § 3. Für $T_{jj} \neq T_{kk}$ folgt aus (β^*)

$$(67) \qquad i^\lambda_j\, i^\mu_k \nabla_\mu\, i_{l\lambda} = 0 \qquad (j, k, l \neq;\ T_{jj} \neq T_{kk} \neq T_{ll}).$$

Die Gleichungen (β^*) bringen zum Ausdruck, daß die Kongruenzen einiger Hauptgebiete mit $k_1, k_2, \ldots$ Dimensionen, $k = k_1 + k_2 + \ldots$, V_{n-k}-normal und V_k-bildend sind. Insbesondere sind also die zu einem bestimmten k-dimensionalen Hauptgebiet gehörigen Kongruenzen V_{n-k}-normal und V_k-bildend.

Wie in A § 3 leitet man ab, daß (β^*) gleichwertig ist mit dem Systeme der Gleichungen

(B*) $\boxed{\overset{\lambda}{j}\overset{\mu}{k}\overset{\omega}{l} V_\omega T_{\mu\lambda} = 0}$ $(j, k, l \neq;\ T_{jj}, T_{kk}, T_{ll} \neq)$,

(C*) $\boxed{\overset{\lambda}{l}\overset{\omega}{j}\overset{\mu}{k} V_{[\omega} T_{\mu]\lambda} = 0}$ $(j, k, l \neq;\ T_{jj} = T_{kk} \neq T_{ll})$.

Die Gleichungen (β^*), (B*) und (C*) gelten für jede Wahl der Kongruenzen $\overset{\nu}{j}$ innerhalb der Hauptgebiete, sobald sie für irgendeine Wahl gelten. Die geometrische Bedeutung von (B*) ist dieselbe wie die von (A), (B) auf S. 712, es ist nur $h_{\mu\lambda}$ durch $T_{\mu\lambda}$ zu ersetzen.

§ 3.

Die Forderung der vollständigen Integrabilität. Bedingung (D*).

Die Bedingungen (B*) und (C*) sind notwendig, aber nicht hinreichend. Wir fordern nun wiederum vollständige Integrabilität, d. h. daß sich zu jedem in einem beliebigen Punkte P gegebenen System von n gegenseitig senkrechten, innerhalb der Hauptgebiete gelegenen Richtungen ein System von n V_{n-1}-normalen Kongruenzen konstruieren läßt, das in P eben diese Richtungen hat und in allen anderen Punkten ganz innerhalb der Hauptgebiete liegt. Wie in A § 5 ergeben sich dann die für jede Wahl der $\overset{\nu}{j}$ innerhalb der Hauptgebiete gültigen Gleichungen

(δ^*) $\boxed{\overset{\lambda}{k}\overset{\mu}{l} V_\mu \overset{\lambda}{j} = 0}$

(D*) $\boxed{\overset{\lambda}{j}\overset{\mu}{k}\overset{\omega}{l} V_\omega T_{\mu\lambda} = 0}$ $\left.\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right\}$ $\left(\begin{matrix} j, k, l \neq \\ T_{jj} \neq T_{kk} = T_{ll} \end{matrix}\right)$.

Statt (C*) ist also die umfassendere Bedingung (D*) einzuführen. Geometrisch bedeutet (δ^*), daß die zu irgendeinem Hauptgebiet gehörigen V_k *Mannigfaltigkeiten mit lauter Nabelpunkten sind. Die geometrische Bedeutung von* (B*) *und* (D*) *ist, daß der Zuwachs von* $T_{\lambda\mu}$ *bei einer beliebigen Verrückung* dx^ν *in einer Hauptrichtung stets ein Tensor ist, dessen Komponente senkrecht zu* dx^ν *Hauptgebiete hat, die die Hauptgebiete der zu* dx^ν *senkrechten Komponente von* $T_{\lambda\mu}$ *enthalten.*

§ 4.

Die Bedingungen (E*) und (G*).

Sind nun $\overset{\nu}{j}$ $(x = 1, \ldots, k)$ bzw. $\overset{\nu}{j}$ $(u = k+1, \ldots, n)$ die gesuchten V_{n-1}-normalen Kongruenzen in dem betrachteten Hauptgebiet bzw. senkrecht zu diesem Gebiet, so sind die Integrabilitätsbedingungen der Gleichungen

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\alpha)\quad \overset{u}{j}{}^{\lambda}\,\overset{v}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda]} = 0,\\ &\beta)\quad \overset{u}{j}{}^{\lambda}\,\overset{y}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda]} = 0,\\ &\gamma)\quad \overset{y}{j}{}^{\lambda}\,\overset{z}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{[\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda]} = 0 \end{aligned}$$

aufzustellen, sofern diese nicht schon in (B*) und (D*) enthalten sind. Es bleiben also nur (68β) und (68γ) zur Betrachtung übrig, da (68α) eine Folge von (β^*) und (δ^*) und somit von (B*) und (D*) ist. Aus (D*) folgt ferner

$$(69)\qquad \overset{u}{j}{}^{\lambda}\,\overset{y}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda} = -\,\overset{x}{j}{}^{\lambda}\,\overset{y}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{u}{j}_{\lambda} = 0,$$

so daß (68β) gleichwertig ist mit

$$(70\alpha)\qquad \boxed{\overset{y}{j}{}^{\lambda}\,\overset{v}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda} = 0}.$$

Schließlich ist (68γ) gleichwertig mit

$$(70\beta)\qquad \boxed{\overset{y}{j}{}^{\lambda}\,\overset{z}{j}{}^{\mu}\,\nabla_{\mu}\,\overset{x}{j}_{\lambda} = 0}.$$

Ist B^{ν}_{λ} der Einheitsaffinor der V_{n-k} der $\overset{u}{j}{}^{\nu}$ und C^{ν}_{λ} der Einheitsaffinor der V_k der $\overset{x}{j}{}^{\nu}$

$$B^{\nu}_{\lambda} = \sum_{u}\,\overset{u}{j}_{\lambda}\,\overset{u}{j}{}^{\nu},$$

$$C^{\nu}_{\lambda} = \sum_{x}\,\overset{x}{j}_{\lambda}\,\overset{x}{j}{}^{\nu} = A^{\nu}_{\lambda} - B^{\nu}_{\lambda},$$

so wird, wie in A § 6 dargetan, daß die Integrabilitätsbedingungen von (70α) lauten,

$$(\mathrm{E}^*)\qquad \boxed{{}'B^{\gamma\beta}_{\omega\mu}\,C^{\alpha\delta}_{\lambda\nu}\,K_{\gamma\beta\alpha\delta} = 0}$$

oder

$$(\mathrm{E}_1^*)\qquad \boxed{K_{uvxy} = 0} \qquad \begin{pmatrix} x, y = 1, \ldots, k \\ u, v = k+1, \ldots, n \end{pmatrix},$$

gültig in bezug auf jedes *ausgezeichnete* Orthogonalnetz, d. h. auf jedes Orthogonalnetz, das ganz innerhalb der Hauptgebiete von $T_{\lambda\mu}$ liegt. Ebenso wird gezeigt, wie in A § 6, daß die Integrabilitätsbedingungen

$$(\mathrm{G}^*)\qquad \boxed{C'_{\omega\mu\lambda\nu} = 0}$$

der

G_1^*) $$\boxed{K_{xyzp} = 0} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z, p = 1, \ldots, k \\ x, y, z, p \neq \end{pmatrix},$$

der auch

G_2^*) $$\boxed{K_{xyyp} = K_{xzzp}} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z, p = 1, \ldots, k \\ x, y, z, p \neq \end{pmatrix},$$

ie beiden letzten Gleichungen gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz. Diese Bedingungen sind für $k \leqq 3$ identisch erfüllt.

§ 5.

Die abschließende Bedingung (H^*).

Zu (B^*), (D^*), (E^*), (G^*) gesellen sich nun noch die Bedingungen, ie die vollständige gemeinschaftliche Integrabilität des Systems ($70\alpha, \beta$) ichern. Wie in A § 7 wird dargetan, daß diese Bedingungen lauten on (40β) lauten

H^*) $$\boxed{B^{\lambda}_{\omega} K_{\gamma\beta\alpha\delta} \left\{ C^{\beta\alpha\delta}_{\lambda\mu\nu} - \frac{2}{k-1} C^{\delta}_{[\nu} g'_{\mu]\lambda} g'^{\beta\alpha} \right\} = 0}$$

der

H_1^*) $$\boxed{K_{uxyz} = 0} \qquad \begin{pmatrix} x, y, z = 1, \ldots, k \\ u = k+1, \ldots, n \\ x, y, z \neq \end{pmatrix},$$

der auch

H_2^*) $$K_{uxxz} = K_{uyyz}$$
$$(x, y, z = 1, \ldots, k; \quad u = k+1, \ldots, n; \quad x, y, z \neq),$$

ie beiden letzten Gleichungen gültig in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz. Wie in A § 7 wird gezeigt, daß (E), (G) und (H) enthalten sind in und gleichwertig sind mit der Gleichung

J^*) $$\boxed{K_{ijkl} = 0} \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n; \quad i, j, k, l \neq),$$

der auch mit

J_1^*) $$\boxed{C_{ijkl} = 0} \qquad (i, j, k, l = 1, \ldots, n; \quad i, j, k, l \neq).$$

ie ebenfalls in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz gelten und um Ausdruck bringen, daß alle Bestimmungszahlen von $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ bzw. $C_{\omega\mu\lambda\nu}$ n bezug auf ein solches Netz mit mehr als drei ungleichen Indizes verschwinden.

Es ergibt sich also der Satz:

Zu einem Tensorfeld $T_{\lambda\mu}$ läßt sich dann und nur dann zu jedem in einem Punkte P gegebenen System von n Hauptrichtungen ein n-faches

Orthogonalsystem konstruieren, das in P mit diesen Hauptrichtungen und in jedem anderen Punkte mit irgendwelchen Hauptrichtungen von $T_{\lambda\mu}$ zusammenfällt, wenn die Bedingungen (B*), (D*), (E*), (G*) *und* (H*) *erfüllt sind, oder geometrisch ausgedrückt, wenn*

1. *der Zuwachs von $T_{\lambda\mu}$ bei einer beliebigen Verrückung dx^ν in einer Hauptrichtung stets ein Tensor ist, dessen Komponente senkrecht zu dx^ν Hauptgebiete hat, die die Hauptgebiete der zu dx^ν senkrechten Komponenten von $T_{\lambda\mu}$ enthalten* (*Bedingungen* (B*), (D*)), *und*

2. *die orthogonalen Bestimmungszahlen von $K_{\omega\mu\lambda\nu}$ (oder auch $C_{\omega\mu\lambda\nu}$) mit mehr als drei ungleichen Indizes in bezug auf jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz* (Definition S. 726) *verschwinden* (*Bedingung* (J*)).

Hat $T_{\lambda\mu}$ nur eindeutig bestimmte Hauptrichtungen, so genügt (B*); *gibt es nur zweidimensionale Hauptgebiete, so genügen* (B*), (D*) *und* (E*); *ist die Dimensionenzahl keines der Hauptgebiete größer als drei, so genügen* (B*), (D*), (E*) *und* (H*).

§ 6.

Andere Bedingungen. Eisenhartsche Formeln.

Aus den notwendigen und hinreichenden Bedingungen (B*), (D*), (E*), (G*), (H*) läßt sich noch eine große Anzahl anderer Gleichungen ableiten. Eine dieser Gleichungen, die auch in der Eisenhartschen Arbeit vorkommen, wollen wir hier beispielsweise ableiten. Die Krümmungsgröße der V_k der $\overset{\nu}{i}_x$ hat die Form (vgl. (50))

$$K'_{\omega\mu\lambda\nu} = \frac{4}{k-2}\, g'_{[\omega[\lambda} L'_{\mu]\lambda]}, \tag{71}$$

weil die V_k konformeuklidisch sind. Überdies ist aus demselben Grunde[13])

$$C^{\alpha\beta\gamma}_{\omega\mu\lambda} V_{[\alpha} L'_{\beta]\gamma} = 0. \tag{72}$$

Aus der Gaußschen Gleichung

$$K'_{\omega\mu\lambda\nu} = C^{\gamma\beta\alpha\delta}_{\omega\mu\lambda\nu} \{K_{\gamma\beta\alpha\delta} + 2 \sum_u (V_{[\gamma} \overset{u}{i}_{[\alpha}) (V_{\beta]} \overset{u}{i}_{\delta]})\} \tag{73}$$

folgt ferner

$$\begin{aligned} K'_{xyzp} &= K_{xyzp}, \\ K'_{xyyp} &= K_{xyyp} \end{aligned} \qquad (x, y, z, p = 1, \ldots, k;\ x, y, z, p \neq). \tag{74}$$

Infolgedessen ist

$$\overset{\omega}{j}_x \overset{\mu}{j}_y \overset{\lambda}{j}_y \overset{\nu}{j}_p \left(K_{\omega\mu\lambda\nu} - \frac{4}{k-2}\, g_{[\omega[\lambda} L'_{\mu]\nu]}\right) = 0 \tag{75}$$

$$(x, y, p = 1, \ldots, k;\ x, y, p \neq).$$

[13]) R.K. S. 169.

Wendet man auf diese Gleichung den Operator $j^{\xi}_{y} \nabla_{\xi}$ an, so verschwinden alle Glieder, die ein differenziertes j enthalten, und es bleibt

$$(76) \qquad j^{\xi}_{y} j^{\omega}_{x} j^{\mu}_{y} j^{\lambda}_{y} j^{\nu}_{p} \left(\nabla_{\xi} K_{\omega\mu\lambda\nu} - \frac{4}{k-2} g_{[\omega[\lambda} \nabla_{|\xi|} L'_{\mu]\nu]} \right) = 0 .$$

Da die Kongruenzen j^{ν} innerhalb der Hauptgebiete jede beliebige Lage einnehmen können, dürfen die j^{ν} in (76) durch i^{ν} ersetzt werden, und es gilt also für jedes ausgezeichnete Orthogonalnetz

$$(77) \qquad \nabla_{y} K_{xyyp} = -\frac{1}{k-2} \nabla_{y} L'_{xp} ,$$

woraus unter Berücksichtigung von (72) folgt

$$(78) \qquad \nabla_{y} K_{xyyp} = \nabla_{x} K_{yxxp} \qquad (x, y, p = 1, \ldots, k;\ x; y, p +) .$$ [14])

Für den Fall, daß kein Hauptgebiet mehr als zwei Dimensionen hat, gelangt Eisenhart zu Bedingungen, die gleichwertig sind mit (B*), (D*) und (E*); er stellt aber den Satz auf, daß diese Bedingungen notwendig und hinreichend sind für die Existenz *eines* n-fachen Orthogonalsystems, während wir oben fanden, daß diese Bedingungen erst notwendig werden, wenn vollständige Integrabilität gefordert wird. Bis auf diesen Punkt, der auf eine Ungenauigkeit in der Formulierung zurückgeführt werden mag, herrscht aber noch volle Übereinstimmung.

Sobald die Dimensionenzahl eines der Hauptgebiete größer als zwei wird, ist aber keine Übereinstimmung mehr vorhanden. Zwar finden sich bei Eisenhart Gleichungen, die korrespondieren mit unseren Bedingungen (B*), (D*), (E*), (G*), (H*), daneben finden sich aber noch verschiedene andere, darunter auch solche dritter Ordnung wie (78).

§ 7.

Schluß. Ausblick.

Die Resultate des zweiten Teiles dieser Arbeit ließen sich auch unmittelbar aus den Resultaten des ersten Teiles ableiten. Man braucht dazu die V_n nur in eine V_{n+1} mit dem Linienelement

$$(79) \qquad ds^2 = (dx^{a_{n+1}})^2 + (g_{\lambda\mu} + 2x^{a_{n+1}} T_{\lambda\mu})\, dx^{\lambda} dx^{\mu}$$
$$(\lambda, \mu = a_1, \ldots, a_n)$$

zu legen. Der zweite Fundamentaltensor $h_{\mu\lambda}$ der V_n wird dann gleich $T_{\mu\lambda}$. [15])

Die Frage nach den Systemen von gegenseitig senkrechten V_{n-1}, die sich durch eine allgemeine, nicht V_{n-1}-normale Kongruenz legen lassen,

[14]) Eisenhart, a. a. O. (70) S. 273.

[15]) R. K. S. 176.

die ursprüngliche Frage Riccis, fordert etwas kompliziertere Rechnungen da sich die Bedingungen (G) und (H) nicht mehr so einfach aufstellen lassen. Prinzipielle Schwierigkeiten sind wohl nicht vorhanden, das Resultat dürfte aber die Mühe nicht lohnen.

Anders verhält sich die Sache, sobald man die Forderung der vollständigen Integrabilität fallen läßt. Die einfachste hierher gehörige Frage wäre die, wann es in einer V_n überhaupt ein n-faches Orthogonalsystem gibt, anders gesagt, wann es möglich ist, das Linienelement auf die orthogonale Form

$$ds^2 = \sum_i H_i dx_i^2 \tag{80}$$

zu bringen. Diese Frage ist zurzeit wohl noch nicht beantwortet worden.

Delft, Dezember 1925.

(Eingegangen am 12. Januar 1926.)

Über einen Satz von Herrn Bohr.

Von

S. Sidon in Budapest.

Herr Fejér hat neuerdings[1]) den folgenden Satz bewiesen:

Die Potenzreihe

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

sei konvergent im Einheitskreise $|z| < 1$ *und stelle dort eine Funktion dar, die dem Betrage nach kleiner als* M *bleibt. Dann sind sämtliche Partialsummen im Kreise* $|z| \leqq \frac{1}{2}$ *absolut kleiner als* M, *d. h.*

$$|a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n| \leqq M \quad \left(|z| \leqq \tfrac{1}{2};\ n = 0, 1, 2, \ldots\right).$$

Unter denselben Voraussetzungen wie in diesem Satze hat Herr Bohr vor längerer Zeit[2]) bewiesen, daß,

$$|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \ldots + |a_n| r^n + \ldots = \mathfrak{M}(r) \qquad (0 \leqq r < 1)$$

gesetzt,

$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{3}\right) \leqq M$$

gilt. In der vorliegenden Note soll für diesen Bohrschen Satz ein neuer Beweis gegeben werden, der demjenigen von Herrn Fejér für den eben zitierten Satz analog ist.

Es sei a_0 reell und positiv; dies schränkt ja die Allgemeinheit keines-

---

[1]) L. Fejér, Über die Positivität von Summen, die nach trigonometrischen Funktionen fortschreiten, Acta Litt. et Scientiarum Universitatis Francisco-Josephinae **2** (1925), S. 75—86, insb. S. 81. — Vgl. W. Rogosinski, Über Bildschranken bei Potenzreihen und ihren Abschnitten, Math. Zeitschr. **17** (1923), S. 260—276, insb. § 3.

[2]) H. Bohr, A theorem concerning power series, Proceedings of the London Mathematical Society (2) **13** (1914), S. 1—5; siehe auch E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie (Berlin: Julius Springer, 1916), S. 26—29.

wegs ein. Dann gilt, wenn φ_n das Argument von a_n bedeutet (für $a_n = 0$ setze man z. B. $\varphi_n = 0$) und $0 \leqq r < 1$ ist,

$$\mathfrak{M}(r) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} \left[\Re f(\varrho e^{i\theta})\right] \left[\frac{1}{2} + r e^{-i(\theta+\varphi_1)} + r^2 e^{-i(2\theta+\varphi_2)} + \ldots + r^n e^{-i(n\theta+\varphi_n)} + \ldots\right] d\theta.$$

Da die linke Seite reell ist, so kann der zweite Klammerausdruck unter dem Integralzeichen durch seinen Realteil ersetzt werden, d. h.

$$\mathfrak{M}(r) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varrho \to 1} \int_0^{2\pi} \left[\Re f(\varrho e^{i\theta})\right] \left[\frac{1}{2} + r\cos(\theta+\varphi_1) + r^2\cos(2\theta+\varphi_2) + \ldots + r^n \cos(n\theta+\varphi_n) + \ldots\right] d\theta.$$

Die „Kernfunktion“ dieses Integrals

$$\frac{1}{2} + r\cos(\theta+\varphi_1) + r^2\cos(2\theta+\varphi_2) + \ldots + r^n\cos(n\theta+\varphi_n) + \ldots$$

ist aber sicher nichtnegativ, sobald $r \leqq \frac{1}{3}$. Es ist nämlich dann

$$\frac{1}{2} + r\cos(\theta+\varphi_1) + r^2\cos(2\theta+\varphi_2) + \ldots \geqq \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \ldots = 0.$$

Man hat folglich

$$\mathfrak{M}\left(\frac{1}{3}\right) \leqq \frac{1}{\pi} \operatorname*{Max}_{|z|<1} \left[\Re f(z)\right] \cdot \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cos(\theta+\varphi_1) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cos(2\theta+\varphi_2) + \ldots\right] d\theta$$

$$= \operatorname*{Max}_{|z|<1} \left[\Re f(z)\right] \leqq \operatorname*{Max}_{|z|<1} |f(z)| \leqq M.$$

w. z. b. w.

(Eingegangen am 16. Januar 1926.)

Über die Pole auf dem Rande des Konvergenzgebiets gewisser Potenzreihen.

Von

H. D. Kloosterman in Den Haag.

Einleitung.

Folgender Satz rührt von Herrn P. Fatou[1]) her:

Es sei die Potenzreihe

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

ine rationale Funktion. Die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2 \dots$ *mögen ganze Zahlen sein. Es habe weiter die Potenzreihe den Konvergenzradius eins. Dann ist*

$$f(x) = \frac{P(x)}{(1-x^k)^h},$$

wo $P(x)$ *ein Polynom ist mit ganzen Koeffizienten und wo* k *und* h *ganze Zahlen bedeuten mit* $k > 0$, $h \geqq 0$.

Ich werde jetzt zeigen, daß man in dem Falle, wo die Funktion $f(x)$ uf dem Konvergenzkreise nur einfache Pole hat, die Voraussetzung über ie Koeffizienten a_n durch eine sehr viel allgemeinere ersetzen kann, und war werde ich den folgenden Satz beweisen:

Satz A. *Es seien die folgenden Voraussetzungen erfüllt:*

1°. *Die Potenzreihe*

1) $$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$

abe den Konvergenzradius eins.

2°. *Die Funktion* $f(x)$ *habe auf dem Konvergenzkreise nur eine end-che Anzahl einfacher Pole.*

3°. *Die Menge* $a_0, a_1, a_2, \dots$ *sei nirgends dicht*[2]).

[1]) Acta Mathematica **30** (1906), S. 369–370.

[2]) Eine Menge heißt hier *nirgends dicht*, wenn es kein Gebiet oder Kurvenstück bt, wo sie überall dicht ist.

Dann sind die Pole von $f(x)$ auf dem Einheitskreise rationale Punkte[3] *auf diesem Kreise.*

Nimmt man für die Koeffizienten ganze Zahlen und $f(x)$ rational, so entsteht ein Spezialfall des Fatouschen Satzes.

Hilfssätze.

Hilfssatz 1. *Wenn es zwischen den reellen Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ $(s \geqq 1)$ keine linearen Beziehungen gibt von der Form*

$$l_0 + l_1\varphi_1 + l_2\varphi_2 + \ldots + l_s\varphi_s = 0 \tag{2}$$

mit ganzen Koeffizienten $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_s$, die nicht alle null sind, so liegen in einem s-dimensionalen Raume die Punkte P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den rechtwinkligen Koordinaten[4]

$$x_1 = n\varphi_1 - [n\varphi_1],\ x_2 = n\varphi_2 - [n\varphi_2],\ \ldots,\ x_s = n\varphi_s - [n\varphi_s] \tag{3}$$

überall dicht in dem „n-dimensionalen Einheitswürfel"

$$0 \leqq |x_1| \leqq 1,\ 0 \leqq |x_2| \leqq 1,\ \ldots,\ 0 \leqq |x_s| \leqq 1. \tag{4}$$

Dies ist der berühmte Kroneckersche Approximationssatz. Ein einfacher und schöner Beweis ist gegeben von F. Lettenmeyer[5]).

Hilfssatz 2. *Bestehen zwischen den reellen Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ $(s \geqq 1)$ genau u $(0 \leqq u \leqq s)$ voneinander unabhängige Beziehungen der Form* (2) *mit nicht sämtlich verschwindenden $l_0, l_1, l_2, \ldots, l_s$, so liegen die Punkte P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ mit den rechtwinkligen Koordinaten* (3) *alle auf einer geschlossenen L^*_{s-u}, und zwar überall dicht auf ihr.*

Hier wird unter „geschlossener L^*_{s-u}" verstanden die Gesamtheit der innerhalb des „Einheitswürfels" (4) gelegenen Stücke einer endlichen Anzahl paralleler linearen Räume von $s - u$ Dimensionen, zwischen denen folgende Beziehung besteht: Man denke sich in einem s-dimensionalen Raume einen linearen Raum L_{s-u} von der Beschaffenheit, daß die Koeffizienten der Gleichungen, die diesen Raum bestimmen, alle rationale Zahlen sind. Man reduziere nun die Punkte von L_{s-u} modulo eins auf den „Einheitswürfel". Dann bekommt man innerhalb des „Einheitswürfels" eine endliche Anzahl von linearen Räumen, die zusammen die L^*_{s-u} bilden.

Für den Beweis des Hilfssatzes 2 sei auf die in der Note [5]) erwähnte Abhandlung von F. Lettenmeyer verwiesen.

---

[3]) Ein rationaler Punkt auf dem Einheitskreise ist ein Punkt $e^{2\pi i\varphi}$ mit rationalem φ.

[4]) Wie gewöhnlich wird die größte ganze Zahl, die $\leqq$ der reellen Zahl z ist, mit $[z]$ bezeichnet.

[5]) Proc. of the London Math. Soc. (2), 21 (1923), S. 306–314.

Hilfssatz 3. *Es sei*

$= A_1 e^{2\pi i\psi_1} + A_2 e^{2\pi i\psi_2} + \ldots + A_s e^{2\pi i\psi_s}$ $(A_j \neq 0, j = 1, 2, \ldots, s;\ s \geqq 2)$.

s durchlaufen die ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ *die Intervalle* $0 \leqq \psi_j < 1$. *Dann immt dabei* z *alle Werte eines Gebietes* G *an, das bestimmt wird durch:*

1°. *Falls unter den Zahlen* $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_s|$ *eine Zahl* $|A_\nu|$ *ist, erart, daß*

$$|A_\nu| > \sum_{k=1}^{s} |A_k| - |A_\nu|,$$

o ist G *der Kreisring*

$$r \leqq |z| \leqq R,$$

o

5) $$R = \sum_{k=1}^{s} |A_k|, \quad r = 2|A_\nu| - \sum_{k=1}^{s} |A_k|.$$

2°. *Falls unter den Zahlen* $|A_1|, |A_2|, \ldots, |A_s|$ *keine ist, die größer t als die Summe der übrigen, so ist* G *die Kreisscheibe*

$$|z| \leqq R,$$

o wieder R *durch* (5) *bestimmt ist.*

Dieser Hilfssatz ist bewiesen von H. Bohr [6]).

Beweis des Satzes A.

a) Es seien

$$\varrho_1 = e^{2\pi i\varphi_1}, \quad \varrho_2 = e^{2\pi i\varphi_2}, \quad \ldots, \quad \varrho_s = e^{2\pi i\varphi_s} \qquad (s \geqq 1)$$

ie Pole von $f(x)$ auf dem Einheitskreise, und es seien

$$-A_1, -A_2, \ldots, -A_s$$

ie Residuen in diesen Polen. Dann ist nach den Voraussetzungen

$$f(x) = \frac{A_1}{\varrho_1 - x} + \frac{A_2}{\varrho_2 - x} + \ldots + \frac{A_s}{\varrho_s - x} + b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

o $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots$ eine Potenzreihe ist mit einem Konvergenzdius > 1, so daß

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

iese Gleichung kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$\lim_{n\to\infty} \{a_n - (A_1 e^{-2\pi i(n+1)\varphi_1} + A_2 e^{-2\pi i(n+1)\varphi_2} + \ldots + A_s e^{-2\pi i(n+1)\varphi_s})\} = 0.$$

ieraus ergibt sich, daß die Häufungspunkte der Menge

) $$A_1 e^{-2\pi in\varphi_1} + A_2 e^{-2\pi in\varphi_2} + \ldots + A_s e^{-2\pi in\varphi_s} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

[6]) Acta Mathematica 36 (1913), S. 203–207.

dieselben sind wie die Häufungspunkte der Menge $u_0, a_1, a_2, \ldots$. Die Voraussetzung 3° kann also auch so formuliert werden:

Die Menge (5) *ist nirgends dicht.*

b) Vorausgesetzt, es existiere keine Beziehung der Form (2) zwischen den Größen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$.

Nach Hilfssatz 1 ist es dann möglich, zu s willkürlich gegebenen reellen Zahlen ψ_j und einem willkürlich kleinen, positiven ε eine ganze Zahl n und ganze Zahlen $g_1, g_2, \ldots, g_s$ zu bestimmen, derart, daß

$$|n\varphi_j - g_j - \psi_j| < \varepsilon \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

d. h. man kann n derart bestimmen, daß sich der Ausdruck (5) willkürlich wenig von

$$A_1 e^{2\pi i\psi_1} + A_2 e^{2\pi i\psi_2} + \ldots + A_s e^{2\pi i\psi_s}$$

unterscheidet, wie auch die Zahlen $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_s$ gewählt sind. Nach Hilfssatz 3 kann dieser Ausdruck aber jeden Wert des Gebietes G annehmen (für $s = 1$ ist dieses Gebiet in eine Kreisperipherie entartet). Es würde also die Menge (5) überall dicht liegen im Gebiete G (für $s = 1$ überall dicht auf einer Kreisperipherie), was nach a) nicht der Fall sein kann. *Es muß also mindestens eine lineare Beziehung von der Form* (2) *zwischen den Zahlen* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ *bestehen.*

Falls $s = 1$ ist der Satz A hiermit bewiesen. Wir können also weiter annehmen, daß $s \geqq 2$.

c) *Zunächst wollen wir beweisen, daß die Anzahl der unabhängigen linearen Beziehungen von der Form* (2) *nicht gleich* $s - 1$ *sein kann.*

Vorausgesetzt es existieren $s - 1$ *unabhängige* Beziehungen der Form (2). Dann ist es möglich, die Zahlen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_s$ alle linear mit rationalen Koeffizienten auszudrücken durch eine einzige *irrationale* Zahl φ:

$$\varphi_j = \lambda_j \varphi + \mu_j \qquad (\lambda_j \text{ und } \mu_j \text{ rational}, \; j = 1, 2, \ldots, s)$$

Nach Hilfssatz 2 liegen dann die Punkte P_n überall dicht auf einem geschlossenen L_1^*, d. h. auf den innerhalb des Einheitswürfels gelegenen Stücken einer Anzahl gerader Linien, die alle der Gerade

$$x_1 = \lambda_1 t, \quad x_2 = \lambda_2 t, \quad \ldots, \quad x_s = \lambda_s t$$

parallel sind, wo t ein Parameter ist. Es sei

$$(6) \qquad x_1 = \lambda_1 t + x_1^{(0)}, \; x_2 = \lambda_2 t + x_2^{(0)}, \; \ldots, \; x_s = \lambda_s t + x_s^{(0)}$$

eine dieser Geraden, von der das Segment $t_1 \leqq t \leqq t_2$ gänzlich innerhalb des Einheitswürfels liege. Dann sind die Punkte

$$(7) \qquad A_1 e^{-2\pi i(x_1^{(0)} + \lambda_1 t)} + A_2 e^{-2\pi i(x_2^{(0)} + \lambda_2 t)} + \ldots + A_s e^{-2\pi i(x_s^{(0)} + \lambda_s t)}$$
$$(t_1 \leqq t \leqq t_2)$$

ämtlich Häufungspunkte der Menge (5). Diese Punkte dürfen aber kein Kurvenstück auffüllen. Im allgemeinen wird die Funktion (7) von t nicht onstant sein. Doch ist es möglich, daß in besonderen Fällen solche Beiehungen zwischen den in (7) eingehenden Konstanten bestehen, daß die unktion identisch gleich einer Konstante ist. Gezeigt muß jetzt werden, aß unter den Voraussetzungen des Satzes solche Beziehungen nicht statttden können (und dies ist die Hauptschwierigkeit des Beweises).

Die Funktion (7) ist dann und nur dann konstant, wenn

$$A_1\lambda_1 e^{-2\pi i(x_1^{(0)}+\lambda_1 t)} + A_2\lambda_2 e^{-2\pi i(x_2^{(0)}+\lambda_2 t)} + \ldots + A_s\lambda_s e^{-2\pi i(x_s^{(0)}+\lambda_s t)} = 0 \tag{8}$$

$$\text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Vir werden zuerst zeigen, daß hieraus folgt

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s. \tag{9}$$

Dazu nehmen wir in (8) auffolgend

$$t = t_1,\ t = t_1 + \delta_1,\ t = t_1 + 2\delta_1,\ \ldots,\ t = t_1 + (s-1)\delta_1,$$

vo δ_1 so klein genommen ist, daß $t_1 + (s-1)\delta_1 \leqq t_2$.[7]) Es entstehen ann s lineare homogene Gleichungen in

$$A_1\lambda_1 e^{-2\pi i(x_1^{(0)}+\lambda_1 t_1)},\ A_2\lambda_2 e^{-2\pi i(x_2^{(0)}+\lambda_2 t_1)},\ \ldots,\ A_s\lambda_s e^{-2\pi i(x_s^{(0)}+\lambda_s t_1)}.$$

Veil diese Größen nicht sämtlich verschwinden (denn die A_j sind nicht ull und die λ_j können nicht sämtlich verschwinden), muß die Determinante er s Gleichungen verschwinden. Diese Determinante ist eine sogenannte Determinante von Vandermonde. Also ist

$$\prod_{j,k=1}^{s} (e^{-2\pi i\lambda_j\delta_1} - e^{-2\pi i\lambda_k\delta_1}) = 0.$$

Hieraus schließt man, daß mindestens zwei der Zahlen $e^{-2\pi i\lambda_1\delta_1}$, $^{-2\pi i\lambda_2\delta_1}$, $\ldots$, $e^{-2\pi i\lambda_s\delta_1}$ gleich sein müssen. Ohne Beschränkung der Allemeinheit kann man annehmen, daß dies $e^{-2\pi i\lambda_{s-1}\delta_1}$ und $e^{-\pi i\lambda_s\delta_1}$ sind, also

$$e^{-2\pi i\lambda_{s-1}\delta_1} = e^{-2\pi i\lambda_s\delta_1}.$$

Dies muß aber gültig sein für alle δ_1, die der Ungleichheit $0 \leqq \delta_1 \leqq \frac{t_2-t_1}{s-1}$ enügen. Also muß

$$\lambda_{s-1} = \lambda_s. \tag{10}$$

Für $s = 2$ ist (9) hiermit bewiesen.

---

[7]) Notwendig ist dies natürlich nicht, denn aus der Gültigkeit von (8) für $\leqq t \leqq t_2$ folgt die Gültigkeit für alle Werte von t nach einem bekannten Satze der unktionentheorie. Es ist aber für unseren Beweis nicht nötig, diesen Satz anzuwenen, und er gibt auch keine Vereinfachung des Beweises.

Falls $s \geqq 3$, setzen wir (10) in (8) ein und erhalten

$$(11)\quad A_1\lambda_1 e^{-2\pi i(x_1^{(0)}+\lambda_1 t)} + \ldots + A_{s-2}\lambda_{s-2} e^{-2\pi i(x_{s-2}^{(0)}+\lambda_{s-2}t)} + \lambda_{s-1}(A_{s-1}e^{-2\pi i x_{s-1}^{(0)}} + A_s e^{-2\pi i x_s^{(0)}})\, e^{-2\pi i\lambda_{s-1}t} = 0$$
$$\text{für } t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Ähnlich wie oben nehmen wir hier jetzt auffolgend

$$t = t_1,\ t = t_1 + \delta_2,\ \ldots,\ t = t_1 + (s-2)\delta_2,$$

wo $t_1 + (s-2)\delta_2 \leqq t_2$. In den erhaltenen Gleichungen muß entweder

$$(12)\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{s-2} = 0, \quad A_{s-1}e^{-2\pi i x_{s-1}^{(0)}} + A_s e^{-2\pi i x_s^{(0)}} = 0$$

oder die Determinante muß verschwinden, welches letztere wie oben ergibt, daß zwei Zahlen der Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{s-1}$ einander gleich sein müssen. Die Gleichungen (12) ergeben auch, daß zwei Zahlen dieser Reihe gleich sein müssen, nämlich null, ausgenommen für $s = 3$. Wir werden aber zeigen, daß für $s = 3$

$$\lambda_1 = 0, \quad A_2 e^{-2\pi i x_2^{(0)}} + A_3 e^{-2\pi i x_3^{(0)}} = 0$$

nicht richtig sein kann.

Denn die Menge (5) würde dann sein

$$(13)\quad A_1 e^{-2\pi i n\mu_1} + e^{-2\pi i\lambda_2 n\varphi}(A_2 e^{-2\pi i n\mu_2} + A_3 e^{-2\pi i n\mu_3}) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

und dies ergibt, wie wir zeigen werden,

$$(14)\quad A_2 e^{-2\pi i k\mu_2} + A_3 e^{-2\pi i k\mu_3} = 0 \quad \text{für} \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots .$$

Denn es sei für ein bestimmtes k (14) nicht erfüllt. Dann wäre es wegen der Rationalität von μ_2 und μ_3 möglich unendlich viele n zu finden, derart, daß

$$A_2 e^{-2\pi i k\mu_2} + A_3 e^{-2\pi i k\mu_3} = A_2 e^{-2\pi i n\mu_2} + A_3 e^{-2\pi i n\mu_3}.$$

Diese Werte von n bilden eine unendliche arithmetische Reihe, und wenn n diese Reihe durchläuft, hat die Menge $e^{-2\pi i\lambda_2 n\varphi}$ und also (wegen der Rationalität von μ_1) auch die Menge (13) Limespunkte, die ein Kurvenstück auffüllen, was nicht möglich ist.

Aus (14) würde folgen $e^{-2\pi i\mu_2} = e^{-2\pi i\mu_3}$ oder auch (in Verbindung mit $\lambda_2 = \lambda_3$), daß $\varrho_2 = \varrho_3$, was nicht der Fall ist.

Es müssen also zwei Zahlen der Reihe $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{s-1}$ einander gleich sein. Zwei Fälle sind jetzt zu unterscheiden. Entweder ist λ_{s-1} eine dieser beiden Zahlen (was natürlich für $s = 3$ eintritt), in welchem Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit (wegen (10))

$$(15a)\quad \lambda_{s-2} = \lambda_{s-1} = \lambda_s$$

genommen werden kann, oder die zwei gleichen Zahlen sind beide von λ_{s-1} verschieden (was nur für $s \geqq 4$ eintritt), in welchem Falle ohne Beschränkung der Allgemeinheit

$$\lambda_{s-3} = \lambda_{s-2}, \quad \lambda_{s-1} = \lambda_s \tag{15b}$$

genommen werden kann.

Für $s = 3$ ist (9) hiermit bewiesen.

Im Falle $s \geqq 4$ setzen wir (15a) bzw. (15b) in (8) ein und erhalten

$$\sum_{j=1}^{s-3} A_j \lambda_j e^{-2\pi i (x_j^{(0)} + \lambda_j t)} + \lambda_{s-2} e^{-2\pi i \lambda_{s-2} t} \sum_{j=s-2}^{s} A_j e^{-2\pi i x_j^{(0)}} = 0 \tag{16a}$$

für $t_1 \leqq t \leqq t_2$

bzw.

$$\sum_{j=1}^{s-4} A_j \lambda_j e^{-2\pi i (x_j^{(0)} + \lambda_j t)} + \lambda_{s-3} e^{-2\pi i \lambda_{s-3} t} \sum_{j=s-3}^{s-2} A_j e^{-2\pi i x_j^{(0)}} + \lambda_{s-1} e^{-2\pi i \lambda_{s-1} t} \sum_{j=s-1}^{s} A_j e^{-2\pi i x_j^{(0)}} = 0 \tag{16b}$$

für $t_1 \leqq t \leqq t_2$

(im Falle $s = 4$ ist unter $\sum_{j=1}^{s-4}$ *Null* zu verstehen.)

Die zwei Schritte zum Beweise von (9) (nämlich erstens der Beweis von (10) und zweitens der Beweis von (15a) bzw. (15b)), die wir jetzt ausgeführt haben, sind Spezialfälle der folgenden

Behauptung. Aus

$$\sum_{h=0}^{r-1} \lambda_{N_h+1} e^{-2\pi i \lambda_{N_h+1} t} \sum_{j=N_h+1}^{N_{h+1}} A_j e^{-2\pi i x_j^{(0)}} = 0 \quad \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2, \tag{17}$$

wo

$$1 \leqq N_1 < N_2 < N_3 < \ldots < N_{r-1} < s; \quad N_0 = 0; N_1, N_2, \ldots, N_{r-1} \text{ ganz};$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{N_1}; \quad \lambda_{N_1+1} = \lambda_{N_1+2} = \ldots = \lambda_{N_2}; \quad \ldots;$$

$$\lambda_{N_{r-1}+1} = \lambda_{N_{r-1}+2} = \ldots = \lambda_s$$

folgt die Gleichheit von zwei Zahlen der Reihe

$$\lambda_1, \lambda_{N_1+1}, \lambda_{N_2+1}, \ldots, \lambda_{N_{r-1}+1}. \tag{18}$$

Zum Beweise nehmen wir auffolgend $t = t_1$, $t = t_1 + \delta$, $t = t_1 + 2\delta$, $\ldots$, $t = t_1 + r\delta$, und erhalten so aus (17) r homogene lineare Gleichungen in den r Größen

$$\lambda_{N_h+1} e^{-2\pi i \lambda_{N_h+1} t_1} \sum_{j=N_h+1}^{N_{h+1}} A_j e^{-2\pi i x_j^{(0)}} \quad (h = 0, 1, 2, \ldots, r-1). \tag{19}$$

Es muß entweder die Determinante des Gleichungssystems null sein, woraus in oben schon angedeuteter Weise die Behauptung folgt, oder die

Größen (19) müssen alle verschwinden. Die Größen (19) können dadurch verschwinden, daß die Größen λ_{N_h+1} null sind. Wenn mehr als zwei null sind, ist die Behauptung bewiesen. Wenn nur eine null ist, kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß dies λ_1 ist. Dann ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{N_1} = 0, \quad \lambda_m \neq 0 \qquad (m > N_1). \tag{20}$$

Die Menge (5) erhält jetzt die Form

$$\sum_{j=1}^{N_1} A_j e^{-2\pi i n \mu_j} + \sum_{h=1}^{r-1} e^{-2\pi i \lambda_{N_h+1} n \varphi} \sum_{j=N_h+1}^{N_{h+1}} A_j e^{-2\pi i n \mu_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

oder

$$\sum_{h=0}^{r-1} e^{-2\pi i \lambda_{N_h+1} n \varphi} \sum_{j=N_h+1}^{N_{h+1}} A_j e^{-2\pi i n \mu_j} \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

je nachdem $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_1 \neq 0$. Die Zahl

$$\sum_{j=1}^{N_1} A_j e^{-2\pi i n \mu_j}$$

nimmt nur eine endliche Anzahl von Werten an, wenn $n = 1, 2, 3, \ldots$. Schreiben wir jetzt zur Abkürzung

$$\lambda_{N_h+1} = \Lambda_h, \qquad \sum_{j=N_h+1}^{N_{h+1}} A_j e^{-2\pi i n \mu_j} = B_h \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, r-1),$$

so wird die Behauptung bewiesen sein, wenn bewiesen ist, daß die Menge

$$B_0 e^{-2\pi i \Lambda_0 n \varphi} + B_1 e^{-2\pi i \Lambda_1 n \varphi} + \ldots + B_{r-1} e^{-2\pi i \Lambda_{r-1} n \varphi} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{21a}$$

bzw.

$$B_1 e^{-2\pi i \Lambda_1 n \varphi} + \ldots + B_{r-1} e^{-2\pi i \Lambda_{r-1} n \varphi} \qquad (n = 1, 2, \ldots) \tag{21b}$$

(je nachdem $\lambda_1 = 0$ oder $\lambda_1 \neq 0$) Häufungspunkte hat, die ein Kurvenstück auffüllen, wenn nicht zwei der Λ_j gleich sind.

Falls der Ausdruck (21a) bzw. (21b) nur ein Glied enthält, ist es einleuchtend, daß die Häufungspunkte ein Kurvenstück auffüllen.

Wir nehmen $n = k + n_1 A$, wo k fest bleibt, A so groß gewählt ist, daß $A\mu_1, A\mu_2, \ldots, A\mu_s$ ganze Zahlen sind, und $n_1 = 1, 2, \ldots$. Wenn n diese arithmetische Reihe durchläuft, ändern $B_0, B_1, \ldots, B_{r-1}$ sich nicht. Es gibt ein Intervall $t_1' \leqq t \leqq t_2'$ derart, daß die Punkte

$$B_0 e^{-2\pi i \Lambda_0 t} + B_1 e^{-2\pi i \Lambda_1 t} + \ldots + B_{r-1} e^{-2\pi i \Lambda_{r-1} t} \qquad (t_1' \leqq t \leqq t_2')$$

Häufungspunkte sind der Menge (21a). Hieraus schließt man

$$B_0 \Lambda_0 e^{-2\pi i \Lambda_0 t} + B_1 \Lambda_1 e^{-2\pi i \Lambda_1 t} + \ldots + B_{r-1} \Lambda_{r-1} e^{-2\pi i \Lambda_{r-1} t} = 0$$

für $t_1' \leqq t \leqq t_2'$.

Gibt man hier t die Werte

$$t_1', \quad t_1'+\delta', \quad t_1'+2\delta', \quad \ldots, \quad t_1'+(r-1)\delta',$$

so erhält man r lineare homogene Gleichungen, von denen entweder die Determinante verschwinden muß, woraus in oben schon ausgeführter Weise die Gleichheit zweier Zahlen der Reihe (18) folgt, oder es ist $B_j A_j = 0$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, r-1)$. Wenn zwei oder mehrere der A_j null sind, ist damit die Behauptung bewiesen. Wenn nur $A_0 = 0$, kann also $A_1 \neq 0$ vorausgesetzt werden. Dann muß also $B_1 = 0$ sein. Dies kann man aber für jeden Wert von k beweisen. Es ist also

$$\sum_{j=N_1+1}^{N_2} A_j e^{-2\pi i k \mu_j} = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots).$$

Weil die $A_j \neq 0$ sind, würde hieraus die Gleichheit zweier $e^{2\pi i \mu_j}$ folgen und hieraus (weil auch die entsprechenden λ_j gleich sind) die Gleichheit zweier Pole ϱ_j, was nicht der Fall ist. Für (21b) (im Falle $\lambda_1 = 0$) gelten dieselben Argumente. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Aus der Behauptung folgen unmittelbar die Gleichungen (9). Denn wegen der Behauptung folgt aus (16a) bzw. (16b) (diese Gleichungen sind beide von der Form (17)) die Gleichheit zweier λ_j. Eine dieser beiden kann man eliminieren, und man erhält wieder eine Gleichung von der Form (17). Wieder folgt die Gleichheit zweier übriggebliebenen λ_j, usw.

Die Menge (5) wird jetzt wegen (9):

$$e^{-2\pi i \lambda_1 n\varphi}\left(A_1 e^{-2\pi i n \mu_1} + A_2 e^{-2\pi i n \mu_2} + \ldots + A_s e^{-2\pi i n \mu_s}\right) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Die Häufungspunkte dieser Menge füllen aber eine Anzahl von Kreisen gänzlich auf, ausgenommen wenn

$$A_1 e^{-2\pi i n \mu_1} + A_2 e^{-2\pi i n \mu_2} + \ldots + A_s e^{-2\pi i n \mu_s} = 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Dies würde aber wieder die Gleichheit zweier $e^{2\pi i \mu_j}$, also auch die Gleichheit zweier ϱ_j ergeben, was nicht der Fall ist.

Hiermit ist bewiesen, daß die Voraussetzung: „es existieren $s-1$ lineare Beziehungen von der Form (2)“ auf einen Widerspruch führt. Diese Voraussetzung kann also nicht richtig sein.

d) Es ist jetzt leicht zu beweisen, *daß die Anzahl der linearen unabhängigen Beziehungen der Form* (2) *auch nicht gleich* $s-u$ *sein kann, falls* $2 \leqq u \leqq s-1$.

Wenn $s-u$ Beziehungen der Form (2) existierten, würde es möglich sein, die φ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ alle linear mit rationalen Koeffizienten auszudrücken in u irrationale Zahlen $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_u$:

$$\varphi_j = \lambda_j^{(1)}\chi_1 + \lambda_j^{(2)}\chi_2 + \ldots + \lambda_j^{(u)}\chi_u + \mu_j; \quad \lambda_j^{(m)} \text{ rational}$$
$$(m = 1, 2, \ldots, u; \quad j = 1, 2, \ldots, s).$$

Nach Hilfssatz 2 liegen jetzt die Punkte P_n überall dicht auf einer geschlossenen L_u^*, d. h. auf den innerhalb des Einheitswürfels gelegenen Stücken einer Anzahl von linearen u-dimensionalen Räumen, die alle dem L_u, dessen Gleichungen in Parameterform

$$x_j = \lambda_j^{(1)} t^{(1)} + \lambda_j^{(2)} t^{(2)} + \ldots + \lambda_j^{(u)} t^{(u)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

sind, parallel sind. Es sei

$$x_j = \lambda_j^{(1)} t^{(1)} + \lambda_j^{(2)} t^{(2)} + \ldots + \lambda_j^{(u)} t^{(u)} + x_j^{(0)} \qquad (j = 1, 2, \ldots, s)$$

einer dieser L_u, von dem das Stück

$$t_1^{(1)} \leqq t^{(1)} \leqq t_2^{(1)}, \quad t_1^{(2)} \leqq t^{(2)} \leqq t_2^{(2)}, \quad \ldots, \quad t_1^{(u)} \leqq t^{(u)} \leqq t_2^{(u)}$$

innerhalb des Einheitswürfels liege. Dann sind die Punkte

$$\sum_{j=1}^{s} A_j e^{-2\pi i (\lambda_j^{(1)} t^{(1)} + \lambda_j^{(2)} t^{(2)} + \ldots + \lambda_j^{(u)} t^{(u)} + x_j^{(0)})}, \quad t_1^{(m)} \leqq t^{(m)} \leqq t_2^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots, u)$$

sämtlich Häufungspunkte der Menge (5). Diese dürfen aber kein Kurven- oder Flächenstück auffüllen. Also muß

$$(22) \quad \sum_{j=1}^{s} A_j \lambda_j^{(m)} e^{-2\pi i (\lambda_j^{(1)} t^{(1)} + \lambda_j^{(2)} t^{(2)} + \ldots + \lambda_j^{(u)} t^{(u)} + x_j^{(0)})} = 0 \quad \text{für} \quad t_1^{(m)} \leqq t^{(m)} \leqq t_2^{(m)} \qquad (m = 1, 2, \ldots, u).$$

Nimmt man hier auffolgend

$$t^{(1)} = t_1^{(1)}, \quad t^{(1)} = t_1^{(1)} + \delta, \quad t^{(1)} = t_1^{(1)} + 2\delta, \quad \ldots, \quad t^{(1)} = t_1^{(1)} + (s-1)\delta_1,$$

so entstehen u Systeme von s Gleichungen und es folgt

$$\lambda_j^{(m)} = \lambda_j^{(1)} \alpha_m \qquad (j = 1, 2, \ldots, s; \; m = 2, 3, \ldots, u).$$

Die Gleichungen (22) werden jetzt (wenn $t = t^{(1)} + \alpha_2 t^{(2)} + \alpha_3 t^{(3)} + \ldots + \alpha_u t^{(u)}$):

$$\sum_{j=1}^{s} A_j \lambda_j^{(1)} e^{-2\pi i (\lambda_j^{(1)} t + x_j^{(0)})} = 0 \quad \text{für} \quad t_1 \leqq t \leqq t_2.$$

Die Diskussion ist jetzt zurückgeführt auf die Diskussion von (8). Man kommt also auf einen Widerspruch, woraus man schließt, daß die Anzahl der unabhängigen linearen Beziehungen nicht gleich $s - u$ sein kann.

e) Nach dem Obigen ist also die Anzahl der unabhängigen linearen Beziehungen von der Form (2) gleich s. Aus diesen s Gleichungen kann man die φ_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ rational ausdrücken in den (ganzen) Koeffizienten der Gleichungen, womit der Satz A bewiesen ist.

Bemerkungen.

1. Aus Satz A folgt unmittelbar der folgende bekannte Satz von Kronecker:

Falls eine ganze algebraische Zahl ϱ_1 sowie alle zu ihr konjugierten algebraischen Zahlen $\varrho_2, \varrho_3 \dots \varrho_s$ den absoluten Wert 1 haben, so ist ϱ_1 eine Einheitswurzel.

Man braucht Satz A nur anzuwenden auf die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{(x-\varrho_1)(x-\varrho_2)\dots(x-\varrho_s)},$$

die eine Potenzreihenentwicklung hat mit ganzen Koeffizienten.

2. Herr H. Hopf machte mich darauf aufmerksam, daß man die Voraussetzung 3 des Satzes A ersetzen kann durch:

Es gibt kein Kurvenstück, auf dem die Menge der Zahlen $a_0, a_1, a_2, \dots$ überall dicht liegt.

Wenn nämlich eine Punktmenge in einem Gebiet überall dicht liegt, so gibt es auch immer Kurvenstücke, auf denen die Menge überall dicht liegt.

Der einfache Beweis dieser Behauptung lautet wie folgt:

Man bilde das Gebiet, in dem die Menge M überall dicht liegt, topologisch auf die ganze Ebene ab, und zwar derart, daß dabei der Menge M die rationalen Punkte der Ebene entsprechen, was nach einem Satze von Borel immer möglich ist (siehe z. B. v. Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie I, S. 42). Bei dieser Abbildung entspricht z. B. der x-Achse in der Abbildungsebene ein gewisses Jordansches Kurvenstück in dem ursprünglichen Gebiet. Auf dieser Kurve liegt die Menge M überall dicht.

Den Haag, September 1925.

(Eingegangen am 17. März 1926.)

Über allgemeine Berührungseigenschaften elliptischer Normalkurven und elliptisch-lineare Konstruktionen von Restpunkten.

Von

W. Franz Meyer in Königsberg i. Pr.

Einleitung.

Um mit dem einfachsten Falle zu beginnen, so läßt sich bekanntlich bei einer elliptischen Kurve C_3 (dritter Ordnung) in der Ebene stets eine Kurve k^{ter} Ordnung ($k = 1, 2, \ldots$), im allgemeinen noch in unendlicher Anzahl, so bestimmen, daß sie sich an irgendeiner (reellen) Stelle der C_3 so eng wie möglich anschmiegt, d. h. sie daselbst $(k\,d - 1)$-punktig berührt. Die Gesamtheit solcher „Schmiegungs-C_k" schneidet dann aus der C_3 noch einen und denselben Restschnittpunkt r_k aus, der kurz als „k^{ter} Restpunkt" des Ausgangsschmiegungspunktes bezeichnet sei. Diese k^{ten} Restpunkte r_k erfreuen sich verschiedener allgemeiner Eigenschaften. Insbesondere lassen sie sich „elliptisch-linear" konstruieren, d. h. bei vorgegebener C_3 lediglich durch wiederholtes Verbinden zweier (evtl. auch konzidierender) Kurvenpunkte mittels einer Geraden, und Aufsuchen von deren Restschnittpunkt mit der Kurve.

Diese Konstruktionen ermöglichen sich, nachdem ein elliptisches Integral erster Gattung als Kurvenparameter u eingeführt ist (§ 1), auf Grund einer allgemeinen Inzidenzformel (I) (§§ 2, 3). Analog gestalten sich die Verhältnisse bei der elliptischen Kurve C_d im linearen Raume S_{d-1}. An die Stelle der Schmiegungskurve C_k tritt eine Schmiegungsüberfläche F_k, mit ihrem Restpunkte r_k; die Inzidenz von d Kurvenpunkten besagt, daß sie zugleich einer Überebene F_1 angehören.

Während aber noch für den nächsten Fall des Raumes ($d = 4$) die verallgemeinerte Formel (I) (§§ 2, 3) ausreicht, um sämtliche Restpunkte elliptisch-linear zu konstruieren, ist das für höhere Werte von d in gewissen Ausnahmefällen nicht mehr möglich (§ 3). Durch eine geeignete

Abänderung der Formel (I) in eine andere „(I′)“ werden aber auch jene Ausnahmefälle zugänglich (§ 4).

In § 5 werden noch zwei weitere allgemeine Eigenschaften der Restpunkte r_k behandelt.

§ 1.

Hilfsformeln.

Auf einer elliptischen Normalkurve C_d der Ordnung d in einem linearen Raume von $d-1$ Dimensionen ($d \geqq 3$) läßt sich bekanntlich[1]) ein elliptisches Normalintegral erster Gattung u als Parameter ausbreiten. Irgendein Punkt der C_d mit dem Parameter u werde kurz als „Punkt u“ bezeichnet.

Sind die x homogene Punktkoordinaten im S_{d-1}, so stellt, symbolisch geschrieben, eine Gleichung $(ax)^k = 0$ eine Überfläche F_k der Ordnung k dar, im besonderen also $(ax) = 0$ eine Überebene F_1.

Dann nimmt das Abelsche Schnittpunkttheorem der C_d eine einfache Gestalt an. Sind $u_1, u_2, \ldots, u_{kd}$ Punkte der C_d, in der Anzahl kd, so ist die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Punkte zugleich einer F_k angehören, die Kongruenz:

$$(1_k) \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_{kd} \equiv kc \bmod \text{per},$$

wo c eine Konstante[2]) bedeutet.

Im besondern gilt also für $k = 1$ als Kriterium der Inzidenz von d Punkten $u_1 \ldots u_d$ die „Inzidenzkongruenz“:

$$(1_1) \qquad u_1 + \ldots + u_d \equiv c.$$

Für die Geometrie auf der C_d ist der Sonderfall von Interesse, wo alle kd Punkte, bis auf einen, an einer Stelle u koinzidieren, wo sich also die F_k der Kurve an der Stelle u so eng als möglich anschmiegt und damit die F_k zu einer „Schmiegungs-F_k“ wird. Der Restschnittpunkt werde kurz als k^{ter} Restpunkt r_k von u bezeichnet. Dann spezialisieren sich die Kongruenzen (1_k), (1_1) zu:

$$\begin{cases} (2_k) & r_k \equiv kc + (1-kd)u, \\ (2_1) & r_1 \equiv c + (1-d)u, \end{cases}$$

womit r_k eindeutig bestimmt ist.

---

[1]) Vgl. z. B. F. Klein, Über die elliptischen Normalkurven ..., Leipziger Abhandlungen (Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften) 1885, Nr. 4.

[2]) Man kann, unbeschadet der Allgemeinheit, der Konstanten c den Wert Null beilegen; im folgenden erschien aber die Beibehaltung eines beliebigen c nützlich, da sie für die Rechnungen eine gute Kontrolle liefert. Der Zusatz „mod per“ (d. i. bis auf Vielfache der beiden Perioden) werde weiterhin der Kürze halber unterdrückt.

Dieses Verfahren läßt sich fortsetzen; von einem k^{ten} Restpunkt läßt sich wiederum ein l^{ter} bilden, der dann mit r_{kl} bezeichnet sei, usf. (Siehe unten § 5.)

Vor der Hand genüge es, das Argument des Restpunktes $r_{n,1}$ anzugeben. Gemäß (2_k) und (2_1) kommt:

$$r_{n,1} \equiv c + (1-d) r_n \equiv c + (1-d)\{nc + (1-dn)u\},$$

und damit

$$(3_n) \qquad r_{n,1} \equiv c\{1 + n(1-d)\} + u\{d(d-1)n - d + 1\},$$

und im besonderen für $n = 1$:

$$(3_1) \qquad r_{1,1} \equiv c(2-d) + u(d-1)^2.$$

§ 2.

Die erste, allgemeine Inzidenzformel.

Denkt man sich die Kurve C_d und auf ihr irgendeine Ausgangsstelle u gegeben, so hängt algebraisch die Bestimmung eines k^{ten} Restpunktes r_k von linearen Gleichungen ab. Es erhebt sich daher die geometrische Frage, wie man auf möglichst einfache Weise einen r_k linear konstruieren kann.

Zu dem Behuf verstehe man unter einer „elliptisch-linearen" Konstruktion eine solche, bei der lediglich jeweils durch $d-1$ gegebene (auch teilweise oder ganz zusammenrückende) Punkte der C_d die Verbindungsüberebene F_1 gelegt und sodann der Restschnittpunkt bestimmt wird.

In Anwendung auf die obigen Restpunkte erhebt sich damit die Frage, ob und wann d solcher Restpunkte inzident sind, d. i. einer Überebene F_1 angehören.

Ohne diese Frage hier in vollem Umfange erledigen zu wollen, genüge es, eine allgemeine Inzidenzformel aufzustellen, die dann als Reduktionsmittel dienen soll, um Restpunkte von höheren Indizes auf solche von geringeren zurückzuführen, um damit eine elliptisch-lineare Konstruktion eines beliebigen Restpunktes zu gewinnen.

Zu dem Behuf stellen wir zunächst den Satz auf: Es gilt die Inzidenzformel:

$$(\mathrm{I}_{dn-i}) \qquad r_{dn-i} + r_{n,1} + r_i + (d-3) r_0 \equiv c \qquad \begin{pmatrix} i = 0, 1, \ldots, d-1, \\ n = 1, 2, \ldots \end{pmatrix}$$

d. h. geometrisch „die Restpunkte r_{dn-i}, $r_{n,1}$, r_i und der $(d-2)$-fach gezählte Ausgangspunkt r_0 der C_d sind inzident".

Der Beweis ist einfach.

Erstens ergibt sich für das Argument r_{dn-i} gemäß (2_k), für $k = dn - i$ nd $u = r_0$:

4_1) $$r_{dn-i} \equiv c(dn-i) + r_0\{1 - d(dn-i)\}.$$

Zweitens war nach (3_n):

4_2) $$r_{n,1} \equiv c\{1 + n(1-d)\} + r_0\{nd(d-1) - d + 1\}.$$

Drittens gemäß (2_k), für $k = i$:

4_3) $$r_i \equiv ci + r_0(1 - id).$$

Endlich hat man von selbst.

4_4) $$(d-3)r_0 \equiv 0 \cdot c + r_0(d-3).$$

Addiert man diese vier Teilkongruenzen, so überzeugt man sich sofort, daß rechts sich der Koeffizient von c auf die Einheit reduziert, während der Koeffizient von r_0 verschwindet, womit die Formel (I_{dn-i}) ewiesen ist. Legt man dem Index i jeweils, bei festgehaltenen d und n, ie Werte $0, 1, \ldots, d-1$ bei, und läßt andererseits den Index n alle natürlichen Zahlen $1, 2, \ldots$ durchlaufen, so durchläuft auch der Index $dn - i$ er Reihe nach alle natürlichen Zahlen. Die Formel leistet also die Reduktion eines Index $dn - i$ auf die niedrigeren n und i (nebst 0).

Es erweist sich als etwas bequemer, die Bezeichnung dahin abzuändern, daß man den Index d durch $d+1$ ersetzt, also eine Kurve C_{d+1} n S_d $(d \geqq 2)$ zugrunde legt.

Dann nimmt die erste Inzidenzformel die Gestalt an:

(I_{dn-i}) $$r_{dn-i} + r_{n,1} + r_i + (d-2)r_0 \equiv c.$$

§ 3.

Ausführungen im einzelnen.

Es sollen nunmehr der Reihe nach die Fälle $d = 2, 3, \ldots$, also der Ebene, des Raumes usf., eingehender diskutiert und die erforderlichen Konstruktionen ausgeführt werden.

Es wird sich zeigen, daß in den beiden Fällen der Ebene und des Raumes die Formel (I_{dn-i}) völlig ausreicht, um einen beliebigen Restpunkt elliptisch-linear zu konstruieren, dagegen nicht mehr für die höheren Räume $(d > 3)$, indem sich alsdann einzelne der Restpunkte und zwar gerade die mit den niedrigsten Indizes, der Konstruktion entziehen.

Fall der C_3 in der Ebene $(d = 2)$.

Entsprechend den beiden Werten $i = 1, 0$ nimmt die Grundformel die beiden Gestalten an:

$$\begin{cases} (I_{2n-1}) & r_{2n-1} + r_{n,1} + r_1 \equiv c, \\ (I_{2n}) & r_{2n} \quad + r_{n,1} + r_0 \equiv c, \end{cases}$$

wo n die natürlichen Zahlen durchläuft.

Nimmt man noch als untersten Fall die Kombination $n = i = 0$ hinzu, wo $r_{0,1} = r_1$, so ergibt sich das explizite Schema der Einzelkongruenzen:

$$(5_0) \qquad r_1 + 2r_0 \equiv c;$$

$$\begin{cases} (5_1) & r_{1,1} + 2r_1 \equiv c, \\ (5_2) & r_2 + r_{1,1} + r_0 \equiv c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5_3) & r_3 + r_{2,1} + r_1 \equiv c, \\ (5_4) & r_4 + r_{2,1} + r_0 \equiv c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5_5) & r_5 + r_{3,1} + r_1 \equiv c, \\ (5_6) & r_6 + r_{3,1} + r_0 \equiv c; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (5_7) & r_7 + r_{4,1} + r_1 \equiv c, \\ (5_8) & r_8 + r_{4,1} + r_0 \equiv c; \end{cases}$$

usf.

Hier sind die beiden ersten Formeln belanglos, denn sie drücken nur die Definition von r_1 und $r_{1,1}$ aus.

Gemäß (5_2) erscheint zunächst r_2 als Restschnittpunkt der Geraden $(r_{1,1}, r_0)$. Dieser einfachste Fall findet sich als ein Satz von Mineur bei M. Winants[3]), der ihn wie oben beweist.

Denkt man sich von dem so konstruierten r_2 wiederum den ersten Restpunkt $r_{2,1}$ bestimmt, so liefert (5_3) den nächstfolgenden Restpunkt r_3 als Restschnittpunkt der Geraden $(r_{2,1}, r_1)$ und analog (5_4) den weiterfolgenden Restpunkt r_4 als Restschnittpunkt der Geraden $(r_{2,1}, r_0)$. Fährt man so fort, so erkennt man in der Tat, wie sukzessive ein jeder Restpunkt r_k aus früheren elliptisch-linear konstruierbar ist. Die beiden Grundformeln (I_{2n-1}) und (I_{2n}), nebst der Definition von $r_{n,1}$, sind gleichwertig mit der geometrischen Regel, wonach dieser Punkt $r_{n,1}$ als gemeinsamer Punkt von drei Geraden erscheint, nämlich als Restschnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden (r_{2n-1}, r_1) und (r_{2n}, r_0) und der Tangente in r_n.

Auch die Verteilung der Gesamtheit der einfachen und mehrfachen Restpunkte anf die beiden Züge der Kurve ist leicht zu übersehen. Gehört

[3]) Belg. Bull. (5) 9, (1923), S. 554. Winants bezeichnet den r_1, im Anschluß an Sylvester, mit „Tangentialpunkt“ (tangentiel) von r_0, was aber leicht zu Verwechslungen mit „Berührungspunkt“ Veranlassung gibt, und den r_2 als „interséquant“, nicht eben glücklich.

er Ausgangspunkt r_0 dem unpaaren Zuge an, so gilt offenbar das näm-che von allen weiteren Restpunkten. Liegt dagegen der Ausgangspunkt auf dem — als reell existierend vorausgesetzten — Ovale, so liegen ich alle diejenigen Restpunkte, deren Indizes nur gerade sind, auf dem vale, hingegen alle übrigen auf dem unpaaren Zuge.

Fall der C_4 im Raume $(d = 3)$.

Entsprechend den drei Werten $i = 2, 1, 0$ liegen jetzt die drei Grund-rmeln vor:

$$(I_{3n-2}) \qquad r_{3n-2} + r_{n,1} + r_2 + r_0 \equiv c,$$
$$(I_{3n-1}) \qquad r_{3n-1} + r_{n,1} + r_1 + r_0 \equiv c,$$
$$(I_{3n}) \qquad r_{3n} + r_{n,1} + 2r_0 \equiv c.$$

Läßt man hier n die natürlichen Zahlen durchlaufen, und fügt wieder s untersten Fall die Kombination $n = 0$, $i = 0$ hinzu, so erhält man as explizite Inzidenz-Schema:

$$(6_0) \qquad 3r_0 + r_1 \equiv c;$$

$$(6_1) \qquad r_1 + r_{1,1} + r_2 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_2) \qquad r_2 + r_{1,1} + r_1 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_3) \qquad r_3 + r_{1,1} + 2r_0 \equiv c;$$

$$(6_4) \qquad r_4 + r_{2,1} + r_2 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_5) \qquad r_5 + r_{2,1} + r_1 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_6) \qquad r_6 + r_{2,1} + 2r_0 \equiv c;$$

$$(6_7) \qquad r_7 + r_{3,1} + r_2 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_8) \qquad r_8 + r_{3,1} + r_1 + r_0 \equiv c,$$
$$(6_9) \qquad r_9 + r_{3,1} + 2r_0 \equiv c;$$

usf.

Hier drückt (6_0) wiederum nur die Definition von r_1 aus; die beiden rmeln (6_1) und (6_2) fallen zusammen. Nach Konstruktion von $r_{1,1}$ als stschnittpunkt der Schmiegungsebene an der Stelle r_1 ermittelt man r_2 Restschnittpunkt der Ebene $(r_{1,1}, r_1, r_0)$, und r_3 als Restschnittpunkt r in r_0 berührenden und durch $r_{1,1}$ gehenden Ebene.

Die Schmiegungsebenen in r_2 und r_3 liefern dann wiederum die Rest-hnittpunkte $r_{2,1}$ und $r_{3,1}$, und mittels dieser ergeben sich weiter auf und der Formeln (6_4), (6_5), (6_6); (6_7), (6_8), (6_9) die Restpunkte r_4, r_6; r_7, r_8, r_9, usf.

Es gilt daher der Satz:

„Auch für die elliptische Raumkurve C_4 lassen sich sämtliche Restpunkte elliptisch-linear konstruieren."

Die zugehörige Zugregel wird hier noch einfacher, wie bei den C_3 der Ebene.

Die C_4 besitzt entweder zwei paare Züge, oder nur einen solchen; hat man den Ausgangspunkt r_0 beliebig auf einem Zuge gewählt, so gehören auch sämtliche Restpunkte demselben Zuge an.

Fall der C_5 im S_4 $(d = 4)$.

Die allgemeine Grundformel (I_{dn-i}) spaltet sich jetzt für $i = 3, 2, 1, 0$ in die vier Teilformeln:

$$\begin{cases} (I_{4n-3}) & r_{4n-3} + r_{n,1} + r_3 + 2r_0 \equiv c, \\ (I_{4n-2}) & r_{4n-2} + r_{n,1} + r_2 + 2r_0 \equiv c, \\ (I_{4n-1}) & r_{4n-1} + r_{n,1} + r_1 + 2r_0 \equiv c, \\ (I_{4n}) & r_{4n} + r_{n,1} + 3r_0 \equiv c, \end{cases}$$

wo n die natürlichen Zahlen durchläuft.

Man betrachte zunächst die Teilgruppe für $n = 1$:

$$\begin{cases} (7_1) & r_1 + r_{1,1} + r_3 + 2r_0 \equiv c, \\ (7_2) & 2r_2 + r_{1,1} + 2r_0 \equiv c, \\ (7_3) & r_3 + r_{1,1} + r_1 + 2r_0 \equiv c, \\ (7_4) & r_4 + r_{1,1} + 3r_0 \equiv c. \end{cases}$$

Hier fallen die erste und dritte Formel zusammen, sie liefern die Konstruktion von r_3 mittels r_1, $r_{1,1}$, r_0 und das Analoge gilt für r_4 auf Grund der letzten Formel.

Hingegen läßt sich der Restpunkt r_2 auf Grund von (7_2) nur *mehrdeutig* bestimmen.

Würde man diesen Punkt r_2 als bekannt *adjungieren*, so würden sich allerdings mit Hilfe der weiteren Formeln $(7_5), \ldots$, die hinzuschreiben unnötig erscheint, wieder alle höheren Restpunkte elliptisch-linear konstruieren lassen.

Noch ungünstiger gestaltet sich die Sachlage für den nächsten Fall der C_6 im S_5. Es genüge, das Schema für $n = 1$ herzusetzen:

$$\begin{cases} (8_1) & r_1 + r_{1,1} + r_4 + 3r_0 \equiv c, \\ (8_2) & r_2 + r_{1,1} + r_3 + 3r_0 \equiv c, \\ (8_3) & r_3 + r_{1,1} + r_2 + 3r_0 \equiv c, \\ (8_4) & r_4 + r_{1,1} + r_1 + 3r_0 \equiv c, \\ (8_5) & r_5 + r_{1,1} + 4r_0 \equiv c. \end{cases}$$

Hier fallen je die erste und vierte, zweite und dritte Formel zusammen. Es lassen sich also wohl r_4 und r_5 mittels r_1, $r_{1,1}$, r_0 konstruieren, dagegen sind r_2 und r_3 nur an die eine Inzidenz (8_2) gebunden, so daß r_2 ganz unbestimmt bleibt.

Man müßte wiederum r_2 als bekannt ansehen, um dann alle weiteren Restpunkte mittels der folgenden Formeln konstruieren zu können.

Allgemein erkennt man ohne Mühe, daß für höhere Werte von d gerade die r mit den untersten Indizes unbestimmt bleiben.

Es entsteht nunmehr die Frage, ob nicht, um diese Mißstände zu beseitigen, die Grundformel (I_{dn-i}) geeignet abgeändert werden kann. Das soll im nächsten Paragraphen geschehen.

§ 4.

Die zweite allgemeine Inzidenzformel.

In der ersten Grundformel für eine C_{d+1} im S_d

(I_{dn-i}) $$r_{dn-i} + r_{n,1} + r_i + (d-2)r_0 \equiv c$$

wird man versuchen, das störende Glied r_i zu entfernen, d. h. es durch solche von niedrigeren Indizes, etwa r_1 und r_0, auszudrücken.

In der Tat läßt sich dies einfach ausführen. Auf Grund von (1_i) überzeugt man sich sofort von der Richtigkeit der Hilfsformel:

(II_i) $$r_i + (i-1)r_0 \equiv i\,r_1,$$

wo i jede natürliche Zahl (>1) sein kann. Man beachte, daß auf beiden Seiten von (II_i) gleichviel (nämlich i) r-Individuen auftreten, so daß die Eintragung des Wertes von r_i gemäß (II_i) in (I_{dn-i}) den Inzidenzcharakter der letzteren Formel nicht zerstört.

Man gelangt so ohne weiteres zu der zweiten allgemeinen Inzidenzformel:

(I'_{dn-i}) $$r_{dn-i} + r_{n,1} + i\,r_1 + (d-i-1)r_0 \equiv c,$$

wo i wiederum der Werte $d-1$, $d-2$, ..., 2, 1, 0 fähig ist[4]).

Um damit die in § 3 aufgetretene Lücke auszufüllen, genügt es, die erste Teilgruppe für $n=1$ in Betracht zu ziehen.

Der erste Spezialfall: $i = d-1$ ist wieder belanglos, denn man erhält:

(I'_1) $$r_1 + r_{1,1} + (d-1)r_1 + 0\cdot r_0 \equiv c,$$

[4]) Man könnte hier auch noch das Glied $r_{n,1}$ vermöge der an (II_i) sich anschließenden Formel $r_{n,1} + (n-1)r_1 \equiv n\,r_{1,1}$ auf r_1 zurückführen, aber dann würde die so geänderte Formel (I'_{dn-i}) wieder Ausnahmefälle zulassen, wo der Koeffizient $+1-n$ von r_1 negativ wird.

oder auch:

$$r_{1,1} + d\,r_1 \equiv c,$$

was nur die Definition von $r_{1,1}$ wiedergibt.

Das fragliche Schema, für $n = 1$, und $i = d-2, d-3, \ldots, 2, 1, 0$ wird also:

$$\left\{\begin{array}{lll}
(\mathrm{I}_2') & r_2 + r_{1,1} + (d-2)r_1 + 1\cdot r_0 & \equiv c, \\
(\mathrm{I}_3') & r_3 + r_{1,1} + (d-3)r_1 + 2\cdot r_0 & \equiv c, \\
\quad\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(\mathrm{I}_i') & r_{d-i} + r_{1,1} + i\,r_1 \quad + (d-i-1)r_0 & \equiv c, \\
\quad\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots \\
(\mathrm{I}_{d-2}') & r_{d-2} + r_{1,1} + 2\cdot r_1 \quad + (d-3)r_0 & \equiv c, \\
(\mathrm{I}_{d-1}') & r_{d-1} + r_{1,1} + 1\cdot r_1 \quad + (d-2)r_0 & \equiv c, \\
(\mathrm{I}_d') & r_d + r_{1,1} + 0\cdot r_1 \quad + (d-1)r_0 & \equiv c.
\end{array}\right.$$

Diese $d-2$ Inzidenzkongruenzen erlauben offenbar, der Reihe nach die Restpunkte $r_2, r_3, \ldots, r_{d-2}, r_{d-1}, r_d$ lediglich mit Hilfe von $r_{1,1}, r_1$ und r_0 elliptisch-linear zu konstruieren. Die weiter folgenden höheren Restpunkte $r_{d+1} \ldots r_{2d}$; $r_{2d+1} \ldots r_{3d}$ usw. werden dann entweder, wie in § 3, mit Hilfe der weiteren Teilgruppen für $n = 2, 3 \ldots$ von (I_{dn-i}), oder einfacher von (I_{dn-i}') bestimmt. Die für die C_3 in der Ebene und die C_4 im Raume in § 3 aufgestellten Zugregeln wiederholen sich ersichtlich alternierend für die C von ungerader resp. gerader Ordnung. Es gilt demnach der Satz:

„Vermöge der zweiten allgemeinen Inzidenzformel (I_{dn-i}') lassen sich sämtliche einfachen und zusammengesetzten Restpunkte einer elliptischen Kurve C_{d+1} im S_d elliptisch-linear konstruieren."

Die Formeln (I), (II) und (I') gelten ersichtlich auch für ganz beliebige reelle oder komplexe Werte der drei Größen d, n und i. Hieran ließen sich Begriffserweiterungen für die Schmiegungs-F_k und ihre Restpunkte r_n anschließen, die aber doch wohl mehr oder weniger künstlich ausfallen würden.

§ 5.

Über zwei weitere allgemeine Eigenschaften der Restpunkte.

Im folgenden ist es wieder bequemer, wie in § 1, mit einer C_d im S_{d-1} zu operieren. Man schneide die C_d mittels einer F_k in $k\,d$ (reellen) Punkten $u^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, k\,d)$, so daß gemäß (1_k)

$$(1_k) \qquad \sum u^{(i)} \equiv k\,c.$$

Sodann denke man sich zu jedem dieser Schnittpunkte $u^{(i)}$ den l^{ten} Restpunkt $r_l^{(i)}$ bestimmt. Es erhebt sich die Frage, ob diese kd Kurvenpunkte $r_l^{(i)}$ wiederum einer F_k angehören?

Gemäß (2_k) hat man:

(2_l) $$r_l^{(i)} \equiv lc - u^{(i)}(dl-1).$$

Durch Addition dieser kd Kongruenzen ergibt sich mittels (1_k):

III) $$\sum r_l^{(i)} \equiv kd \cdot lc - (dl-1)\sum u^{(i)} \equiv kldc - kc\cdot(dl-1) \equiv kc.$$

Damit ist die aufgeworfene Frage bejaht und es gilt der Satz:

„Liegen kd Punkte einer elliptischen Kurve C_d im S_{d-1} auf einer Überfläche k^{ter} Ordnung F_k, und bestimmt man zu jedem der Schnittpunkte den l^{ten} Restpunkt, so gehören auch die letzteren kd Punkte einer F_k an."

Die einfachsten Unterfälle: $d=3$, $l=1, 2$ finden sich wiederum bei Vinants (loc. cit.). Im besonderen können auch irgendwelche der Punkte $u^{(i)}$ koinzidieren, dann koinzidieren zugleich die entsprechenden Punkte $r_l^{(i)}$.

Eine zweite allgemeine Eigenschaft bezieht sich auf zusammengesetzte Restpunkte. Man betrachte zunächst solche mit zwei Indizes, also etwa r_{kl}, den l^{ten} Restpunkt des k^{ten} Restpunktes. Es ist die Frage, ob das Gesetz der Vertauschbarkeit der Indizes gilt, so daß r_{kl} mit r_{lk} zusammenfallen? Auf Grund von (2_k) hat man vorerst bei einem Ausgangspunkte u für r_k und r_l die Werte:

(2_k) $$r_k \equiv kc - u(kd-1),$$

(2_l) $$r_l \equiv lc - u(ld-1).$$

Hieraus folgt als Wert von r_{kl}:

(9_{kl}) $$\begin{aligned} r_{kl} &\equiv lc - r_k(ld-1) \equiv lc - (ld-1)\{kc - u(kd-1)\} \\ &\equiv c\{l - kld + k\} + u(1-kd)(1-ld). \end{aligned}$$

Man erkennt sofort, daß sich die rechte Seite dieser Kongruenz bei Vertauschung von k mit l nicht ändert. Es fallen somit in der Tat r_{kl} und r_{lk} zusammen:

IV) $$r_{kl} = r_{lk}.$$

Hieraus folgt aber nach bekannter arithmetischer Schlußweise, daß auch bei r mit beliebig vielen, etwa n Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ die letzteren beliebig vertauschbar sind, d. h. es gilt der Satz:

„Bei einem zusammengesetzten Restpunkt $r_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ einer elliptischen Kurve C_d im S_{d-1} ist die Reihenfolge der Indizes willkürlich."

Kommen daher im besonderen gleiche Indizes vor, so wird man diese zu symbolischen Potenzen zusammenfassen usw.

Die einfachsten Unterfälle: $d = 3$, $k, l = 1, 2$ finden sich ebenfalls bereits bei Winants (loc. cit.).

Man wird wünschen, auch formal den Wert von $r_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ so zu gestalten, daß die Symmetrie hinsichtlich der Indizes hervortritt, womit dann auch das assoziative Gesetz der Indizes erwiesen wäre.

Setzt man zur Abkürzung:

$$(10_2) \qquad k + l = e_1, \qquad kl = e_2,$$

so schreibt sich die Kongruenz (9_{kl}) in der Gestalt:

$$(9_{kl}) \qquad r_{kl} \equiv c(e_1 - de_2) + u(1 - de_1 + d^2 e_2).$$

Geht man zum Falle von drei Indizes k_1, k_2, k_3 über und setzt analog zu (10_2):

$$(10_3) \quad k_1 + k_2 + k_3 = e_1, \quad k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3 = e_2, \quad k_1 k_2 k_3 = e_3,$$

so berechnet sich der Wert von $r_{k_2 k_3}$ leicht zu:

$$(9_{k_1 k_2 k_3}) \quad r_{k_1 k_2 k_3} \equiv c(e_1 - de_2 + d^2 e_3) + u(1 - dk_1)(1 - dk_2)(1 - dk_3)$$
$$\equiv c(e_1 - de_2 + d^2 e_3) + u(1 - de_1 + d^2 e_2 - d^3 e_3).$$

Fährt man so fort und bezeichnet, analog zu (10_2) und (10_3), die elementarsymmetrischen Verbindungen von n Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mit $e_1, e_2, \ldots, e_n$, so gelangt man durch unvollständige Induktion zu dem Ansatze:

$$(9_{k_1, k_2, \ldots, k_n}) \quad r_{k_1, k_2, \ldots, k_n} \equiv c(e_1 - de_2 + d^2 e_3 - \ldots + (-1)^{n-1} d^{n-1} e_n)$$
$$+ u \prod_{i=1}^{n} (1 - dk_i)$$
$$\equiv c(e_1 - de_2 + d^2 e_3 - \ldots + (-1)^{n-1} d^{n-1} e_n)$$
$$+ u(1 - de_1 + d^2 e_2 - d^3 e_3 + \ldots + (-1)^n d^n e_n).$$

Der Beweis dieser Formel geschieht durch vollständige Induktion; aus der für n Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_n$ vorausgesetzten Gültigkeit soll die für $n + 1$ Indizes $k_1, k_2, \ldots, k_n, k_{n+1}$ abgeleitet werden. Um Mißverständnisse zu vermeiden, seien die elementar symmetrischen Verbindungen der $n + 1$ Indizes mit $e_1', e_2', \ldots, e_n', e_{n+1}'$ bezeichnet.

Geht man nun vom Falle mit n Indizes zu dem mit $n + 1$ Indizes über, so ist zunächst hinsichtlich des Faktors von u unmittelbar ersichtlich, daß zu dem Produkte $\prod_{i=1}^{n} (1 - dk_i)$ der neue Faktor $1 - dk_{n+1}$ hinzutritt, daß also in der Tat für $n + 1$ Indizes der Faktor von u die verlangte Gestalt annimmt:

$$(11_0) \quad \prod_{i=1}^{n+1} (1 - dk_i) = 1 - de_1' + d^2 e_2' - d^3 e_3' + \ldots + (-1)^{n+1} d^{n+1} e_{n+1}'.$$

Was zweitens den Faktor von c anbelangt, so wäre zu zeigen, daß dieser für $n+1$ Indizes die Gestalt annimmt:

$$11_c) \qquad e'_1 - d e'_2 + d^2 e'_3 - \ldots + (-1)^n d^n e'_{n+1}.$$

Es wäre nicht schwer, diese Gestalt direkt mit Hilfe elementarer Eigenschaften der Größen e und e' zu bestätigen, aber, indem wir diesen Weg dem Leser überlassen, schlagen wir hier einen instruktiveren ein, der zugleich den inneren Zusammenhang zwischen den Koeffizienten von c und u hervortreten läßt.

Zu dem Behuf werde ein allgemeinerer Hilfssatz vorausgeschickt.

Man fasse eine Linearform $r \equiv ac + bu$ mit festen Koeffizienten a, b als einen Operator auf, der aus einem Ausgangspunkte u der C_d einen Kurvenpunkt r bestimmt. Liegen nun zwei solcher Operatoren vor:

$$(12) \qquad r \equiv ac + bu, \qquad r' \equiv a'c + b'u,$$

und man führt diese beiden Operationen an der C hintereinander aus, so gelangt man, je nach der Reihenfolge, zu zwei neuen Punkten (rr') und $(r'r)$. Wir fragen nach dem Kriterium dafür, daß diese beiden Punkte zusammenfallen. Man erhält sofort:

$$\begin{cases} (13) & (rr') \equiv ca + br'_a \equiv ca + b(ca' + b'u) \equiv c(a + ba') + bb'u, \\ (13') & (r'r) \equiv ca' + b'r_a \equiv c(a' + b'a) + bb'u. \end{cases}$$

Die Koeffizienten von u stimmen bereits überein; sollen also die beiden Punkte (13), (13′) zusammenfallen, so müssen auch die Koeffizienten von c übereinstimmen, und umgekehrt.

Das gewünschte Kriterium lautet somit:

$$a + ba' = a' + b'a,$$

oder auch, mit Hilfe eines Proportionalitätsfaktors ϱ:

$$(14) \qquad 1 - b = \varrho a, \qquad 1 - b' = \varrho a'.$$

Damit ist der Hilfssatz bewiesen:

„Sollen die beiden Operatoren $r \equiv ac + bu$, $r' \equiv a'c + b'u$ bei ihrer Zusammensetzung vertauschbar sein, so ist dafür das Bestehen der Bedingung (14) notwendig und hinreichend."

Dies finde seine Anwendung auf den obigen Fall, wo der erste Operator durch $r_{k_1, k_2, \ldots, k_n}$ angegeben wird, und der zweite durch r_{k+1}.

Da wir nach früherem wissen, daß diese beiden Operatoren vertauschbar sind, so ist die Bedingung (14) von selbst erfüllt, und man hat nur noch den Wert des Faktors ϱ zu ermitteln.

Nun ist im vorliegenden Falle der Koeffizient b das Produkt $\prod_{i=1}^{n}(1-dk_i)$, und $b' = 1 - dk_{n+1}$; ferner ist $a' = k_{n+1}$. Gemäß (14) ist daher einmal $1 - b' = da'$, also $\varrho = d$, und damit

$$da = 1 - b = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - dk_i). \tag{15}$$

Führt man hier, wie früher, die rechte Seite aus, so hebt sich in der Tat der Faktor d heraus, und es kommt:

$$a = e_1 - de_2 + d^2 e_3 - \ldots + (-1)^{n-1} d^{n-1} e_n, \tag{16}$$

was zu beweisen war.

(Eingegangen am 11. Juni 1926.)

Über das Archimedische Axiom.

Von

Richard Baldus in Karlsruhe.

---

1. Baut man die Euklidische Geometrie in der von D. Hilbert in einen „Grundlagen der Geometrie“ angegebenen Weise auf, dann ist man nach Einführung der Axiomgruppen I—III imstande, geometrische Gebilde kongruent zu übertragen.

Ist C ein Punkt der Strecke AB [1]), dann nennt man die Strecke AC kleiner als AB. Man erkennt sofort, *daß die Beziehungen größer und kleiner zwischen Strecken durch die kongruenten Übertragungen nicht zerstört werden*, indem man folgenden Satz beweist (Fig. 1):

B sei ein Punkt einer Strecke AC. Liegen auf einer Halbgeraden a' mit dem Endpunkt A' die Punkte B' und C' so, daß $A'B' \equiv AB$ und $A'C' \equiv AC$ ist, dann ist auch B' Punkt der Strecke $A'C'$.

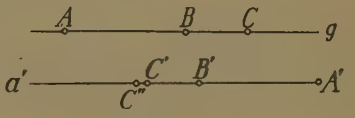


Fig. 1.

Beweis. Auf der von B' begrenzten Halbgeraden, die auf a' liegt, kann man nach Axiom III, 1 genau einen Punkt C'' so angeben, daß $B'C'' \equiv BC$ ist. B' ist dabei Punkt der Strecke $A'C''$. Nach Axiom III, 3 ist nun $A'C'' \equiv AC$, weiterhin nach Axiom III, 2 $A'C'' \equiv A'C'$. Folglich fallen nach Axiom III, 1 die Punkte C' und C'' zusammen.

Daher kann man die Beziehungen größer und kleiner nun auch auf Strecken auf verschiedenen Geraden übertragen und von irgend zwei nicht kongruenten Strecken ist eine bestimmte größer als die andere.

Ist $\sphericalangle(k, m)$ ein Winkel [2]) mit dem Scheitel O und l eine inner-

---

[1]) Wie bei Hilbert werden die Endpunkte einer Strecke nicht zu deren Punkten gerechnet.

[2]) Nach der Hilbertschen Definition des Winkelinnern gibt es nur hohle Winkel. Vorzuziehen ist die gleich weit tragende Definition des Winkelinnern bei A. Rosenthal, Vereinfachungen des Hilbertschen Systems der Kongruenzaxiome, Math. Ann. **71** (1911), S. 259, Hilfssatz a). In dieser schönen Arbeit werden die Hilbertschen Axiome III, 1 und III, 4 durch weniger fordernde ersetzt.

halb des Winkels von O ausgehende Halbgerade, dann nennt man entsprechend $\sphericalangle(k, l)$ kleiner als $\sphericalangle(k, m)$. Von irgend zwei nicht kongruenten Winkeln, die zueinander ganz beliebig liegen, ist dann, wie man analog erkennt, ein bestimmter größer als der andere.

2. Aus den Axiomgruppen I—III folgen in bekannter Weise außer dem 1. Kongruenzsatze für Dreiecke die Sätze

a) Ist P ein Punkt und g eine ihn nicht enthaltende Gerade, dann gibt es genau eine Gerade durch P, welche g schneidet und zu g senkrecht steht.

b) Jeder Außenwinkel eines Dreiecks ist größer als jeder ihm nicht benachbarte Innenwinkel.

c) Sind a, b zwei Seiten eines Dreiecks, α, β die ihnen gegenüberliegenden Winkel und ist $a > b$, dann ist auch $\alpha > \beta$. Umgekehrt folgt auch aus der zweiten Ungleichung die erste.

3. Als Axiom V, 1 führt Hilbert das bekannte Archimedische Axiom[3]) ein, demzufolge man, wenn irgend zwei nicht kongruente Strecken vorgegeben sind, immer ein Vielfaches der kleineren Strecke angeben kann, das größer ist als die größere der beiden Strecken. Die entsprechende Aussage für Winkel würde lauten: Sind irgend zwei nicht kongruente Winkel gegeben, dann kann man immer ein Vielfaches des kleineren Winkels angeben, das größer ist als der größere Winkel. In Band 25 (1926), S. 590—601 dieser Zeitschrift beweist Herr G. Feigl den schönen Satz, *daß man allein aus den Axiomen der Gruppen* I—III *die Äquivalenz der Archimedischen Aussage für Strecken und für Winkel erschließen kann*, d. h. setzt man die Axiome der Gruppen I—III und das Archimedische Axiom für Strecken (Winkel) voraus, dann ist die Archimedische Aussage für Winkel (Strecken) beweisbar. Im folgenden soll ein Beweis für diese Äquivalenz gebracht werden, den der Verfasser im Zusammenhange mit Untersuchungen über die Axiomatik der absoluten Geometrie gefunden hat, und der einfacher ist als der von Herrn Feigl angegebene. Dabei sei ausdrücklich hervorgehoben, daß Herrn Feigl das Verdienst gebührt, als erster diesen Äquivalenzsatz entdeckt zu haben. Der hier folgende Beweis stützt sich auf einen

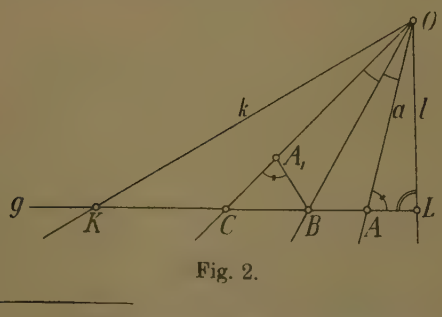


Fig. 2.

Hilfssatz. *Sind AOB und BOC zwei kongruente Winkel mit genau einem gemeinsamen Schenkel* (Fig. 2) *und liegen die Punkte*

[3]) Wir behalten den eingebürgerten Namen bei, obwohl die Bezeichnung als „Axiom des Eudoxus“ richtiger ist.

1, B, C auf einer Halbgeraden g, deren Endpunkt L der Fußpunkt des Lotes aus O auf g ist, liegt weiterhin A zwischen B und L, dann ist die Strecke BC größer als die Strecke AB.

Beweis. K sei ein Punkt von g außerhalb LC. Die Winkel $\sphericalangle OAC$ und $\sphericalangle OCK$ sind nach Satz b) stumpf als Außenwinkel rechtwinkeliger Dreiecke, folglich ist der spitze $\sphericalangle OCA < \sphericalangle OAC$ und nach Satz c) ist $OA < OC$. Man bestimmt nun A_1 in OC so, daß $OA_1 \equiv OA$ wird, folglich nach dem 1. Kongruenzsatze $\Delta OA_1B \equiv \Delta OAB$ und damit $\sphericalangle OA_1B \equiv \sphericalangle OAB$. Daraus folgt für die Nebenwinkel $\sphericalangle BA_1C \equiv \sphericalangle OAL$. Wegen $\sphericalangle OAL > \sphericalangle OCA$ (Satz b)) ist $\sphericalangle BA_1C > \sphericalangle A_1CB$, demnach (Satz c)) $BC > A_1B \equiv AB$, q. e. d.

Der Beweis verläuft ebenso, wenn A mit L zusammenfällt.

4. Beim Beweise des Archimedischen Satzes für Winkel aus den Axiomen der Gruppen I—III und dem Archimedischen Axiom für Strecken kann man sich auf spitze Winkel beschränken: Soll nämlich der rechte oder stumpfe $\sphericalangle(k, l)$ durch Vervielfachung des in seinem Inneren liegenden $\sphericalangle(l, a)$ [4]) erschöpft werden, und ist zunächst auch $\sphericalangle(l, a)$ ein rechter oder stumpfer, dann ist man durch die Verdoppelung von $\sphericalangle(l, a)$, welche mindestens zwei Rechte liefert, schon am Ziel. Ist aber $\sphericalangle(l, a)$ spitz, dann halbiert man $\sphericalangle(k, l)$ durch die Halbgerade h; wenn nun der Archimedische Satz für spitze Winkel bewiesen ist, dann erhält man durch Vervielfachung des $\sphericalangle(l, a)$ eine Halbgerade n, welche außerhalb des spitzen $\sphericalangle(l, h)$ liegt. Wenn diese noch innerhalb des spitzen $\sphericalangle(h, k)$ liegt, dann muß man noch den spitzen $\sphericalangle(n, k)$ erschöpfen und ist damit fertig.

Nun sei der spitze $\sphericalangle(k, l)$ gegeben und in seinem Innern der $\sphericalangle(l, a)$, Fig. 2. Man fällt von einem Punkte K von k aus das Lot auf l, das nach den Sätzen a) und b) diese Halbgerade in einem (von ihrem Endpunkte verschiedenen) Punkt L trifft. Durch wiederholtes Abtragen des $\sphericalangle(a, l)$ erhält man die Punkte $B, C \ldots$ auf dem Lote KL, und da nach dem Hilfssatze von Nr. 3 $LA < AB < BC \ldots$ ist und man die Strecke LK nach dem Archimedischen Axiom für Strecken schon durch wiederholtes Abtragen der kleinsten Strecke LA erschöpfen kann, ist damit der Archimedische Satz für Winkel bewiesen.

5. Wird andererseits den Axiomen der Gruppen I—III das Archimedische Axiom für Winkel hinzugefügt, dann kann man den Archimedischen Satz für Strecken folgendermaßen beweisen:

Es soll gezeigt werden, daß man die Strecke KL durch Verviel-

[4]) Da l eine Halbgerade bezeichnet, folgt aus dieser Schreibweise, daß die beiden Winkel den gleichen Scheitel haben.

fachung der in ihr liegenden Strecke KC erschöpfen kann (Fig. 2). Man errichtet in L zu KL das Lot und verbindet einen Punkt O dieses Lotes mit K. Nun benützt man das Archimedische Axiom für Winkel beim $\sphericalangle KOL$ durch Vervielfachung von $\sphericalangle KOC$ und erhält dabei $\sphericalangle KOC \equiv \sphericalangle COB \equiv \sphericalangle BOA \ldots$. Da nun nach dem Hilfssatze von Nr. 3 $KC > CB > BA \ldots$ ist und nach dem Winkelaxiom diese Folge abnehmender Strecken die Strecke KL erschöpft, gilt dies um so mehr für die wiederholte Abtragung der größten Strecke KC. Damit ist die Äquivalenz der beiden Formen des Archimedischen Axioms bewiesen.

6. Hätte man eine Einheitsstrecke, dann könnte man aus den Axiomen der Gruppen I—III und dem Archimedischen Axiom V, 1 heraus in bekannter Weise jeder Strecke eindeutig eine wesentlich positive Zahl als Länge zuordnen auf Grund der beiden Festsetzungen:

α) Kongruente Strecken haben dieselbe Länge.

β) Ist B ein Punkt der Strecke AC und haben AB und BC die Längen a und b, dann hat AC die Länge $a + b$.

Die Länge einer Strecke AB würde man dann erhalten, indem man von A aus die Einheitsstrecke so oft abtragen würde, $AE_0 \equiv E_0E_1 \equiv E_1E_2 \ldots$, bis man den Punkt B mit dem Punkt E_n erreichen würde, Länge n, oder bis man zum erstenmal, mit dem Punkt E_{n+1}, über den Punkt B hinauskäme. Die Länge hätte dann den Wert $n, a_1 a_2 a_3 \ldots$, wobei man am einfachsten $0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ als Dualbruch und zwar in folgender Weise bestimmen würde: Man halbiert E_nE_{n+1} im Punkte H_1 und setzt $a_1 = 1$, wenn H_1 auf B fällt, oder wenn B in H_1E_{n+1} liegt; liegt aber B in E_nH_1, dann setzt man $a_1 = 0$; im ersten Falle bricht das Verfahren ab, im zweiten halbiert man H_1E_{n+1}, im dritten E_nH_1 durch H_2, bestimmt analog a_2 usf.

Da, wie bewiesen wurde, aus den Axiomen I—III und V, 1 der Archimedische Satz für Winkel folgt, kann man allein auf diesen Axiomen nach Wahl einer Winkeleinheit auch die Winkelmetrik aufbauen, indem man die den Annahmen bei der Streckenmessung entsprechenden Festsetzungen trifft:

α') Kongruente Winkel haben dieselbe Größe.

β') Ist b eine innerhalb eines $\sphericalangle(a, c)$ von dessen Scheitel ausgehende Halbgerade und haben die Winkel $\sphericalangle(a, b)$ und $\sphericalangle(b, c)$ die Größen α und β, dann hat $\sphericalangle(a, c)$ die Größe $\alpha + \beta$.

Die Bestimmung der Einheitsstrecke ist in der Euklidischen Geometrie nicht mit Worten, folglich nicht nur aus den Axiomen heraus und für alle Deutungen des Axiomensystems möglich, sondern sie erfordert das Aufzeigen einer bestimmten Strecke in jeder einzelnen Deutung des Axiomen-

ystems, d. h. die Zuhilfenahme sinnlicher Wahrnehmungen. *Demnach ist n der Euklidischen Geometrie die Einheitsstrecke und folglich auch die Längen- (Flächen-, Inhalts-) Messung kein axiomatischer Begriff.* Man kann im rein logisch-axiomatischen Aufbaue der Euklidischen Geometrie nur mit Strecken- (Flächen-, Inhalts-) Verhältnissen arbeiten. Im Gegensatze dazu ist die Festlegung der Winkeleinheit axiomatisch möglich, indem man die Größe des rechten Winkels, also eines axiomatisch definierbaren speziellen Winkels, vorgibt, etwa als den unendlichen Dezimalbruch für $\frac{\pi}{2}$. Daher gilt der Satz:

Die Euklidische Winkelmessung ist allein auf Grund der Hilbertschen Axiomgruppen I—III *und des Archimedischen Axioms* V, 1 *möglich.*

Bei der Strecken- und Winkelmessung werden die positiven Zahlen erst nach Einführung eines weiteren Axioms notwendig erschöpft, etwa des Vollständigkeitsaxioms oder eines der bekannten Stetigkeitsaxiome[5]).

7. Die kongruenten Übertragungen berühren nach Nr. 1 die „zwischen"-Beziehungen nicht. Daher kann man das Archimedische Axiom enger wie in Hilberts Grundlagen fassen, es genügt dasselbe für *eine einzige* Gerade auszusprechen, etwa in der Form:

Archimedisches Axiom. *Es gibt einen Punkt A und eine von ihm ausgehende Halbgerade a von folgender Eigenschaft:*

B sei ein beliebiger von A verschiedener Punkt auf a, A_1 ein beliebiger Punkt der Strecke AB; man konstruiere dann ... usf. wie in Hilberts Grundlagen.

Die vorliegenden Ausführungen gelten, da sie vom Parallelenaxiom unabhängig sind, in gleicher Weise für die hyperbolische Geometrie, mit Ausnahme der Bemerkung über die Längeneinheit: in der hyperbolischen Geometrie kann man in bekannter Weise die Längeneinheit ebenso rein logisch-axiomatisch fassen wie die Winkeleinheit.

Karlsruhe, im Juli 1926.

---

[5]) Hieran ist wahrscheinlich bei der Bemerkung am Schlusse der Arbeit des Herrn Feigl gedacht, daß zur Euklidischen Winkelmessung außer den Axiomen I—III und V, 1 noch das Parallelenaxiom und das Vollständigkeitsaxiom nötig sei, doch kann diese Bemerkung, wie unser soeben abgeleiteter Satz zeigt, leicht mißverstanden werden.

(Eingegangen am 14. Juli 1926.)

Über Mindestzahlen von Fixpunkten.

Von

Heinz Hopf in Berlin.

§ 1.

Das klassische Hilfsmittel beim Beweise von Fixpunktsätzen besteht in der Betrachtung von Vektorfeldern und der Ermittlung der Indexsumme ihrer Singularitäten[1]). Es läßt sich kurz so beschreiben: den Punkten p der Mannigfaltigkeit M, die der eindeutigen und stetigen Abbildung φ auf sich unterworfen wird, ordnet man die Vektoren $\mathfrak{v}(p)$ zu, welche, im Sinne einer in M definierten Maßbestimmung, von p nach $\varphi(p)$ zeigen. Dieses Vektorfeld $\mathfrak{V}$ wird in den Fixpunkten von φ — sowie unter Umständen in gewissen durch die Maßbestimmung ausgezeichneten Punkten[2]) — singulär. Die Indexsumme der Singularitäten von $\mathfrak{V}$ aber ist bestimmt allein durch den topologischen Bau von M und, falls M berandet ist, durch das Verhalten von $\mathfrak{V}$ am Rande, das durch die gegebenen Eigenschaften von φ hinreichend bekannt sein muß.

Ist die so bestimmte Indexsumme der Fixpunkte von Null verschieden, so ist gewiß wenigstens ein Fixpunkt vorhanden; die *Anzahl* der Fixpunkte liefert sie aber nur im „algebraischen" Sinne, d. h. als Summe von „Vielfachheiten", welche überdies auch negative Werte besitzen können. Es ist sogar *prinzipiell unmöglich*, auf dem beschriebenen Wege zur Kenntnis der wirklichen Anzahl oder wenigstens einer von 1 verschiedenen Mindestzahl der Fixpunkte zu gelangen; denn $\mathfrak{V}$ läßt sich, selbst wenn die Vektoren an dem etwa vorhandenen Rande von M vorgeschrieben sind, immer noch mit einer *willkürlichen Anzahl* beliebig gelegener Singu-

[1]) Vgl. die Darstellung von Feigl, Fixpunktsätze für spezielle n-dimensionale Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen (erscheint demnächst), und die dort zitierten Arbeiten von Alexander und Brouwer; ferner Birkhoff, On dynamical systems ..., Trans. Amer. Math. Soc. **18** (1917).

[2]) Z. B. bei Brouwers Beweis der Fixpunktsätze für die n-dimensionalen Kugeln; s. Feigl, l. c., §§ 4, 5.

aritäten — also z. B. mit einer einzigen Singularität — konstruieren; es müssen nur die Indizes so gewählt sein, daß sie die notwendige Summe besitzen[3]).

Für die Bestimmung einer von 1 verschiedenen Mindestzahl muß also ein wesentlich neuer Gesichtspunkt hinzukommen. Ein solcher wurde von J. Nielsen in dem Begriff der *„Fixpunktklasse"* gefunden und mit Erfolg zur Erreichung des erstrebten Zieles benutzt[4]); und zwar geschah dies bei der Untersuchung der Abbildungen geschlossener Flächen vom Geschlecht $p \geqq 2$, die sich besonders gruppentheoretisch schwierig und interessant gestaltet. Im folgenden werden mit Hilfe des genannten Begriffes die Fragen nach den Mindestzahlen von Fixpunkten in einigen anderen Fällen beantwortet, die viel einfacher sind als die eben erwähnten, — zumal sie gruppentheoretisch keinerlei Schwierigkeit bieten, — deren Behandlung aber vielleicht gerade darum geeignet ist, der Einführung in die „Methode der Fixpunktklassen" zu dienen.

Die Mannigfaltigkeiten, deren Abbildungen hier untersucht werden, sind:

1. der n-dimensionale Ringraum, d. h. das Produkt[5]) eines Kreises mit einem $(n-1)$-dimensionalen Element, für $n = 2$ also der ebene Kreisring, für $n = 3$ das (abgeschlossene) Innere eines Schlauches;
2. der n-dimensionale Torus, d. h. das Produkt von n Kreisen;
3. der n-dimensionale projektive Raum.

Bezüglich des zu 2 gehörigen Satzes und Beweises möchte ich vorweg folgendes bemerken:

Die Mindestzahlen der Fixpunkte für die eineindeutigen Transformationen des 2-dimensionalen Torus wurden in einer 1921 erschienenen Abhandlung von J. Nielsen ohne Heranziehung von „Fixpunktklassen" ermittelt[6]); daß sich die Ergebnisse und Methoden dieser Arbeit auf alle eindeutigen Transformationen des Torus übertragen lassen, wurde gleichzeitig von Brouwer gezeigt[7]). Herr Nielsen machte mich, als ich ihm vor kurzem meinen im folgenden wiedergegebenen Beweis mitteilte, darauf aufmerksam, daß sich dieser im wesentlichen mit einem 1924 von ihm veröffentlichten zweiten

[3]) H. Hopf, Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. 96 (1926).

[4]) J. Nielsen, Über topologische Abbildungen geschlossener Flächen, Abhandl. aus dem Math. Seminar d. Hamburgischen Universität 3 (1924); Zur Topologie der geschlossenen Flächen, Kongresberetningen Kopenhagen 1926.

[5]) Vgl. Steinitz, Beiträge zur Analysis Situs, Sitzungsber. d. Berliner Math. Ges. 7 (1908).

[6]) J. Nielsen, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei Abbildungstypen der Ringflächen, Math. Annalen 82 (1921).

[7]) Brouwer, Über die Minimalzahl der Fixpunkte bei den Klassen von eindeutigen stetigen Transformationen der Ringflächen. Math. Annalen 82 (1921).

Beweis[8]) deckt, und stellte mir gleichzeitig die Abschrift eines 1924 an Herrn J. W. Alexander gerichteten Briefes zur Verfügung, in dem die Übereinstimmung mit meiner Darstellung fast wörtlich ist; an beiden Stellen wird auch die Verallgemeinerungsfähigkeit auf den Fall von n Dimensionen betont. Zugleich forderte mich Herr Nielsen aber auf, trotzdem diesen zweiten Beweis noch einmal zu veröffentlichen, da er wesentlich einfacher und dem Problem besser angepaßt ist als der erste, und da die 1924 in dänischer Sprache publizierte Note wohl ziemlich unbekannt geblieben ist. Ich komme dieser freundlichen Aufforderung mit bestem Dank und gern nach.

§ 2.

W^n sei der n-dimensionale Ringraum, also das Produkt eines Kreises K^1 mit einem Element E^{n-1}. Ist $\mathfrak{C}$ ein Repräsentant von K, d. h. eine Kurve von W^n, die einem festen Punkt des E^{n-1} entspricht, und ist $\mathfrak{C}$ mit einem positiven Umlaufssinn versehen, so läßt sich jeder orientierte geschlossene Weg in W^n eindeutig durch eine Potenz $\mathfrak{C}^c$ ($c \gtrless 0$, ganzzahlig) darstellen; d. h. er ist der c-mal durchlaufenen Kurve $\mathfrak{C}$ homotop. In diesem Sinne sei, wenn φ die zu untersuchende Abbildung von W^n auf sich ist, $\varphi(\mathfrak{C}) \sim \mathfrak{C}^a$. a ist unabhängig von der speziellen Wahl der Kurve $\mathfrak{C}$ und möge der „Charakter“ von φ heißen.

Satz I. *Hat die Abbildung φ des Ringraumes W^n auf sich den Charakter a, so gibt es wenigstens $|a-1|$ voneinander verschiedene Fixpunkte*[9]).

Beweis. Der im euklidischen x_1-x_2-...-x_n-Raum durch

$$x_2^2 + x_3^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1$$

definierte „Vollzylinder“ Z^n kann als (universeller) Überlagerungsraum von W^n aufgefaßt werden. Denn betrachtet man je zwei seiner Punkte als identisch, die durch eine Translation

$$x_1' = x_1 + k \qquad (k \text{ ganz})$$
$$x_\nu' = x_\nu \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

auseinander hervorgehen, so wird die durch diese Identifizierung definierte Mannigfaltigkeit eineindeutig und stetig auf W^n abgebildet, indem man $x_2, x_3, \ldots, x_n$ als Koordinaten in E^{n-1}, $2\pi \cdot x_1$ als — im Sinne der positiven Orientierung von $\mathfrak{C}$ wachsende — Winkelkoordinate von K auffaßt.

---

[8]) J. Nielsen, Ringfladen og Planen, Matematisk Tidsskrift 1924.

[9]) Der Spezialfall, in dem $n=2$, $a=-1$ ist, φ eineindeutig ist und die Randkreise vertauscht, ist als Folgerung aus dem Brouwerschen Translationssatz von v. Kerékjártó (Über Transformationen des ebenen Kreisringes, Math. Annalen 80 (1919)) bewiesen worden.

Wir bezeichnen die Punkte von W^n mit ξ, die von Z^n mit x und verstehen unter $x+k$ den Punkt, der aus x durch die oben angegebene „Decktransformation" hervorgeht; wir schreiben ferner:

$$x \equiv x + k \pmod 1.$$

Mit x „überlagern" alle Punkte $x+k$ $(k = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ einen Punkt ξ von W^n.

Der gegebenen Abbildung φ von W^n entsprechen gewisse Abbildungen f_i von Z^n: $\bar{\xi}$ sei ein fester Punkt von W^n, $\bar{x}$ einer seiner Überlagerungspunkte in Z^n, $\bar{x}_i'$ $(i = \ldots -1, 0, 1, \ldots)$ seien die Punkte, die $\varphi(\xi)$ überlagern; ihre Indizes seien so gewählt, daß $\bar{x}_i' = \bar{x}_0' + i$ ist. Dann definieren wir zunächst

$$f_i(\bar{x}) = \bar{x}_i';$$

indem wir ferner die Bedingungen

1. liegt x über ξ, so liegt $f_i(x)$ über $\varphi(\xi)$,
2. $f_i(x)$ ist in Z^n stetig,

erfüllen, wird $f_i(x)$ zunächst im Kleinen und, unter Berücksichtigung des einfachen Zusammenhangs von Z^n, nach dem „Monodromiesatz" auch in ganz Z^n eindeutig und stetig erklärt.

Dabei ist

$$f_i(x) \equiv f_0(x) \pmod 1,$$

also, da

$$f_i(\bar{x}) = f_0(\bar{x}) + i$$

ist und f_i, f_0 stetig sind, allgemein

1) $$f_i(x) = f_0(x) + i.$$

Ferner folgt aus der Definition des „Charakters" a der Abbildung φ:

$$f_i(x+1) = f_i(x) + a,$$

also durch Iteration und Umkehrung

2) $$f_i(x+k) = f_i(x) + ka \qquad (k = \ldots -1, 0, 1, \ldots).$$

Wir dürfen nun im Hinblick auf die zu beweisende Behauptung voraussetzen, daß

3) $$a - 1 \neq 0$$

ist, und werden zunächst die Gesamtheit der Fixpunkte von φ in „*Klassen*" einteilen, ohne uns darum zu kümmern, ob diese nicht sämtlich oder zum Teil leer sind.

Sei also η ein Fixpunkt von φ, y einer seiner Überlagerungspunkte. Dann ist

$$f_0(y) \equiv y \pmod 1,$$

d. h. es existiert eine ganze Zahl $r_0(y)$, so daß

$$f_0(y) = y + r_0(y) \tag{4}$$

ist. Entsprechend gilt für einen anderen Überlagerungspunkt $y + k$ von η

$$f_0(y + k) = y + k + r_0(y + k), \tag{4'}$$

also nach (2) und (4):

$$y + k + r_0(y + k) = y + r_0(y) + ka$$

$$r_0(y + k) = r_0(y) + k \cdot (a - 1);$$

mod $(a - 1)$ sind mithin die Zahlen $r_0(y)$ für die Überlagerungspunkte y von η allein durch η bestimmt, und wir können dem Punkt η die betreffende Restklasse $r_0(\eta) \bmod (a - 1)$ zuordnen.

Wenn $r_0(\eta) \not\equiv 0 \bmod (a - 1)$ ist, so ist keiner der Punkte $y + k$ Fixpunkt von f_0. Dann gibt η aber bei anderen der Abbildungen f_i Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Denn nach (1) ist z. B.

$$f_{-r_0(y)}(y) = f_0(y) - r_0(y),$$

also nach (4)

$$f_{-r_0(y)}(y) = y.$$

Induziert andrerseits η einen Fixpunkt von f_i, d. h. ist

$$f_i(y + k) = y + k,$$

so folgt aus (1)

$$f_0(y + k) = y + k - i$$

und aus (4')

$$i \equiv -r_0(\eta) \pmod{(a - 1)}. \tag{5}$$

Fassen wir also die Abbildungen f_i nach den Restklassen mod $(a - 1)$, denen ihre Indizes i angehören, in $|a - 1|$ Klassen $F_1, F_2, \ldots, F_{|a-1|}$ zusammen, so gibt η für genau eine dieser Klassen — und zwar, wie leicht zu sehen, in dieser für jede Abbildung — Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Die Fixpunkte von φ werden durch diese Zuordnung zu den Klassen $F_1, F_2, \ldots, F_{|a-1|}$ selbst in $|a - 1|$ „Fixpunktklassen" eingeteilt[9a]).

Umgekehrt bleibt aber jeder Punkt von W'', der von einem Fixpunkt einer Abbildung f_i überlagert wird, bei φ fest. Der Beweis von Satz I ist daher geführt, sobald gezeigt ist, *daß jede Abbildung f_i einen Fixpunkt besitzt, daß also keine der Fixpunktklassen leer ist.*

[9a]) Der Sinn der Klasseneinteilung ist der, daß zwei Abbildungen f_i, f_j dann und nur dann einer Klasse angehören, wenn sie durch eine Decktransformation $t_k(x) = x' = x + k$ ineinander transformierbar sind: $f_j = t_k^{-1} f_i t_k$.

Neben f_i betrachten wir die durch

$$x_1^* = a x_1$$
$$x_\nu^* = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

definierte Abbildung f^* von Z^n. Sie genügt, wie f_i, der Funktionalgleichung

(2*) $$f^*(x+k) = f^*(x) + k a .$$

Für die zugehörigen Verschiebungsvektoren $\mathfrak{v}^*(x)$, die in den Punkten x beginnen, in den Punkten x^* enden, also die Komponenten $(a-1)x_1$, $-x_2, \ldots, -x_n$ haben, gilt daher

(6*) $$\mathfrak{v}^*(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) + k(a-1)\mathfrak{e}_1 ,$$

wobei $\mathfrak{e}_1$ den Einheitsvektor der x_1-Richtung bezeichnet. Analog folgt aus (2) für den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}_i(x)$ von f_i

(6) $$\mathfrak{v}_i(x+k) = \mathfrak{v}_i(x) + k(a-1)\mathfrak{e}_1 ,$$

die Differenz $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}_i$ ist daher periodisch:

(7) $$\mathfrak{v}^*(x+k) - \mathfrak{v}_i(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x),$$

ihr Wertvorrat wird bereits für $0 \leqq x_1 \leqq 1$ erschöpft, und die Länge der Vektoren $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}_i$ ist mithin beschränkt:

(8) $$|\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x)| \leqq C .$$

Die Länge des Vektors $\mathfrak{v}^*$ dagegen strebt mit $|x_1|$ gegen unendlich:

(9) $$|\mathfrak{v}^*(x)| = [(a-1)^2 x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2]^{\frac{1}{2}} \geqq |a-1| \cdot |x_1| .$$

Folglich gibt es eine Zahl $p > 0$, so daß

(10) $$|\mathfrak{v}^*(x)| > |\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}_i(x)|$$

für $x_1 = \pm p$ ist.

Wir untersuchen nun die Felder der $\mathfrak{v}_i$ und $\mathfrak{v}^*$ auf dem Rande S^{n-1} des durch $-p \leqq x_1 \leqq p$ aus Z^n ausgeschnittenen Elements E^n. $\mathfrak{v}^*$ verschwindet auf S^{n-1} nirgends, und auch von $\mathfrak{v}_i$ setzen wir dies voraus, da andernfalls dort ein Fixpunkt von f_i vorhanden, unsere Behauptung also richtig ist. Daher vermittelt jedes der beiden Felder eine eindeutige und stetige Abbildung von S^{n-1} auf die Richtungskugel des Raumes. Wir behaupten, daß die beiden zugehörigen Abbildungsgrade γ^* und γ_i einander gleich sind. Hierfür ist nach einem bekannten Satz[10]) hinreichend, daß $\mathfrak{v}^*$ und $\mathfrak{v}_i$ auf S^{n-1} nirgends zueinander diametral gerichtet sind. Dies ist aber in der Tat nirgends der Fall: für die beiden Stücke mit $x_1 = \pm p$ folgt es aus (10), und für den übrigen Teil von S^{n-1}, der dem Rand von

[10]) Satz von Poincaré-Bohl; s. Fußnote [18]) der unter [1]) zitierten Arbeit von Feigl.

Z^n angehört, folgt es daraus, daß auf diesem Rande sowohl alle $\mathfrak{v}^*$ wie alle $\mathfrak{v}_i$ ins Innere des konvexen Bereiches Z^n weisen. Die so bewiesene Gleichheit

$$\gamma_i = \gamma^*$$

gestattet nun die Bestimmung von γ_i, da γ^* leicht zu ermitteln ist: die einzige Singularität von $\mathfrak{v}^*$ ist der Koordinatenanfangspunkt O; sein Index[1]) ist ± 1, da die Komponenten v_ν^* der $v^*(x)$ homogene lineare Funktionen der Koordinaten von x sind:

$$(11) \qquad \begin{aligned} v_1^* &= (a-1)x_1 \\ v_2^* &= \quad\quad -x_2 \\ &\vdots \\ v_n^* &= \quad\quad\quad -x_n, \end{aligned}$$

und die Determinante wegen (3) nicht verschwindet[11]); da O im Innern von E^n liegt, ist γ^* gleich diesem Index. Da mithin auch

$$\gamma_i = \pm 1$$

ist, besitzt $\mathfrak{v}_i(x)$ in E^n eine Nullstelle, f_i einen Fixpunkt, w. z. b. w.

Zusatz: Daß die Mindestzahlen $|a-1|$ wirklich angenommen werden, zeigen für $a+1$ die von f^*, für $a=1$ die von

$$x_1^* = x_1 + \frac{1}{2}, \qquad x_\nu^* = 0 \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, n)$$

überlagerten Abbildungen von W^n.

§ 3. [12])

Der n-dimensionale Torus T^n ist das Produkt von n Kreisen $K_1, K_2, \ldots, K_n$. $\mathfrak{C}_1$ sei ein Repräsentant von K_1, d. h. eine Kurve von T^n, die je einem festen Punkt von $K_2, K_3, \ldots, K_n$ entspricht; $\mathfrak{C}_2, \ldots, \mathfrak{C}_n$ seien analog definiert. Alle $\mathfrak{C}_\nu$ seien mit positiven Umlaufsinnen versehen. Jeder orientierte geschlossene Weg in T^n läßt sich eindeutig als Potenzprodukt $\mathfrak{C}_1^{c_1}\mathfrak{C}_2^{c_2}\ldots\mathfrak{C}_n^{c_n}$ darstellen, d. h. er ist der Kurve homotop, die bei c_1-maliger Durchlaufung von $\mathfrak{C}_1$, darauf folgender c_2-maliger Durchlaufung von $\mathfrak{C}_2$ usw. beschrieben wird.

---

[11]) Die auf einer $(n-1)$-dimensionalen Kugel um den Nullpunkt angebrachten Vektoren eines solchen linearen Vektorfeldes mit nicht verschwindender Determinante vermitteln eine *eineindeutige* Abbildung der Kugel auf die Richtungskugel, daher ist der Index ± 1.

[12]) Inhalt und Methode dieses Paragraphen laufen denen des § 2 parallel; daher ist die Darstellung zwecks Vermeidung von Wiederholungen knapp gehalten. Man vergleiche immer die entsprechenden Stellen im § 2.

Für die Abbildung φ von T^n auf sich sei

$$\varphi(\mathfrak{C}_\lambda) \sim \mathfrak{C}_1^{a_{\lambda 1}} \mathfrak{C}_2^{a_{\lambda 2}} \dots \mathfrak{C}_n^{a_{\lambda n}} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots, n).$$

Die Matrix

$$A = (a_{\lambda\mu})$$

heiße der „Charakter" von φ. E bezeichne die n-reihige Einheitsmatrix, Δ die Determinante der Matrix

$$D = A - E.$$

Satz II. *Hat die Abbildung φ des n-dimensionalen Torus T^n auf sich den Charakter A, so gibt es wenigstens $|\Delta| = ||A - E||$ voneinander verschiedene Fixpunkte.*

Beweis. Der euklidische x_1-x_2-$\dots$-x_n-Raum R^n ist als universeller Überlagerungsraum von T^n aufzufassen; die zugehörigen Decktransformationen sind

$$x_\nu' = x_\nu + k_\nu \quad (k_\nu \text{ ganz}^{13}); \quad \nu = 1, 2, \dots, n);$$

$2\pi \cdot x_1, 2\pi \cdot x_2, \dots, 2\pi \cdot x_n$ sind als Winkelkoordinaten auf $K_1, K_2, \dots, K_n$ im Sinne der positiven Durchlaufung von $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \dots, \mathfrak{C}_n$ anzusehen.

Einen Punkt mit den Koordinaten $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnen wir vektoriell durch $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$ und schreiben dann:

$$[x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n] = x + y$$
$$x + k \equiv x \pmod{E}^{13}).$$

Die Vektoren k mit ganzzahligen Komponenten k_ν sind die „*Elemente*" eines „Moduls", den wir $\mathfrak{E}$ nennen.

Zusammen mit x überlagern alle Punkte $x + k$ denselben Punkt ξ von T^n.

φ induziert in R^n Abbildungen $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$; dabei ist — analog wie in § 2 — $f_{i_1 i_2 \dots i_n}$ folgendermaßen festgelegt: Man betrachtet einen Überlagerungspunkt $\bar{x}$ des festen Punktes $\bar{\xi}$ von T^n, versieht die Überlagerungspunkte $\bar{x}'$ von $\varphi(\bar{\xi})$ so mit Indizes, daß

$$\bar{x}'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \bar{x}'_{0\,0 \dots 0} + [i_1, i_2, \dots, i_n]$$

ist, und setzt fest, es sei

$$f_{i_1 i_2 \dots i_n}(\bar{x}) = \bar{x}'_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

Dann ist

1) $$f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) = f_{0\,0 \dots 0}(x) + [i_1, i_2, \dots, i_n],$$

und für jede der Abbildungen gilt die Funktionalgleichung

2) $$f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x + k) = f_{i_1 i_2 \dots i_n}(x) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \dots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big],$$

[13]) k_ν bedeutet im folgenden stets eine ganze Zahl.

denn, wenn x_λ um k_λ wächst, nimmt die ν-te Koordinate des Bildpunktes um $k_\lambda a_{\lambda\nu}$ zu.

Mit Rücksicht auf die in Satz II ausgesprochene Behauptung dürfen wir

$$\Delta \geqq |A - E| \neq 0 \tag{3}$$

annehmen. Die Klassifikation der Fixpunkte von φ geschieht auf folgende Weise:

Ist y ein Überlagerungspunkt des Fixpunktes η von φ, so ist

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y) \equiv y \pmod{E},$$

d. h. es existiert ein Element von $\mathfrak{E}$ (s. o.)

$$r_0(y) = [r_0^1(y), r_0^2(y), \ldots, r_0^{(n)}(y)],$$

derart, daß

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y) = y + r_0(y) \tag{4}$$

ist. Für einen anderen Überlagerungspunkt $y + k$ gilt entsprechend

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y+k) = y + k + r_0(y+k), \tag{4'}$$

also nach (2), (4), (4')

$$y + r_0(y) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big] = y + k + r_0(y+k)$$

$$r_0(y+k) = r_0(y) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1} - k_1, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2} - k_2, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n} - k_n\Big].$$

Setzen wir $k_\nu' = \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu$, so geht das Element $[k_1', \ldots, k_n']$ aus dem Element $[k_1, \ldots, k_n]$ durch diejenige lineare Substitution hervor, die zu der Matrix D' gehört, welche durch Spiegelung an der Hauptdiagonale aus D entsteht:

$$k' = D'(k).$$

Es ist also, in bekannter Schreibweise,

$$r_0(y+k) \equiv r_0(y) \pmod{D'}.$$

D. h.: alle zu den Überlagerungspunkten $y + k$ von η gehörigen „Elemente“ $r_0(y+k)$ gehören einer bestimmten unter den „Restklassen“ an, in welche der Modul $\mathfrak{E}$ aller Elemente durch D' — oder genauer: durch den Teilmodul $\mathfrak{D}$ aller in der Form $D'(k)$ darstellbaren Elemente — zerfällt wird. Diese Restklasse $r_0(\eta)$ ordnen wir η zu. Die Anzahl aller derartigen Restklassen ist nach einem Satz von Dedekind[14]) endlich und zwar gleich $|\Delta|$.

Genau wie in § 2 folgt nun: Induziert η einen Fixpunkt von $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, d. h. ist

$$f_{i_1 i_2 \ldots i_n}(y+k) \equiv y + k,$$

[14]) Dirichlet-Dedekind, Vorlesungen über Zahlentheorie, 4. Aufl., XI. Supplement.

so folgt aus (1)

$$f_{0\,0\,\ldots\,0}(y+k) = y + k - [i_1, i_2, \ldots, i_n]$$

und aus (4′)

(5) $$[i_1, i_2, \ldots, i_n] \equiv -r_0(\eta) \pmod{D'}.$$

Wenn wir also die Abbildungen $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ nach den Restklassen mod D', denen ihre Indexelemente $[i_1, i_2, \ldots, i_n]$ im Modul $\mathfrak{E}$ aller Elemente angehören, in $|\Delta|$ Klassen zusammenordnen, so gibt η in nur einer von ihnen — (und zwar in ihr für alle Abbildungen) — Veranlassung zum Auftreten eines Fixpunktes. Die Fixpunkte von φ werden so in $|\Delta|$ „Klassen" eingeteilt.

Andererseits überlagert jeder Fixpunkt einer Abbildung $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ einen Fixpunkt von φ; zum Beweis von Satz II genügt es daher zu zeigen, daß jede Abbildung $f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ einen Fixpunkt besitzt.

Neben $f = f_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ betrachten wir die Abbildung f^* von R^n, die durch

$$x_\nu^* = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\lambda \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n)$$

gegeben ist; auch sie erfüllt, wie f, die Funktionalgleichung

(2*) $$f^*(x+k) = f^*(x) + \Big[\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 1}, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda 2}, \ldots, \sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda n}\Big].$$

Ihre Verschiebungsvektoren $\mathfrak{v}^*(x)$ haben die Komponenten

(11) $$v_\nu^*(x) = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\lambda - x_\nu$$

und verschwinden außer im Nullpunkt wegen (3*) nirgends. Für sie gilt

(6*) $$\mathfrak{v}^*(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) + \sum_\nu \Big(\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu\Big) e_\nu,$$

wobei e_ν der Einheitsvektor der x_ν-Richtung ist. Dieselbe Gleichung gilt auch, auf Grund von (2), für den Verschiebungsvektor $\mathfrak{v}(x)$ von f:

(6) $$\mathfrak{v}(x+k) = \mathfrak{v}(x) + \sum_\nu \Big(\sum_\lambda k_\lambda a_{\lambda\nu} - k_\nu\Big) e_\nu;$$

die Differenz $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}$ ist daher in R^n n-fach periodisch:

(7) $$\mathfrak{v}^*(x+k) - \mathfrak{v}(x+k) = \mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x),$$

ihr Wertevorrat wird für $0 \leqq x_\nu \leqq 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ erschöpft, mithin ist die Länge der Vektoren $\mathfrak{v}^* - \mathfrak{v}$ beschränkt:

(8) $$|\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x)| < C.$$

Dagegen strebt $|\mathfrak{v}^*(x)|$ mit wachsendem $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$ gegen unendlich, denn es ist

(9) $$|\mathfrak{v}^*(x)| \geqq r \cdot M,$$

wobei M das Minimum von $|\mathfrak{v}^*|$ auf der Einheitskugel bezeichnet, welches infolge (3) und (11) von 0 verschieden ist. Es gibt daher eine Zahl $p > 0$, so daß

$$|\mathfrak{v}^*(x)| > |\mathfrak{v}^*(x) - \mathfrak{v}(x)| \tag{10}$$

für $r = p$ ist. Auf der Kugel S^{n-1} vom Radius p um den Nullpunkt sind wegen (10) die Vektoren $\mathfrak{v}^*$ und $\mathfrak{v}$ niemals diametral gerichtet. Hieraus ergibt sich, da nach (11) die Komponenten von $\mathfrak{v}^*$ lineare Funktionen der x_ν mit der Determinante $\Delta \neq 0$ sind, wörtlich wie am Schluß von § 2, daß ihre durch die Vektoren $\mathfrak{v}$ vermittelte Abbildung von S^{n-1} auf die Richtungskugel den Grad ± 1 hat, daß also f im Innern von S^{n-1} einen Fixpunkt besitzt.

Damit ist Satz II bewiesen. Die in ihm enthaltene, nur die Existenz mindestens eines Fixpunktes betreffende Aussage, läßt sich folgendermaßen formulieren:

Geht bei φ – außer den Kurven, die sich auf Punkte zusammenziehen lassen — keine Kurve in eine ihr homotope Kurve über, so existiert ein Fixpunkt.

Denn bei einer fixpunktfreien Abbildung ist $|A - E| = 0$, das Gleichungssystem

$$m_\lambda = \sum_{\nu=1}^{n} a_{\nu\lambda} m_\nu \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n)$$

besitzt daher ein (ganzzahliges) Lösungssystem $(m_1, \ldots, m_n) \neq (0, 0, \ldots, 0)$, und jede Kurve des Typus $\mathfrak{C}^* \sim \prod_{\lambda=1}^{n} \mathfrak{C}_\lambda^{m_\lambda}$ ist ihrem Bilde homotop.

Zusatz: In dem zuletzt genannten Fall überlagert $x_\nu^* = \sum_\lambda a_{\lambda\nu} x_\nu$ in Verbindung mit einer Translation des R^n in Richtung derjenigen Parallelenschar, die den Kurven $\mathfrak{C}^*$ entspricht, eine fixpunktfreie Abbildung von T^n; ist $\Delta \neq 0$, so haben die von f^* überlagerten Abbildungen die Mindestzahl $|\Delta|$ von Fixpunkten.

§ 4.

Der n-dimensionale projektive Raum P^n wird von der Kugel S^n zweifach überlagert. Eine Abbildung φ von P^n induziert daher — vgl. §§ 2, 3 — auf S^n zwei Abbildungen f_1, f_2. Bezeichnet d die Transformation von S^n, die jeden Punkt in seinen Diametralpunkt überführt, so ist $f_2 = d f_1$.

Die Gesamtheit aller Abbildungen φ von P^n auf sich kann man in zwei Arten einteilen: die Abbildungen erster Art, bei denen die geschlossenen Kurven, die nicht homotop Null sind, — die sich also in

projektive Geraden deformieren lassen — in ebensolche Kurven übergehen, und die Abbildungen zweiter Art, bei denen die Bilder dieser Kurven sich auf Punkte zusammenziehen lassen.

Sind $x_1, x_2 = d(x_1)$; $x_1', x_2' = d(x_2')$ die Überlagerungspunkte von ξ bzw. von $\xi' = \varphi(\xi)$, und ist $f_1(x_1) = x_1'$, so ist bei einer Abbildung erster Art: $f_1(x_2) = x_2'$; denn wenn x_1 stetig nach $x_2 = d(x_1)$ läuft, durchläuft der überlagerte Punkt ξ eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$, die nicht homotop Null ist; $\xi' = \varphi(\xi)$ durchläuft eine ebensolche Kurve, und der Überlagerungspunkt $f_1(x_1) = x_1'$ gelangt daher in seinem Diametralpunkt $d(x_1') = x_2'$. Da $f_2(x_1) = d f_1(x_1) = d(x_1') = x_2'$ ist, so folgt analog $f_2(x_2) = x_1'$. Es ist also, falls φ von der ersten Art ist:

(1) $$x_1' = f_1(x_1),\ x_2' = f_1(x_2);\quad x_2' = f_2(x_1),\ x_1' = f_2(x_2).$$

Für eine Abbildung zweiter Art folgt dagegen durch die entsprechende Überlegung:

(2) $$x_1' = f_1(x_1) = f_1(x_2);\quad x_2' = f_2(x_1) = f_2(x_2).$$

φ sei nun von der *ersten Art*, η sei ein Fixpunkt, $y_1, y_2 = d(y_1)$ seien seine Überlagerungspunkte. Da entweder $f_1(y_1) = y_1$ oder $f_1(y_1) = y_2$ ist, folgt aus (1), daß entweder *beide Punkte* bei f_1 oder *beide Punkte* bei f_2 fest bleiben. Man kann daher die Fixpunkte in zwei Klassen F_1, F_2 einteilen, je nachdem sie Fixpunkte von f_1 oder von f_2 hervorrufen.

Es sei jetzt zunächst n *ungerade*; dann ist P^n orientierbar und der „Grad" a von φ ist definiert; er ist zugleich der Grad von f_1 und f_2 [15]). Ist $a \neq 1$, so haben daher [16]) f_1 und f_2 je wenigstens einen Fixpunkt, keine der Klassen F_1, F_2 ist leer, und es ist bewiesen:

Satz III. *Ist n ungerade, φ eine Abbildung erster Art von P^n auf sich und ihr Grad $a \neq 1$, so sind wenigstens zwei Fixpunkte vorhanden.*

Ist φ von der zweiten Art, so muß a *gerade* sein; denn f_1 läßt sich erzeugen durch Aufeinanderfolge 1. der Überlagerungsabbildung $x_i \to \xi$

---

[15]) Dies läßt sich, gleichgültig, ob φ von der ersten oder zweiten Art ist, so beweisen: bei einer simplizialen Approximation φ' werde der Punkt ξ' von den Simplexen $\overset{+}{\tau}{}^1, \overset{+}{\tau}{}^2, \ldots, \overset{+}{\tau}{}^p$; $\overset{-}{\tau}{}^1, \overset{-}{\tau}{}^2, \ldots, \overset{-}{\tau}{}^{p'}$ positiv bzw. negativ bedeckt, so daß also $p - p' = a$ ist. Ihre Überlagerungssimplexe $\overset{+}{\tau}{}_1^1, \overset{+}{\tau}{}_2^1, \overset{+}{\tau}{}_1^2, \overset{+}{\tau}{}_2^2, \ldots, \overset{+}{\tau}{}_2^p, \overset{-}{\tau}{}_1^1, \ldots, \overset{-}{\tau}{}_1^{p'}, \overset{-}{\tau}{}_2^{p'}$, und nur sie, bedecken bei der zu φ' gehörigen Approximation f_1' von f_1 zusammen die beiden über ξ' liegenden Punkte x_1', x_2' positiv bzw. negativ, so daß $p_1 + p_2 - p_1' - p_2' = 2a$ ist, wenn p_1, p_1', p_2, p_2' die Bedeckungszahlen von x_1' bzw. x_2' sind. Aus $p_1 - p_1' = p_2 - p_2'$ folgt daher $p_1 - p_1' = a$; d. h. a ist der Grad von f_1.

[16]) Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Annalen 71 (1911); vgl. Feigl wie unter [1]), wo auch Fixpunktsätze für P^n bewiesen sind.

$(i = 1, 2)$ von S^n auf P^n, die den Grad 2 hat, 2. aus der, wie aus (2) ersichtlich, *eindeutigen* Abbildung von P^n auf S^n, die dem Punkt ξ den Punkt $f_1(x_1) = f_1(x_2)$ zuordnet. Mithin ist, da sich die Grade multiplizieren, a gerade; daher folgt aus Satz III:

Satz IIIa. *Ist n ungerade und φ eine Abbildung ungeraden, aber von 1 verschiedenen Grades von P^n auf sich, so hat φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Insbesondere hat also eine eineindeutige, die Orientierung umkehrende Transformation von P^n zwei Fixpunkte; denn bei ihr ist $a = -1$. In dem Spezialfall einer Kollineation äußert sich diese Tatsache darin, daß eine Matrix von negativer Determinante bei gerader Variablenzahl stets zwei voneinander verschiedene reelle charakteristische Wurzeln besitzt.

Bei *geradem n* haben wir zu berücksichtigen, daß P^n nicht orientierbar, der Grad von φ also nicht definiert ist; die Grade von f_1 und f_2 unterscheiden sich um den Faktor -1, da dies der Grad von d ist. Wir nennen den, in bezug auf das Vorzeichen unbestimmten, Grad von f_1 und f_2 den Grad von φ. Da eine fixpunktfreie Transformation von S^n bei geradem n den Grad -1 hat[16]), tritt an Stelle von Satz III jetzt

Satz IV. *Ist n gerade, φ eine Abbildung erster Art von P^n auf sich und der Grad $a \neq \pm 1$, so hat φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Ist n gerade und φ von der *zweiten Art*, so ist $a = 0$; denn nach (2) ist $f_1 = f_1 d$, nach dem Multiplikationssatz für die Grade ist also $a = -a$. Daher folgt aus IV:

Satz IVa[17]). *Ist n gerade und φ eine Abbildung von P^n auf sich, deren absolut genommener Grad $|a| > 1$ ist, so besitzt φ wenigstens zwei Fixpunkte.*

Zusatz: Auch zu den Sätzen dieses Paragraphen lassen sich leicht Abbildungen angeben, die die Mindestzahl 2 von Fixpunkten wirklich besitzen.

---

[17]) Auf diesen Satz wies mich Herr Brouwer in einem Gespräch hin, als ich ihm Satz IIIa mitteilte.

(Zusatz bei der Korrektur.) Vgl. die inzwischen erschienene Note von Brouwer: On transformations of projective spaces, Koninkl. Akad. v. Wetenschappen te Amsterdam, Proceedings **29** (1926).

(Eingegangen am 28. Oktober 1926.)

Bemerkung zu einer Note der Herren Berwald und Frank über die Differentialgleichungen der Bahnkurven.

Von

Georg Hamel in Berlin.

Die Herren Berwald und Frank haben in einer Note in dieser Zeitschrift[1]) gezeigt, wie man die Differentialgleichungen eines beliebigen holonomen und skleronomen Systems der klassischen Mechanik so umformen kann, daß die allgemeinen Koordinaten $q_1, q_2, \ldots, q_n$ und die kinetische Energie K als Funktionen eines beliebigen Parameters u bestimmt werden. Da die gestellte Aufgabe im Falle eines konservativen Systems durch das Jacobische Integral der kleinsten Wirkung bereits geleistet wird, muß man den allgemeinen Satz so gewinnen können, daß man die Differentialgleichungen, die aus dem Jacobischen Prinzip folgen, so umformt, daß nur die Ableitungen des Potentials U vorkommen, aber nicht das Potential selbst. Ersetzt man dann die negativen Ableitungen des Potentials durch allgemeine Lagrangesche Kräfte Q, so müssen die Gleichungen der Herren Berwald und Frank herauskommen. Das kann in wenigen Zeilen gezeigt werden.

Das Jacobische Prinzip lautet

$$\delta \int \sqrt{(h-U)K}\, dt = 0; \qquad K + U = h$$

und kann, da die Zeit t in dem Integral nur scheinbar vorkommt, auch geschrieben werden

$$\delta \int \sqrt{(h-U)k}\, du = 0, \qquad \frac{dK}{du} + \frac{dU}{du} = 0 \quad \text{mit} \quad K = k\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

woraus die Differentialgleichungen

$$\frac{d}{du}\frac{\partial}{\partial q_i'}\sqrt{(h-U)k} - \frac{\partial}{\partial q_i}\sqrt{(h-U)k} = 0 \qquad \left(q_i' = \frac{dq_i}{du} = \dot{q}_i \frac{dt}{du}\right)$$

[1]) Ludwig Berwald und Philipp Frank: Über eine kovariante Gestalt der Differentialgleichungen der Bahnkurven allgemeiner mechanischer Systeme, Math. Zeitschr. 1 (1924), S. 154–159.

folgen. Differenziert man nach der Produktregel aus und ersetzt $\frac{dU}{du}$ durch $\sum \frac{\partial U}{\partial q_i} q_i'$, so ist die linke Seite identisch mit

$$\sqrt{(h-U)k}\left\{\frac{1}{\sqrt{k}}\left[\frac{d}{du}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i'} - \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i}\right] - \frac{1}{2K}\left[-\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i'}\sum_{\lambda=1}^{n}\frac{\partial U}{\partial q_\lambda}q_\lambda'\right]\right\}.$$

Ersetzt man nun $-\frac{\partial U}{\partial q_i}$ durch Q_i, so erhält man die gewünschten Formeln

$$\frac{1}{\sqrt{k}}\frac{d}{du}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i'} - \frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i} = \frac{1}{2K}\left[Q_i - \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{\partial\sqrt{k}}{\partial q_i'}\sum_{\lambda=1}^{n} Q_\lambda q_\lambda'\right],$$

wozu nach dem Energiesatz noch

$$\frac{dK}{du} = \sum_{i=1}^{n} Q_i q_i'$$

hinzutritt.

(Eingegangen am 5. November 1926.)

Über eine paradoxe Eigenschaft gewisser bedingt konvergenter unendlicher Reihen.

Von

Alexander Rajchman in Warschau.

1. Im folgenden beabsichtige ich, eines der Ergebnisse, die Herr Knopp in seiner Arbeit gleichen Titels in der Mathematischen Zeitschrift **23** (1925), S. 254 mitgeteilt hat, einfacher zu beweisen und zu verschärfen. Ich konstruiere nämlich eine konvergente Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

mit konstanten Gliedern, für die

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{kn}$$

bei jedem ganzen k existiert und einen von Null verschiedenen und von k unabhängigen Wert hat.

2. Man bedecke die Menge aller rationalen Zahlen zwischen Null und Eins[1]) mit einer abzählbaren Folge von offenen Intervallen der Gesamtlänge $\frac{1}{2}$ und es sei Z die durch sie gebildete offene Menge (d. h. die Menge der inneren Punkte der betrachteten Intervalle). Endlich sei

$$f(x) = \begin{cases} +1, & \text{wenn } x \text{ zur Menge } Z \text{ gehört,} \\ -1, & \text{wenn } x \text{ nicht zur Menge } Z \text{ gehört.} \end{cases}$$

Dann ist, da das Maß von Z gleich $\frac{1}{2}$ ist[2]),

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 0. \tag{1}$$

[1]) Die reellen Zahlen zwischen 0 und 1 seien durch die Punkte eines Kreises vom Umfange 1 dargestellt.

[2]) Selbstverständlich kann man das Maß der Menge Z willkürlich wählen; man setze dann wieder $f(x) = +1$, wenn x zur Menge Z gehört, und setze die Relation (1) voraus.

Entwickelt man nun $f(x)$ in eine Fourierreihe, so ist evident, daß diese Reihe in allen Punkten der Menge Z gegen $f(x)$ konvergiert, da $f(x)$ in jedem Punkt von Z sogar eine Ableitung besitzt. Folglich hat man, wenn

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos 2\pi n x\,dx, \qquad b_n = 2\int_0^1 f(x)\sin 2\pi n x\,dx$$

gesetzt wird, für jedes Paar ganzer Zahlen j, k:

$$1 = f\left(\frac{j}{k}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos 2\pi n \frac{j}{k} + b_n \sin 2\pi n \frac{j}{k}.$$

Nun ist offenbar

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \sin 2\pi n \frac{j}{k} = 0$$

und

$$\frac{1}{k}\sum_{j=0}^{k-1} \cos 2\pi n \frac{j}{k} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \frac{n}{k} \text{ eine ganze Zahl ist,} \\ 0 & \text{im entgegengesetzten Falle.} \end{cases}$$

Folglich hat man für jedes k

$$1 = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k-1} f\left(\frac{j}{k}\right) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{km},$$

was zu beweisen war.

Warschau, den 14. Dezember 1926.

(Eingegangen am 22. Dezember 1926.)